Diagramme de Loedel ou comment répondre aux questions des élèves

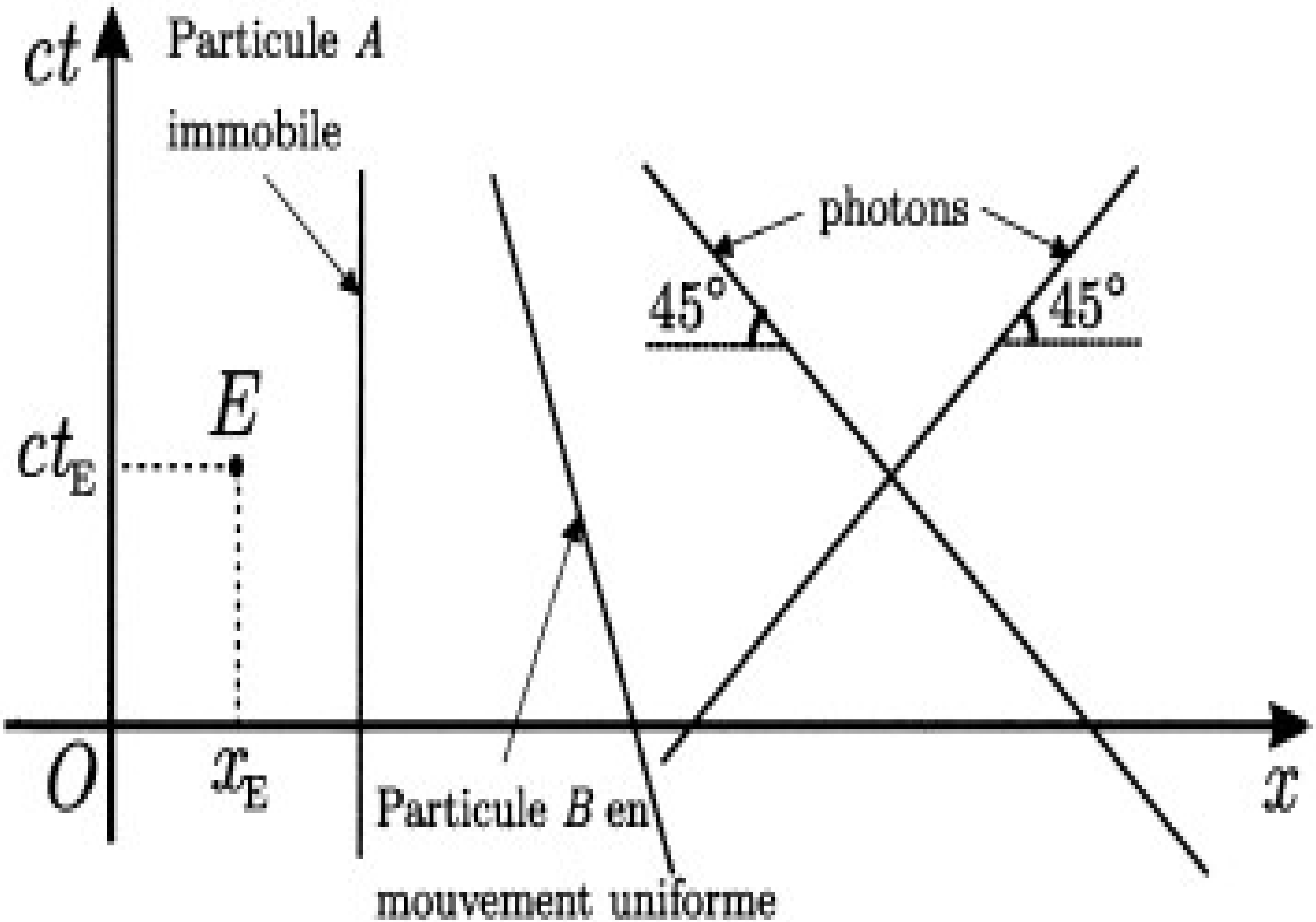
Sciences à l'École

Jean-Christophe PELHATE
Lycée JP Vernant – Sèvres (92)

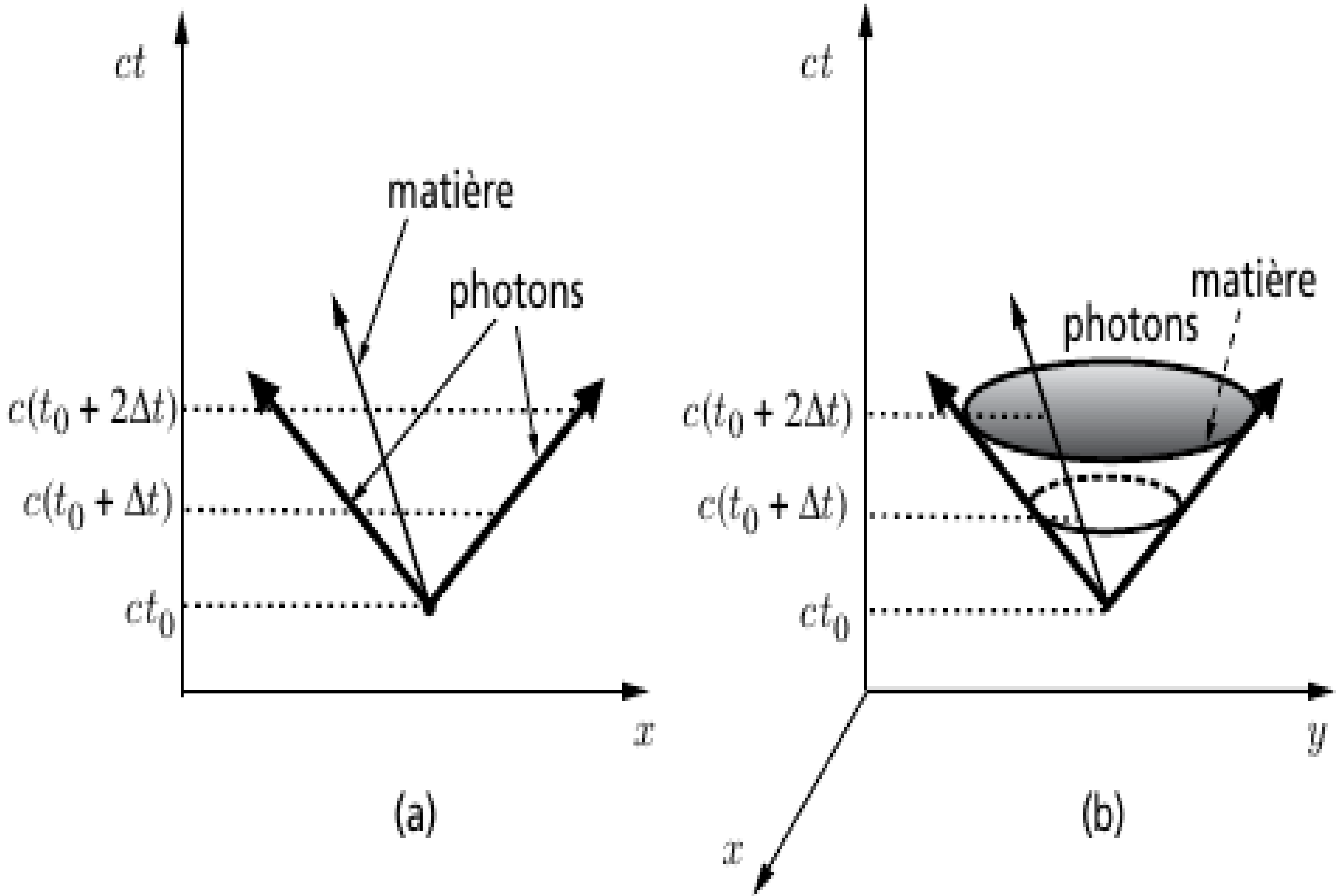
1. Les diagrammes d'espace-temps

1.1. Généralités

- Le cadre naturel de la relativité restreinte est l’espace-temps à quatre dimensions.
- Toute particule est caractérisée par une « trajectoire » dans l’espace-temps.
- Cette trajectoire est appelée ligne d’univers de la particule



ct
Particule A
immobile
photons
45°
45°
E
ct_E
O
x_E
Particule B en
mouvement uniforme
x

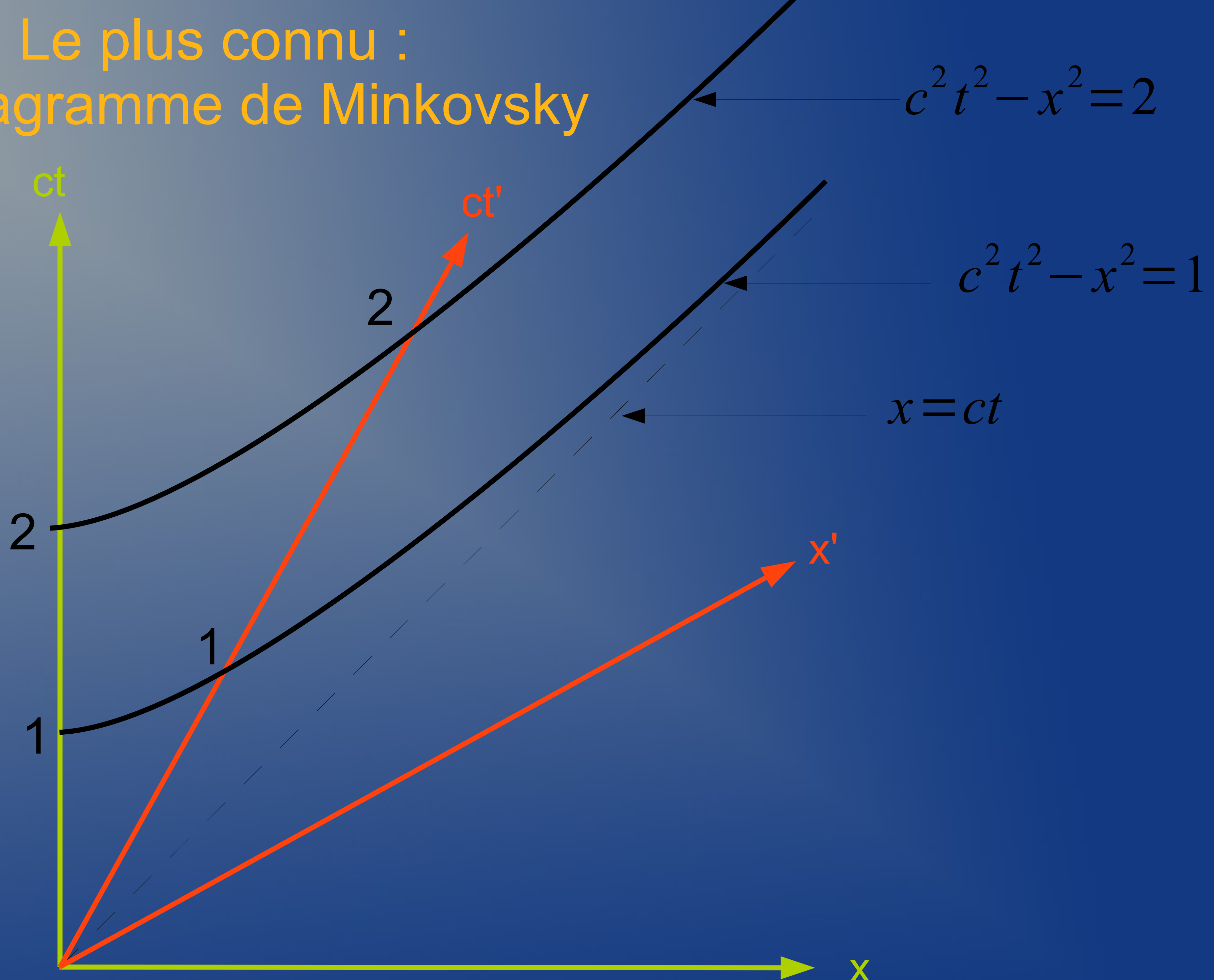


ct
matière
photons
$c(t_0 + 2\Delta t)$
$c(t_0 + \Delta t)$
ct_0
x
(a)
ct
matière
photons
$c(t_0 + 2\Delta t)$
$c(t_0 + \Delta t)$
ct_0
y
x
(b)

1.2. Présentation de trois diagrammes

- Représenter graphiquement le passage d'un référentiel à un autre
- On considère deux référentiels inertiels R et R' se déplaçant l'un par rapport à l'autre à une vitesse V.
- Chaque référentiel est muni d'un système d'axe à 2 dimensions
  - un axe représentant l'espace
  - un axe représentant le temps
  - pour R : (Ox, ct)
  - pour R' : (Ox', ct')

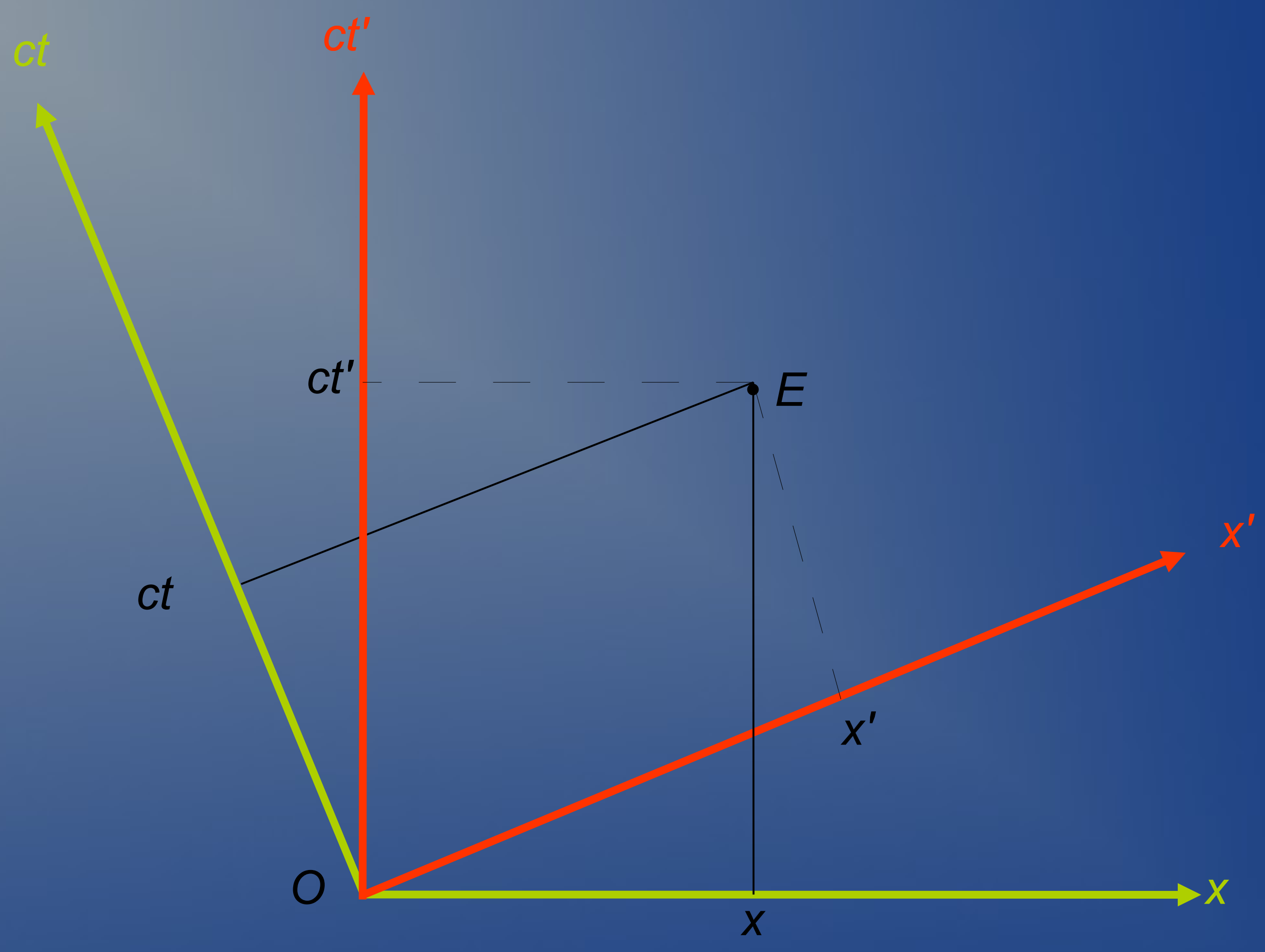
1.2.1. Le plus connu : le diagramme de Minkovsky



Inconvénients :

- Privilégie un référentiel particulier (contre l'esprit de la relativité)
- La longueur d'unité change dans les deux référentiels (plus difficile pour effectuer les calculs à cause de la distortion)

1.2.2. Le diagramme de Brehme ou de Lorentz



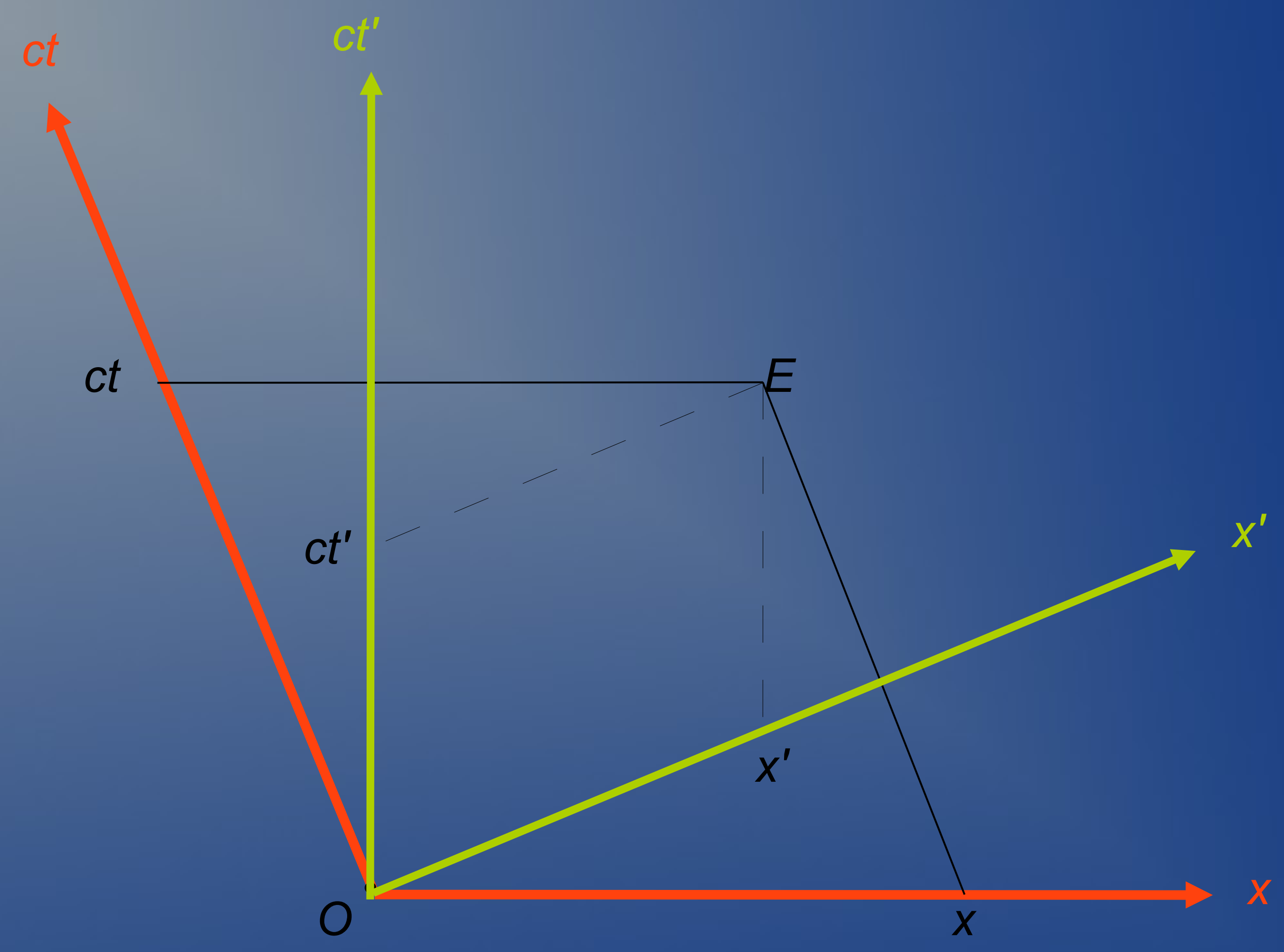
Caractéristiques :

- On repère les coordonnées spaciotemporelles d'un événement par projection perpendiculaire sur les axes
- L'unité de longueur est identique sur les axes Ox et Ox'
- Les axes Ox et Oct' ainsi que les axes Ox' et Oct sont perpendiculaires

$$x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2$$

$$x^2 + c^2 t'^2 = x'^2 + c^2 t^2$$

1.2.3. Le diagramme de Loedel



Caractéristiques :

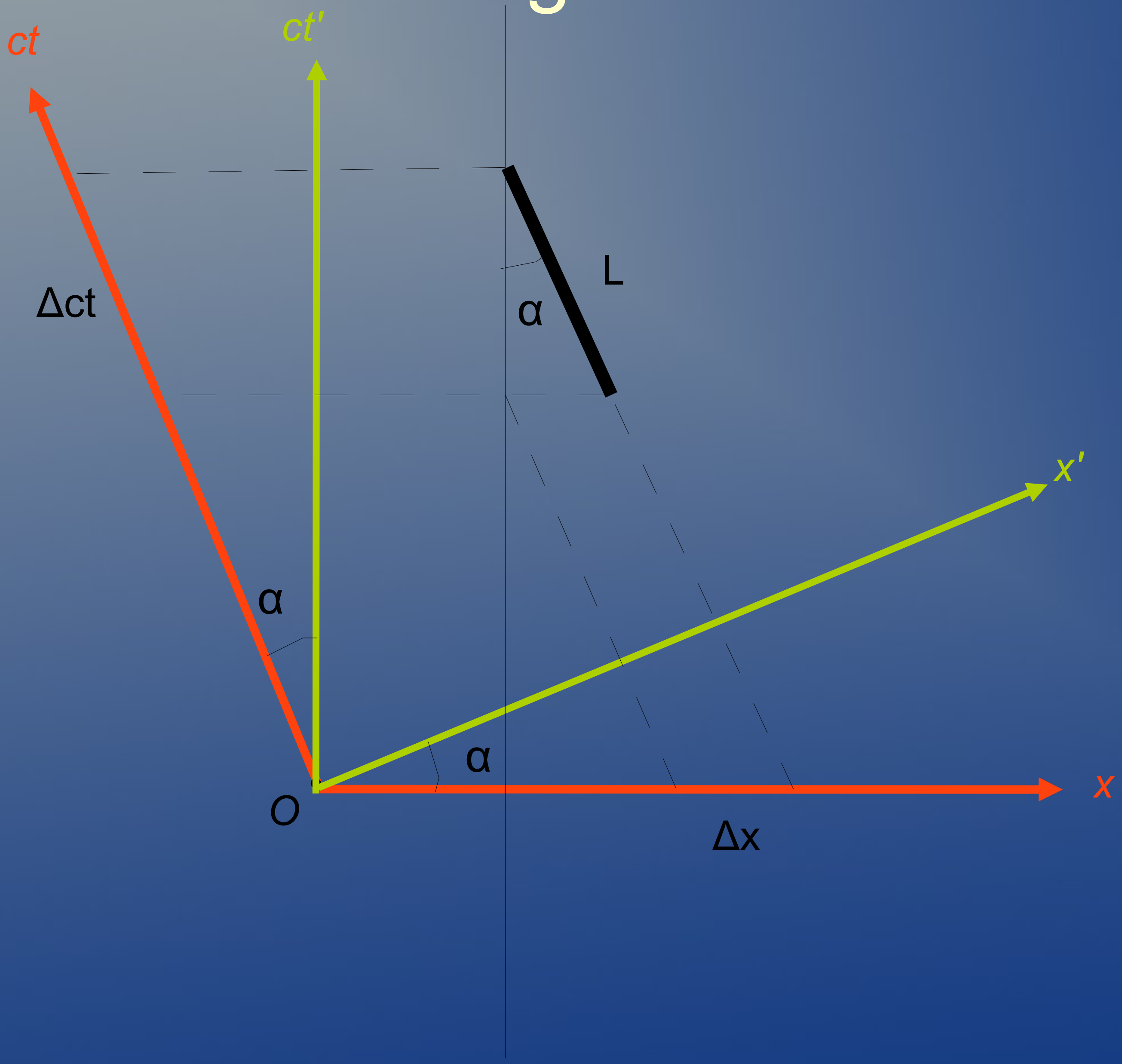
- On repère les coordonnées spaciotemporelles d'un événement par projection parallèle sur les axes
- L'unité de longueur est identique sur les axes Ox et Ox'
- Les axes Ox et Oct' ainsi que les axes Ox' et Oct sont perpendiculaires

$$x^2-c^2t^2=x'^2-c^2t'^2$$

$$x^2+c^2t'^2=x'^2+c^2t^2$$

2. Les diagrammes de Loedel

2.1. L'angle α entre les deux repères



$$\sin(\alpha) = \frac{\Delta x}{L}$$

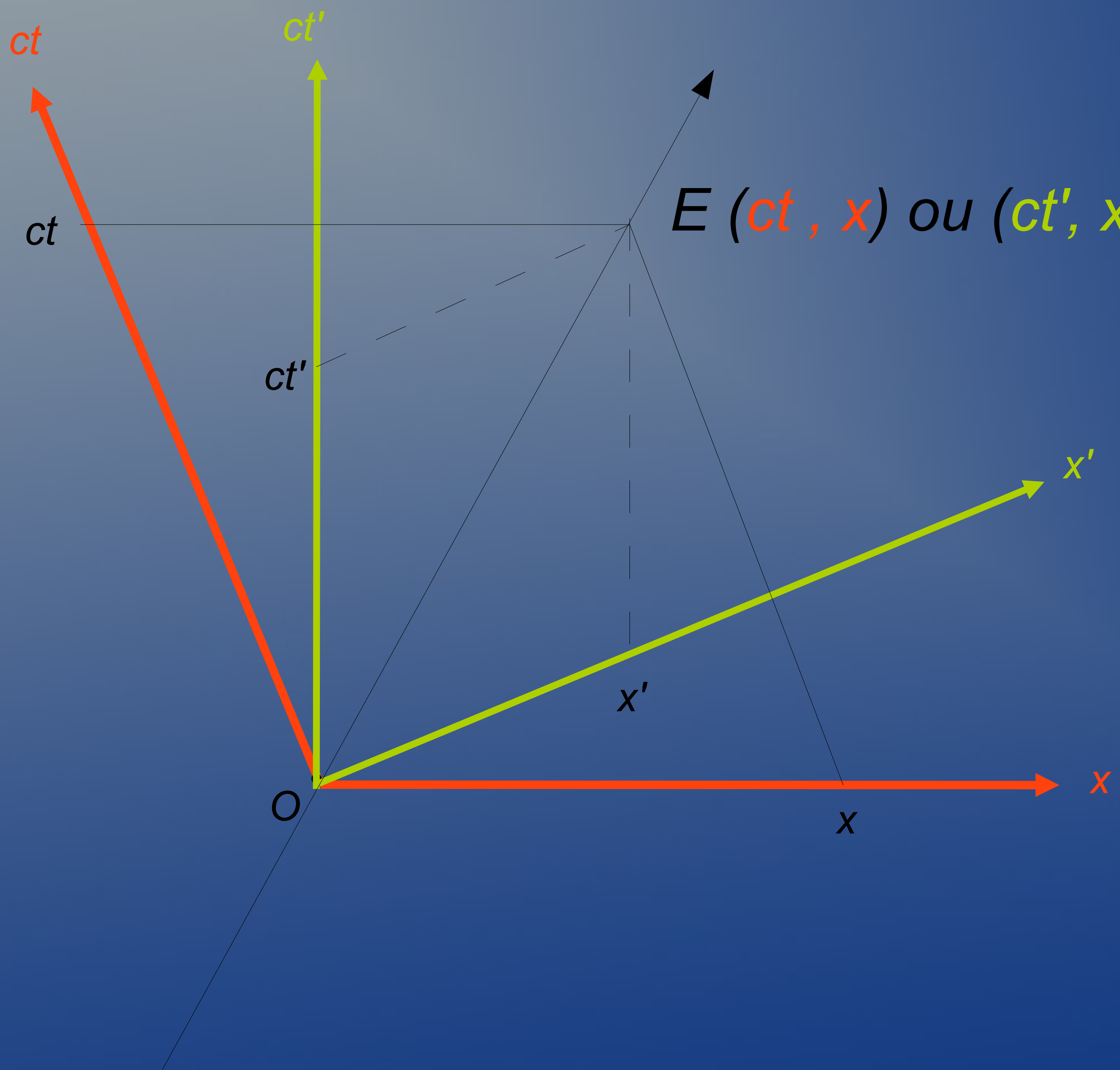
$$\Delta ct = L$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\Delta x}{\Delta ct}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\Delta x}{c \Delta t}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{V}{c}$$

2.2. Constance de la vitesse de la lumière



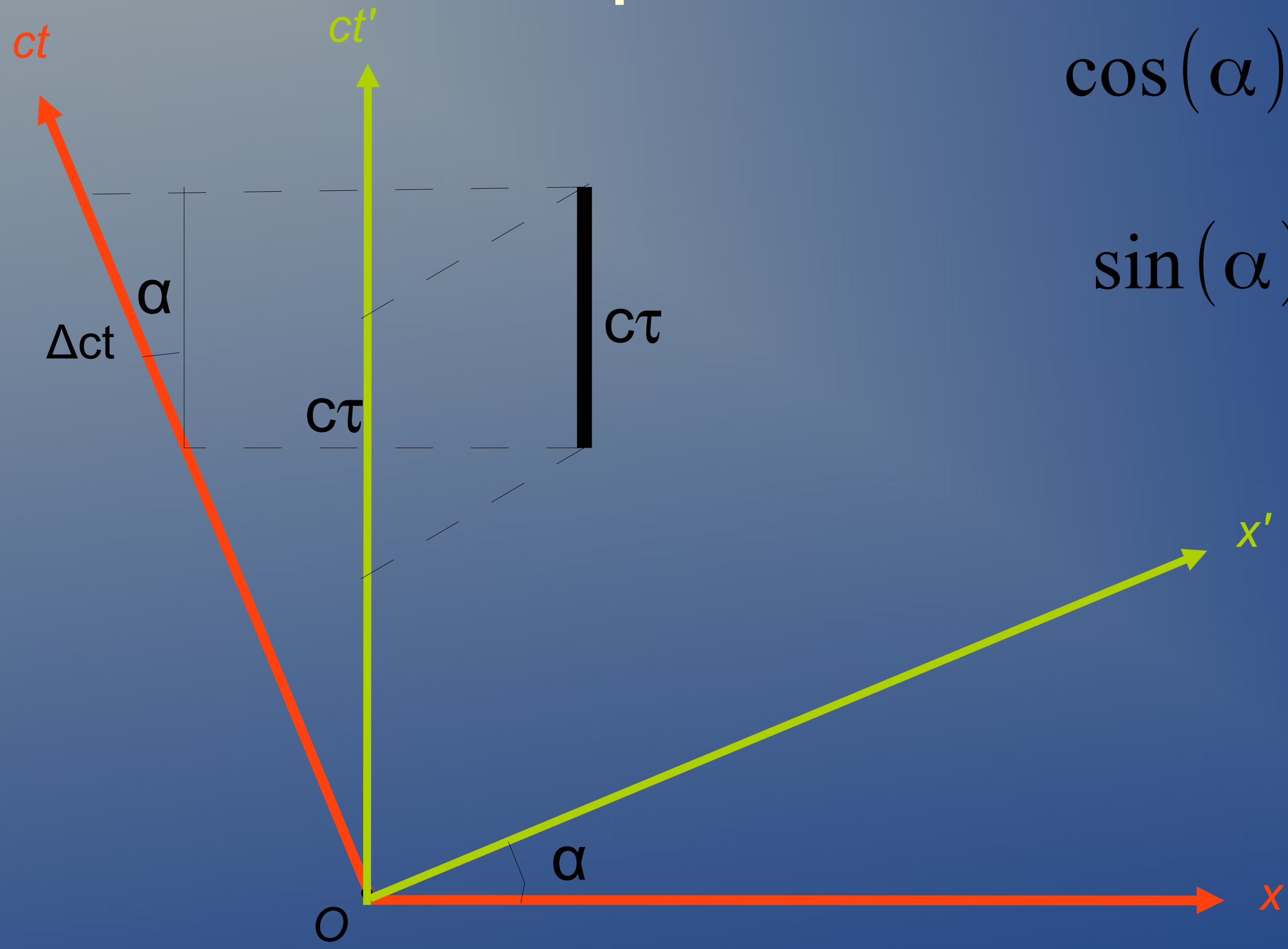
E (ct , x) ou (ct', x')

$$x = ct, x' = ct'$$

$$\frac{x}{t} = \frac{x'}{t'} = c$$

3. Applications

3.1. Temps de vie du muon



$$\cos(\alpha)=\frac{c\,\tau}{c\,\Delta t} \qquad \cos^2(\alpha)=\frac{\tau^2}{\Delta t^2}$$

$$\sin(\alpha)=\frac{V}{c} \qquad \sin^2(\alpha)=\frac{V^2}{c^2}$$

$$\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$$

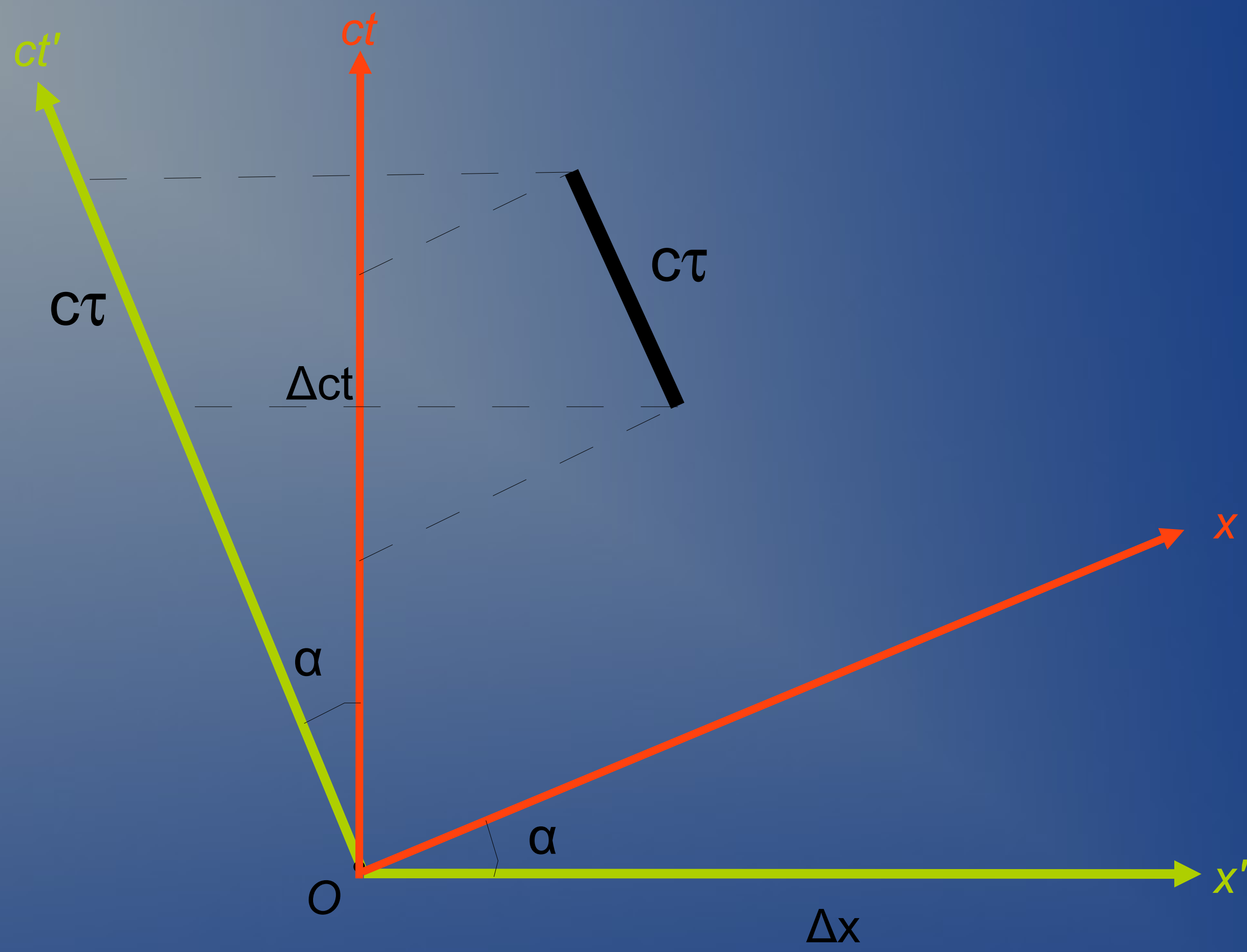
$$1-\sin^2(\alpha)=\cos^2(\alpha)$$

$$1-\sin^2(\alpha)=\cos^2(\alpha)$$

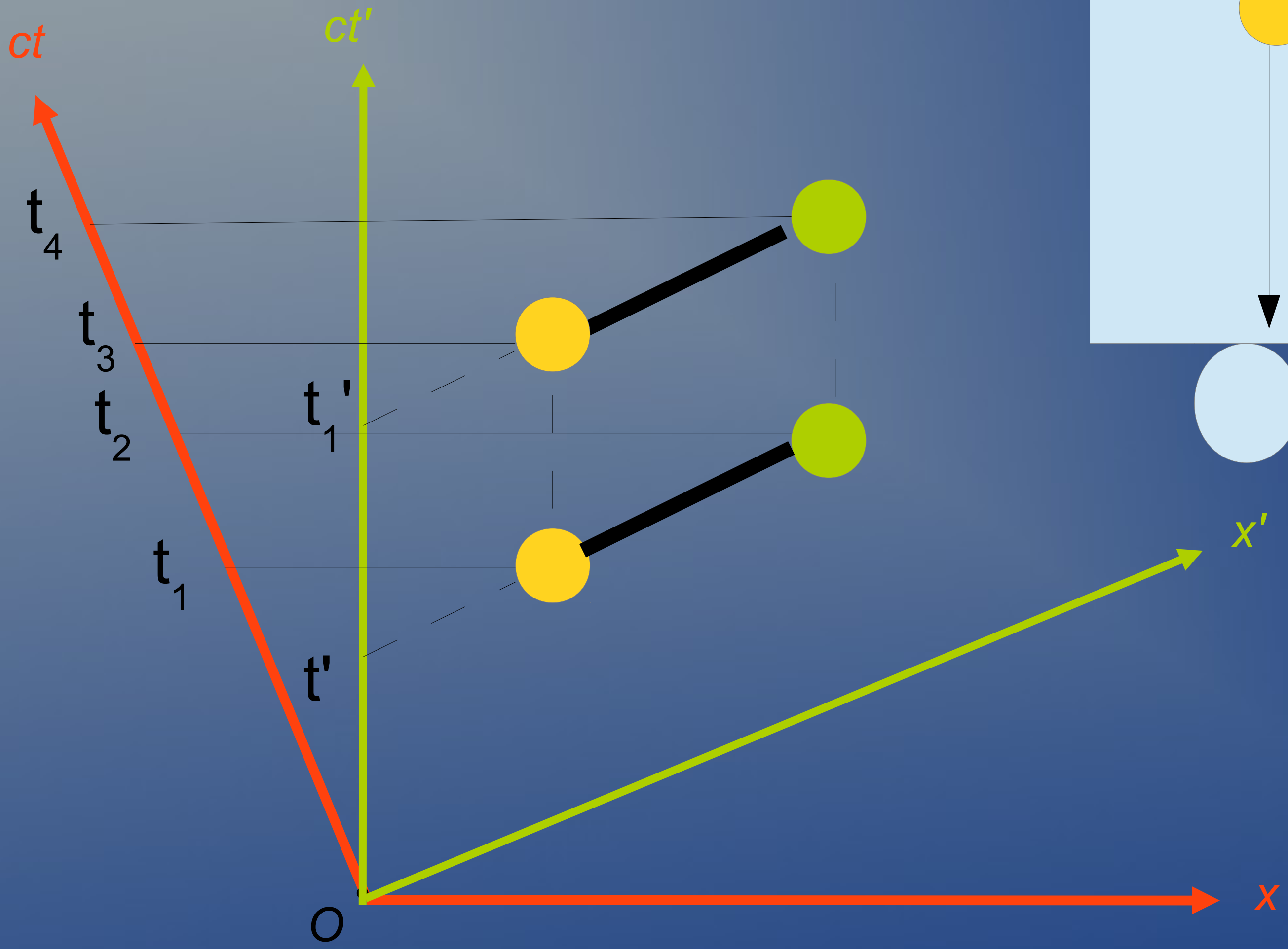
$$1-\frac{V^2}{c^2}=\frac{\tau^2}{\Delta t^2}$$

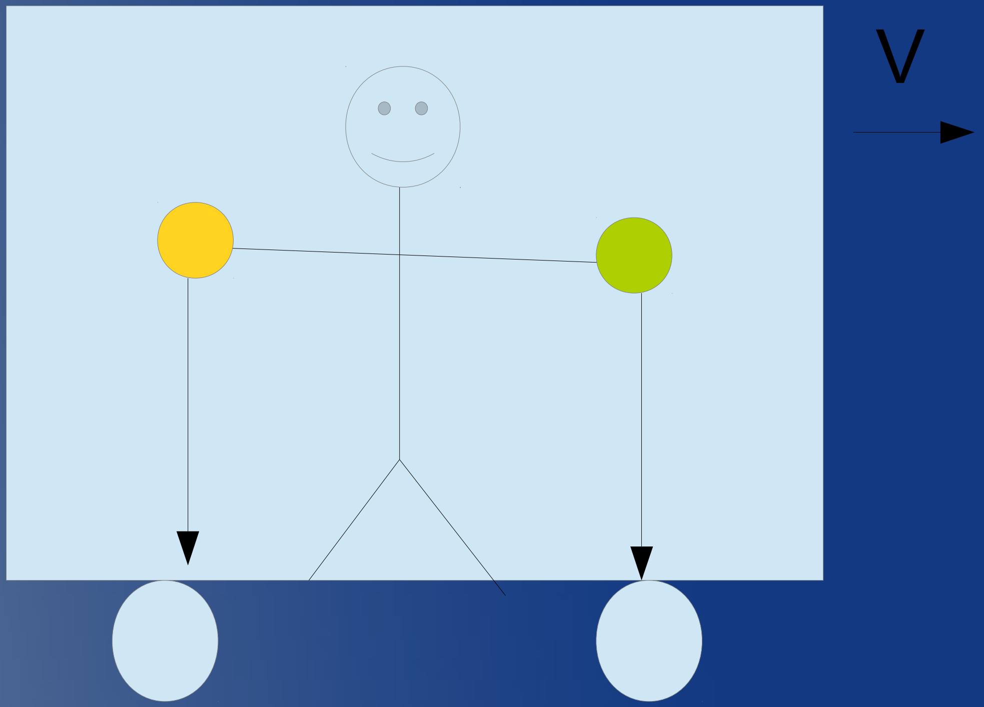
$$\Delta t^2=\frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}\tau^2$$

$$\Delta t=\gamma\,\tau$$

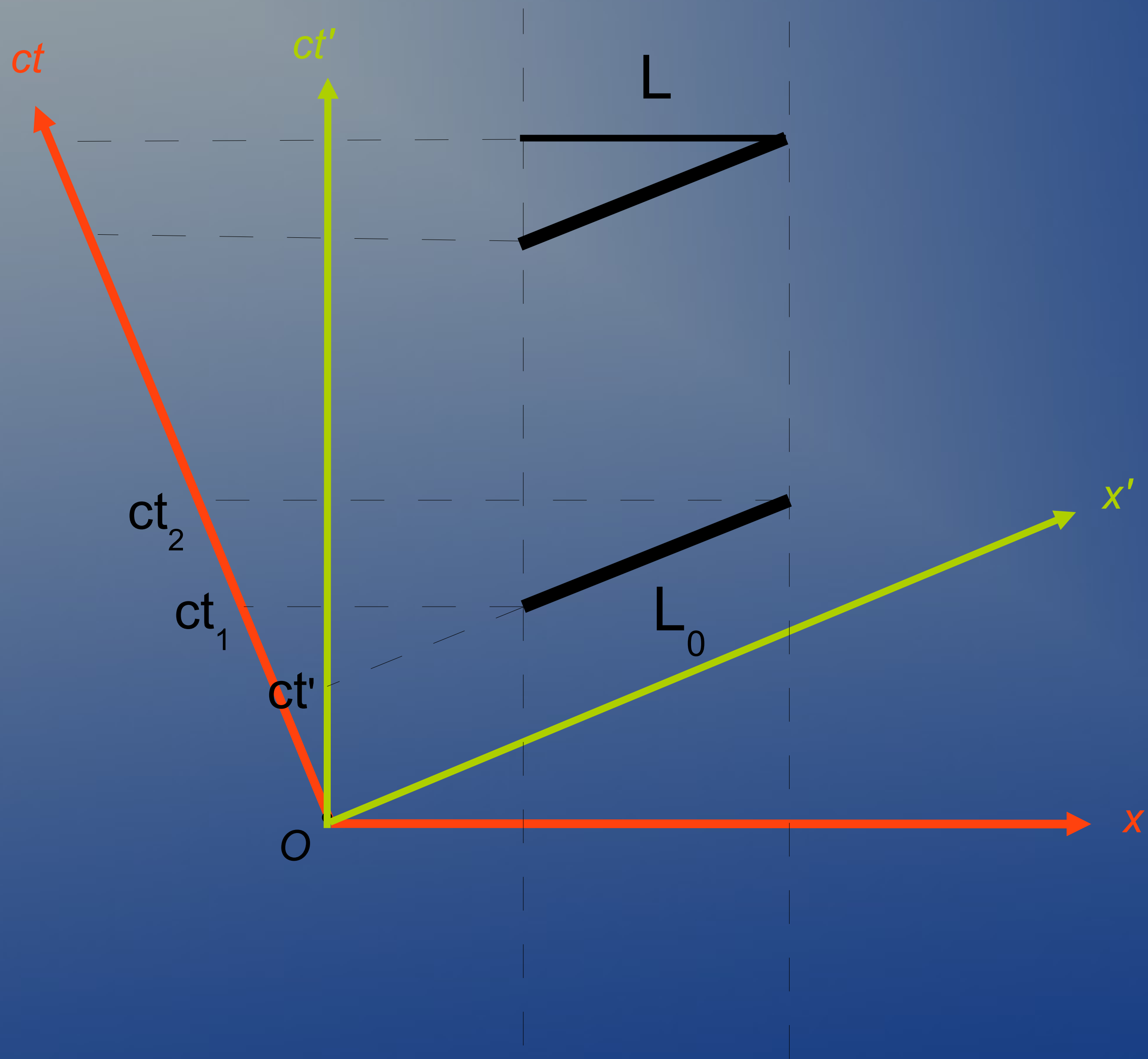

ct'
ct
cτ
cτ
Δct
x
α
α
O
x'
Δx

3.2. Simultanéité





3.3. Dilatation des longueurs



$$L = L_0 \cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}$$

$$\cos(\alpha) = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

$$L = \frac{L_0}{\gamma}$$

- On ne peut pas mesurer directement la longueur L, on est obligé de mesurer le temps qui sépare le passage devant l'observateur de chaque extrémité de la règle

$$c\,\Delta t = L_0 \sin(\alpha)$$

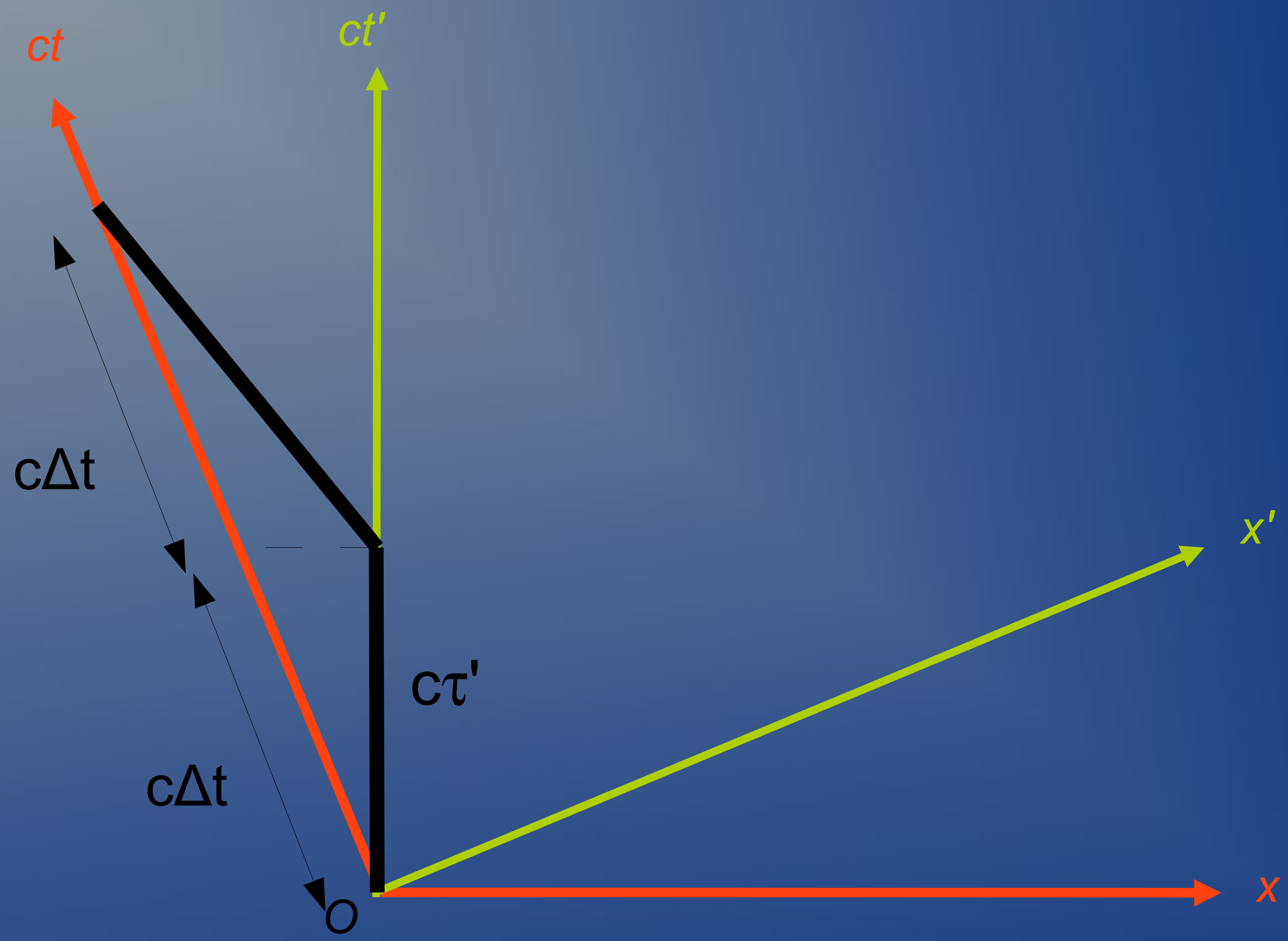
$$c\,\Delta t = L_0 \frac{V}{c}$$

$$c\,\Delta t = \gamma\, L \frac{V}{c}$$

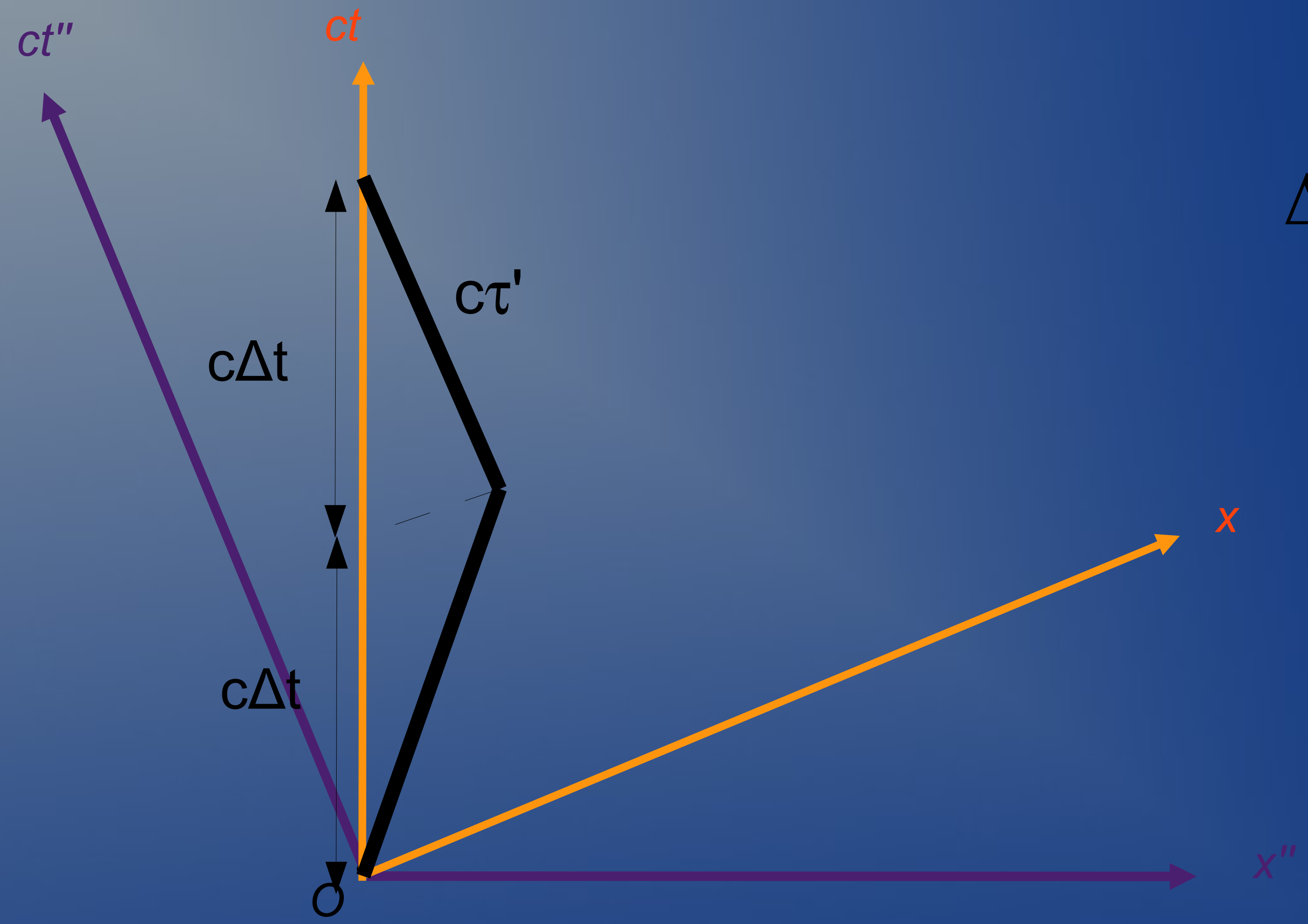
$$c\,\Delta t = \gamma\, L \frac{V}{c}$$

$$L = \frac{c^2 \Delta t}{\gamma\, V}$$

3.4. Paradoxe des jumeaux



$$\Delta t = \gamma \tau'$$



$$\Delta t = \gamma \tau'$$

Résultat des courses ...

$$T_A = 2\tau \qquad T_B = 2\Delta t$$

$$T_B = T_A \gamma$$

Si Solene se déplace à la vitesse d'un muon alors

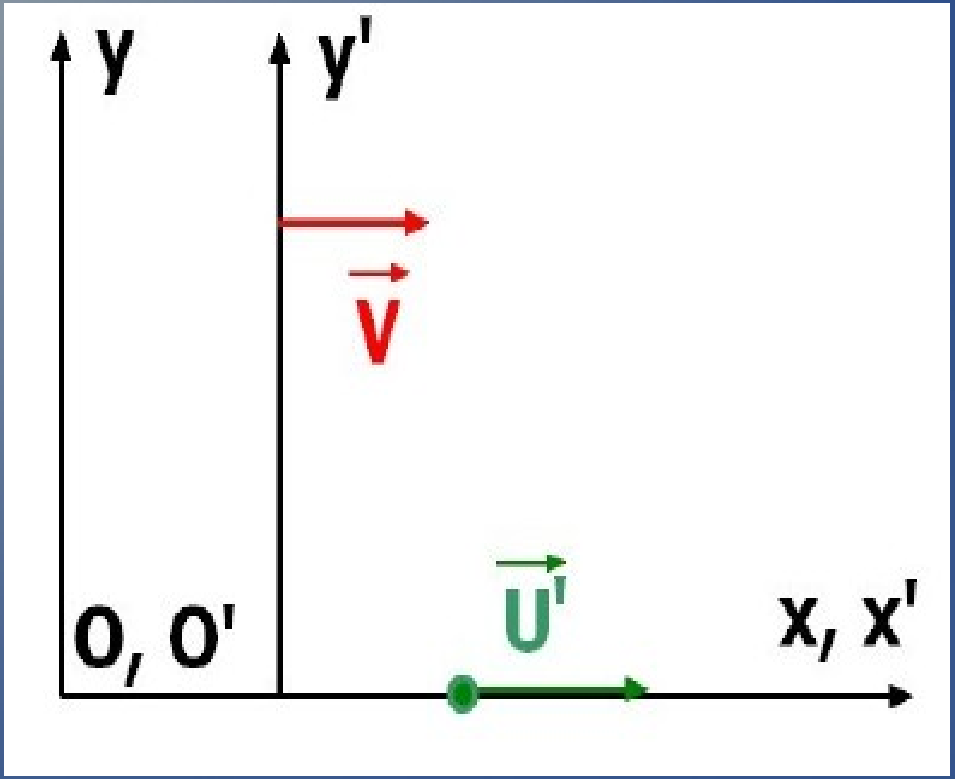
$$\gamma = 10$$

Donc si A fait un voyage de 10 ans aller-retour, elle aura 10 ans de plus et sur la Terre, on est ...

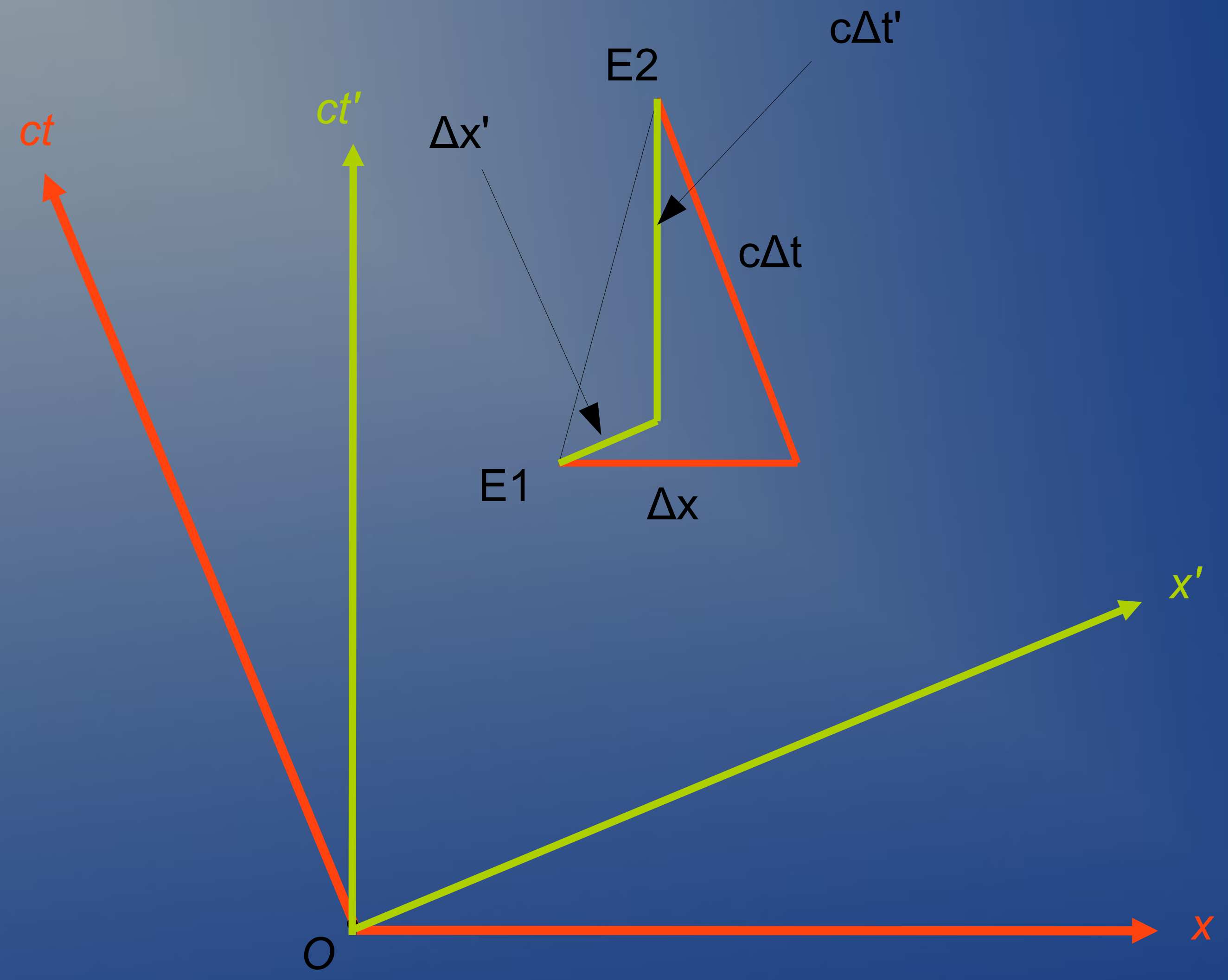
100 ans de plus

4. Pour aller plus loin

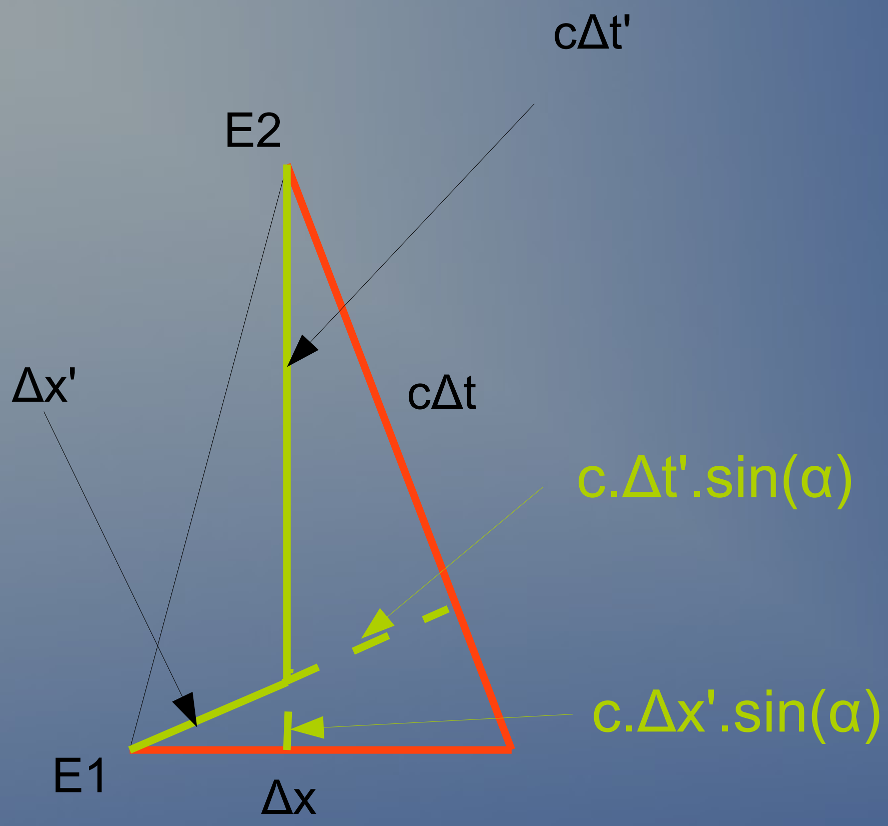
4.1. Composition des vitesses



- On cherche la vitesse U de la particule par rapport au référentiel (R).
- Transformation de Galilée : U = U' + V



ct
ct'
Δx'
E2
cΔt'
cΔt
E1
Δx
x'
O
x



$$\frac{\Delta x}{c\Delta t}=\frac{1}{c}U \qquad \frac{\Delta x'}{c\Delta t'}=\frac{1}{c}U'$$

$$\frac{\Delta x}{c\Delta t}=\frac{\Delta x'+c\Delta t'\sin(\alpha)}{\Delta x'\sin(\alpha)+c\Delta t'}$$

$$\frac{\Delta x}{c\Delta t}=\frac{\frac{\Delta x'}{c\Delta t'}+\sin(\alpha)}{\frac{\Delta x'}{c\Delta t'}\sin(\alpha)+1}$$

$$\frac{U}{c}=\frac{\frac{U'}{c}+\frac{V}{c}}{\frac{U}{c}.\frac{V}{c}+1} \qquad U=\frac{U'+V}{1+\frac{U'V}{c^2}}$$

Bibliographie

Semay C., Silvestre-Brac B., *Relativité restreinte, bases et applications*, Dunod, 2005.

Magnien P., *Théorie de la relativité restreinte : méthode des diagrammes d'espace-temps*, http://acces.ens-lyon.fr/clea/lunap/

Rebetez P., *Relativité restreinte et diagramme d'espace-temps*, http://owl-ge.ch/IMG/pdf/Relativite_restreinte_et_diagrammes_d_espace-temps.pdf

Rogden J.S, Geometric approach to relavistic dynamics, *Am. J. Phys. 40, 1831 (1972)*

Sears F. W, Some applications of the Brehme Diagram, *Am. J. Phys. 31, 269 (1963)*

Brehme R.W., A geometric representation of Galilean and Lorentz transformation, *Am. J. Phys. 30, 489 (1962)*

Brehme R.W., A geometric representation of Galilean and Lorentz transformation, *Am. J. Phys. 30, 489 (1962)*