



Comment estimer une incertitude ? Le cas de l'efficacité

Autrans, 17-21 mai 2010

Jerome Baudot



D'après :

- **Marc Patterno, "Calculating Efficiencies and Their Uncertainties", FERMILAB-TM-2286-CD**
- **Thomas Ullrich & Zangbu Xu, "Treatment of Errors in Efficiency Calculations", arXiv:physics/0701199v1**

■ Processus de sélection

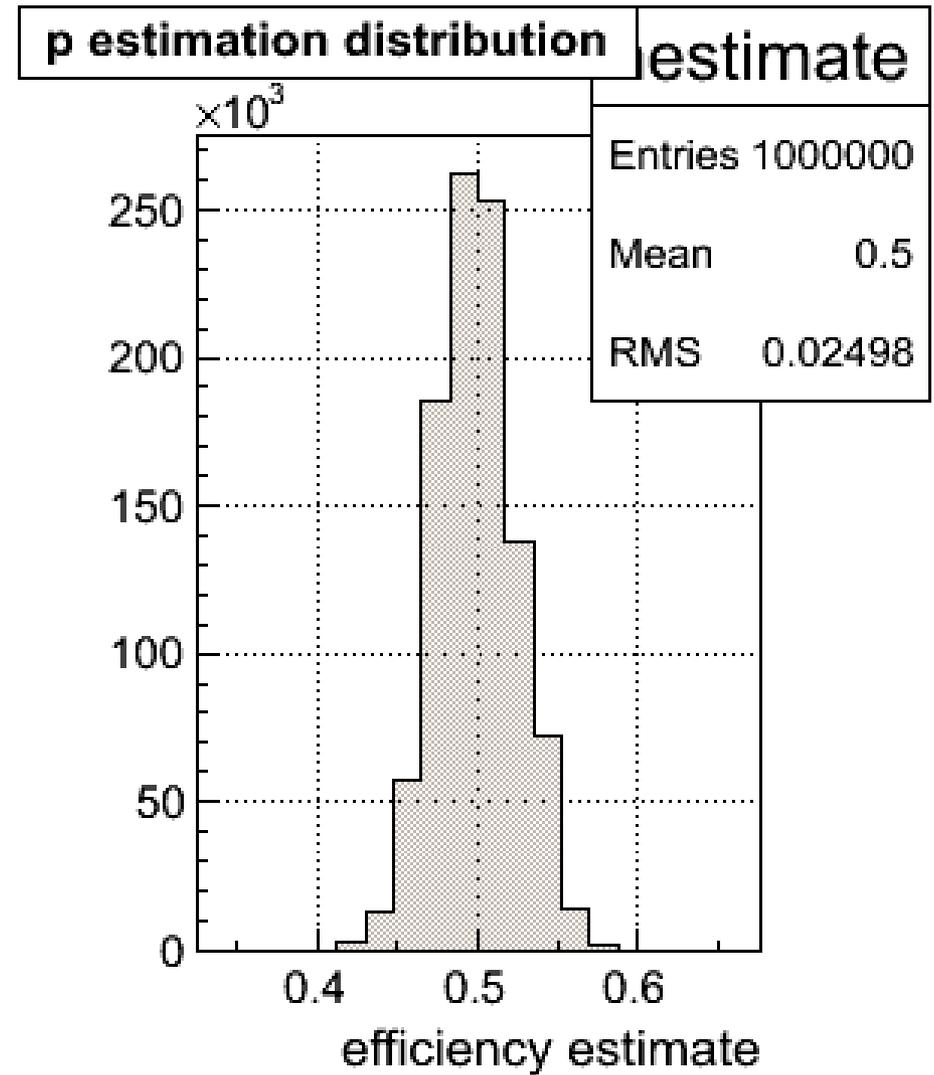
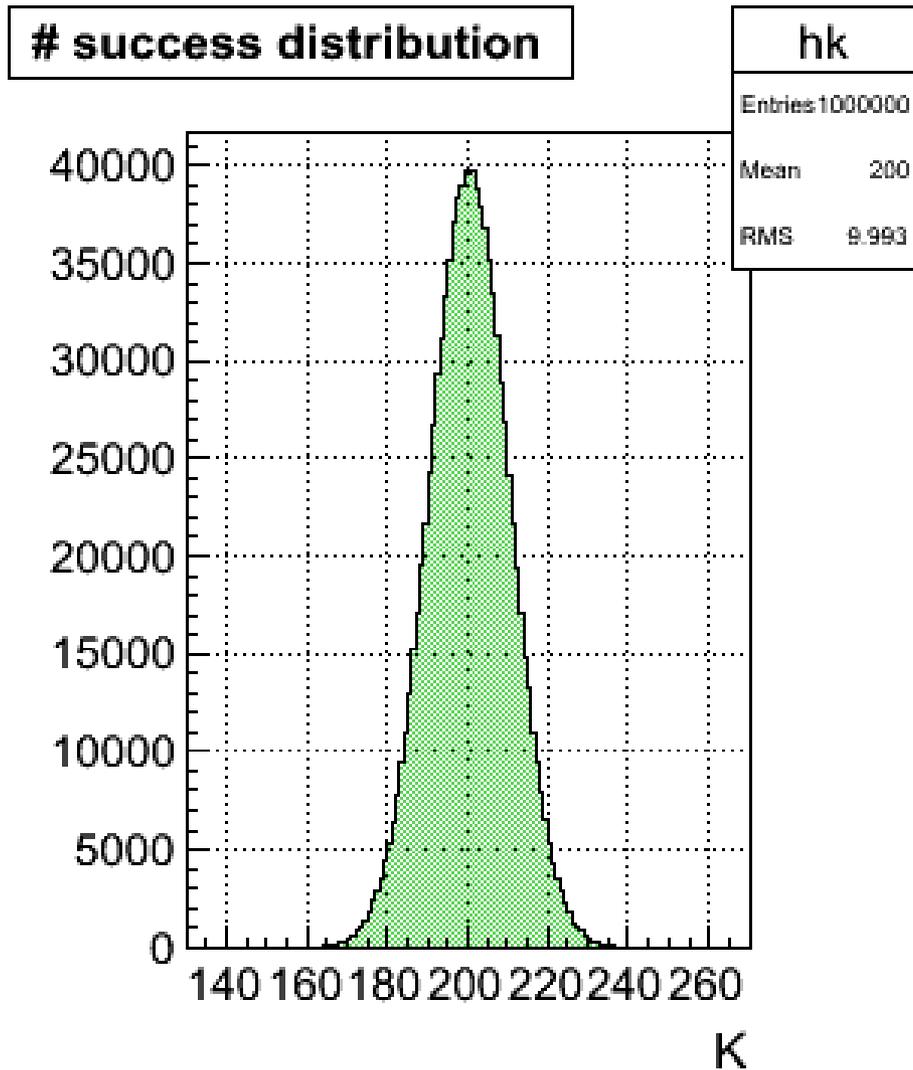
- x Efficacité d'un détecteur, d'un critère de sélection, ...
- x **p** est la probabilité de sélectionner un événement

■ Pour UNE expérience

- x Échantillon initial = N événements
- x Échantillon final = K événements sélectionnés
- x **Quel est un estimateur de p ?**
 - Un estimateur intuitif de p est K/N
- x **Quelle est l'incertitude sur cette estimation ?**
 - Selon la statistique de Poisson : $\sqrt{K / N}$

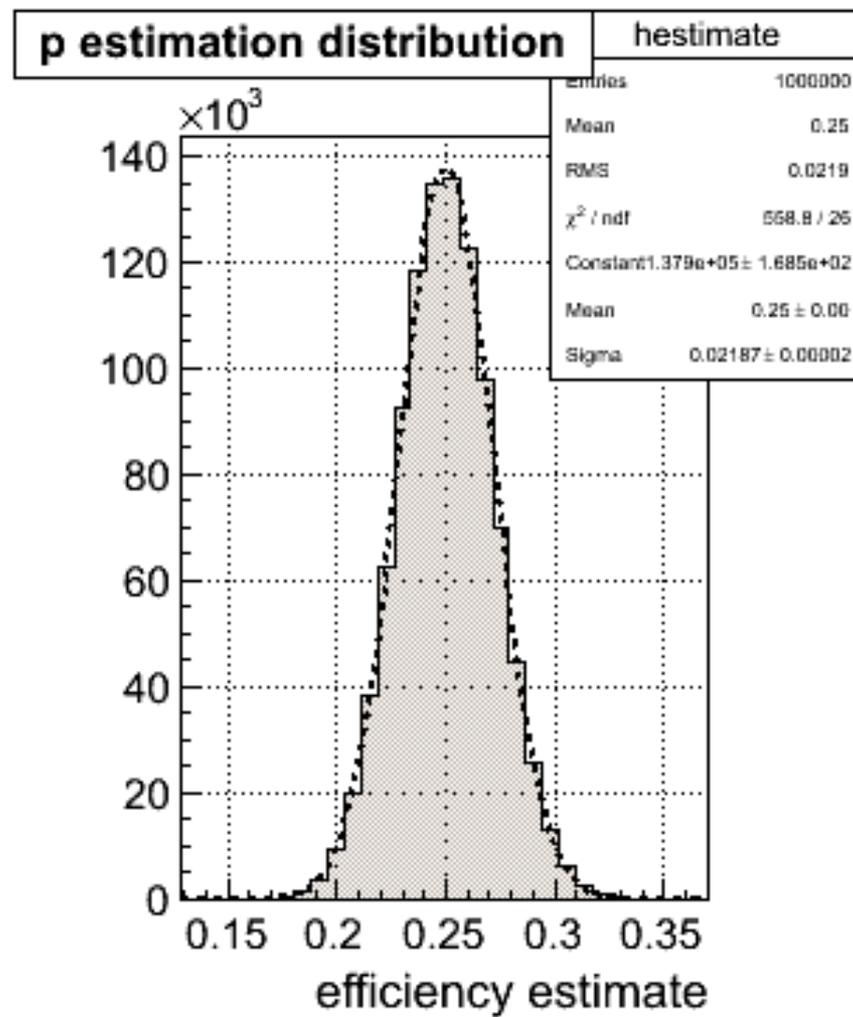
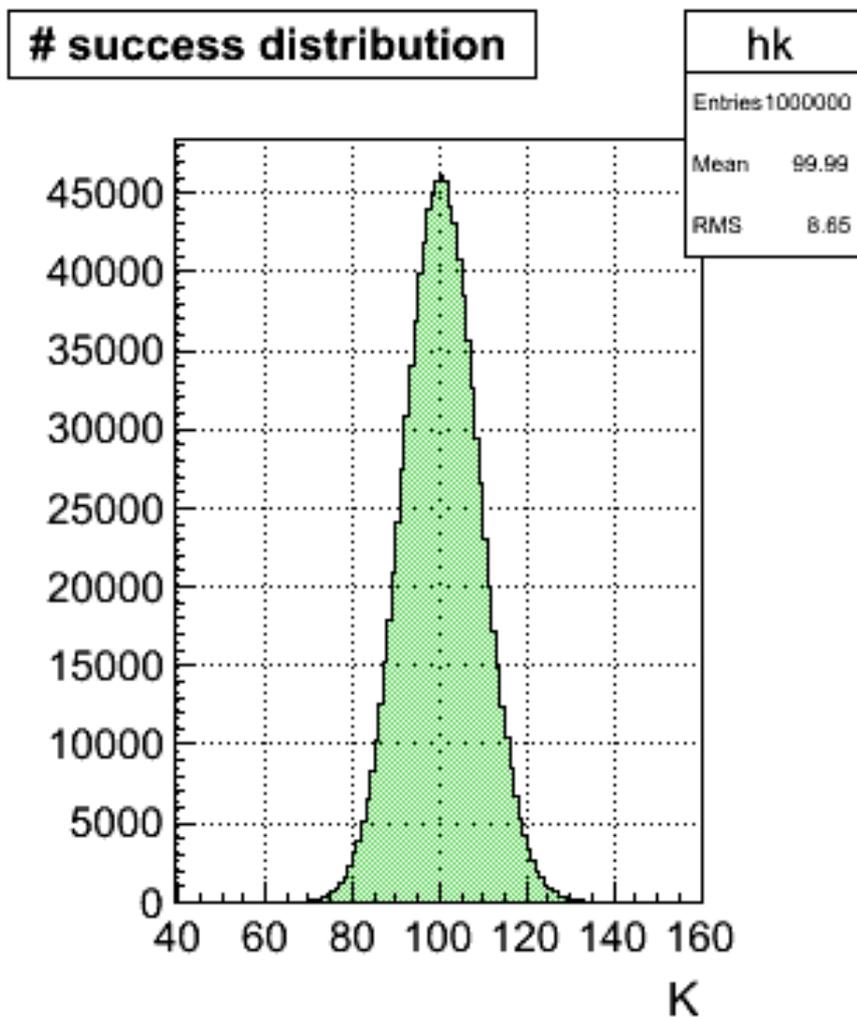
■ Let's go for a Toy MonteCarlo

- x **Simulation de M expériences à p connu**
- x **Pour chaque expérience :**
 - **N tirages de la loi de Bernouilli (0=failed ou 1=success)**
 - **La sommation des 1 donne K**
- x **La distribution de K/N sur les M expériences fourni :**
 - **La moyenne de l'estimateur de p**
 - **L'écart-type de l'estimateur de p = incertitude recherchée ?**
- x **En pratique pour Bernouilli :**
 - **Tirer un nombre u uniforme [0,1]**
 - **Si $u < p$: success**
 - **Si $u > p$: failed**

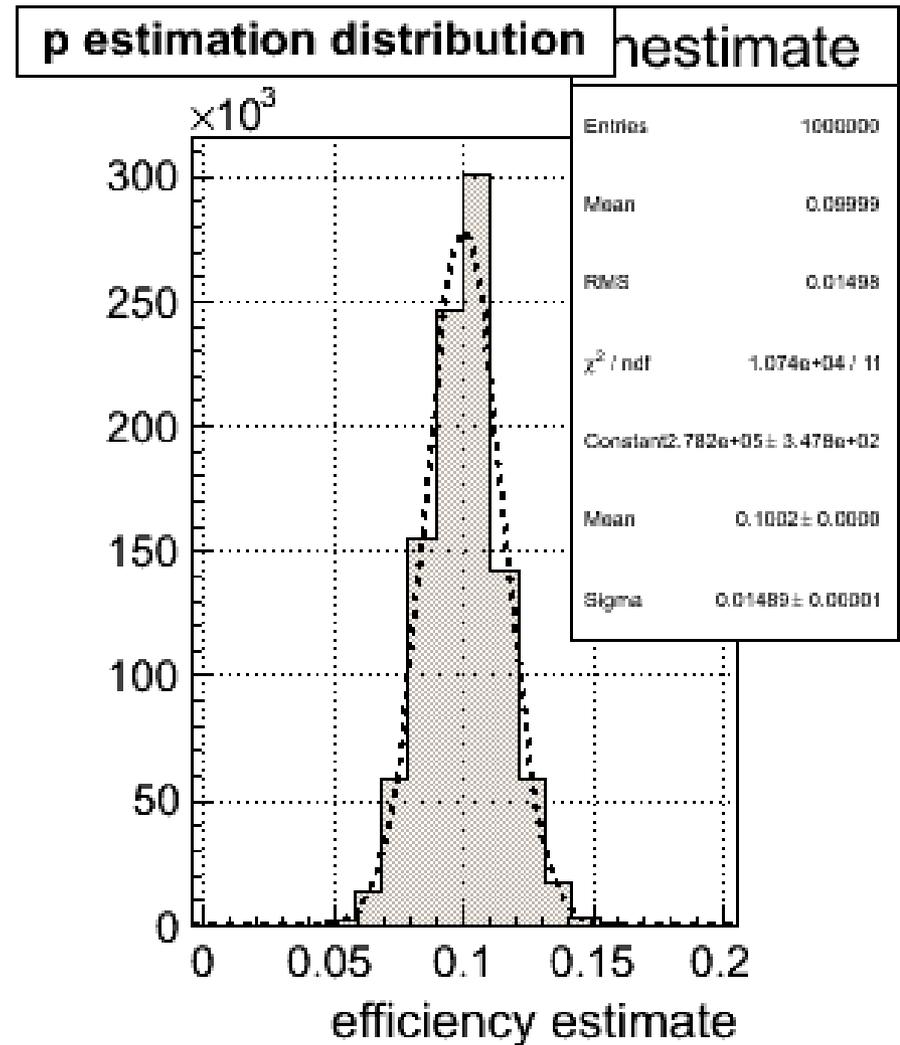
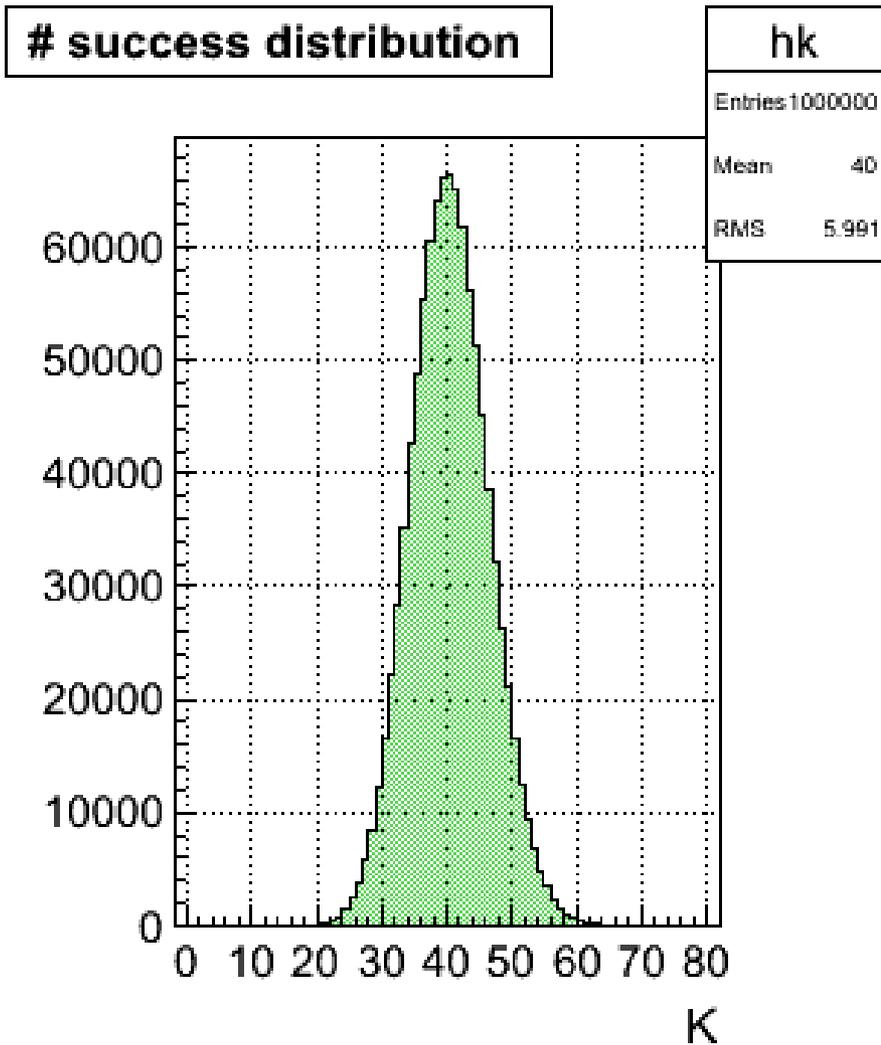


$M=10^6$ expériences de $N=400$ tirages

Macro uncertaintyOnEfficiency_simpleStudy.C



$M=10^6$ expériences de $N=400$ tirages



$M=10^6$ expériences de $N=400$ tirages

■ Incertitude = écart-type de la distribution de l'estimateur

x **K est une variable aléatoire binomiale**

→ **Moyenne Np**

→ **Variance Np(1-p)**

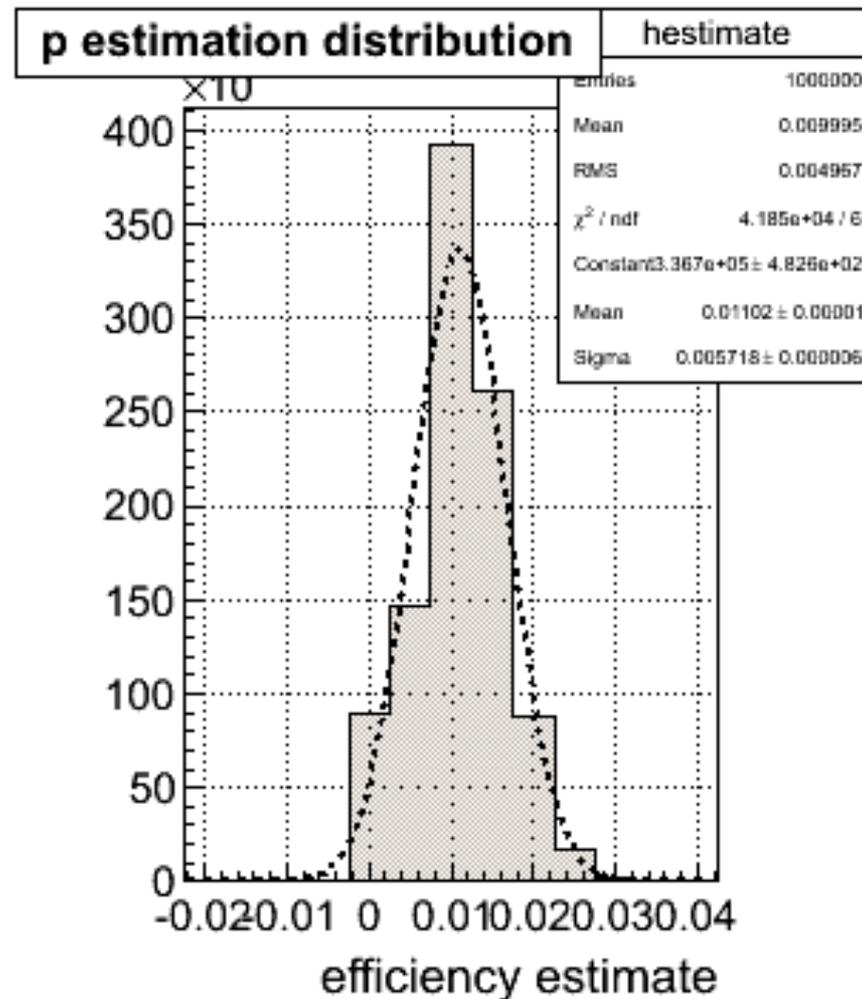
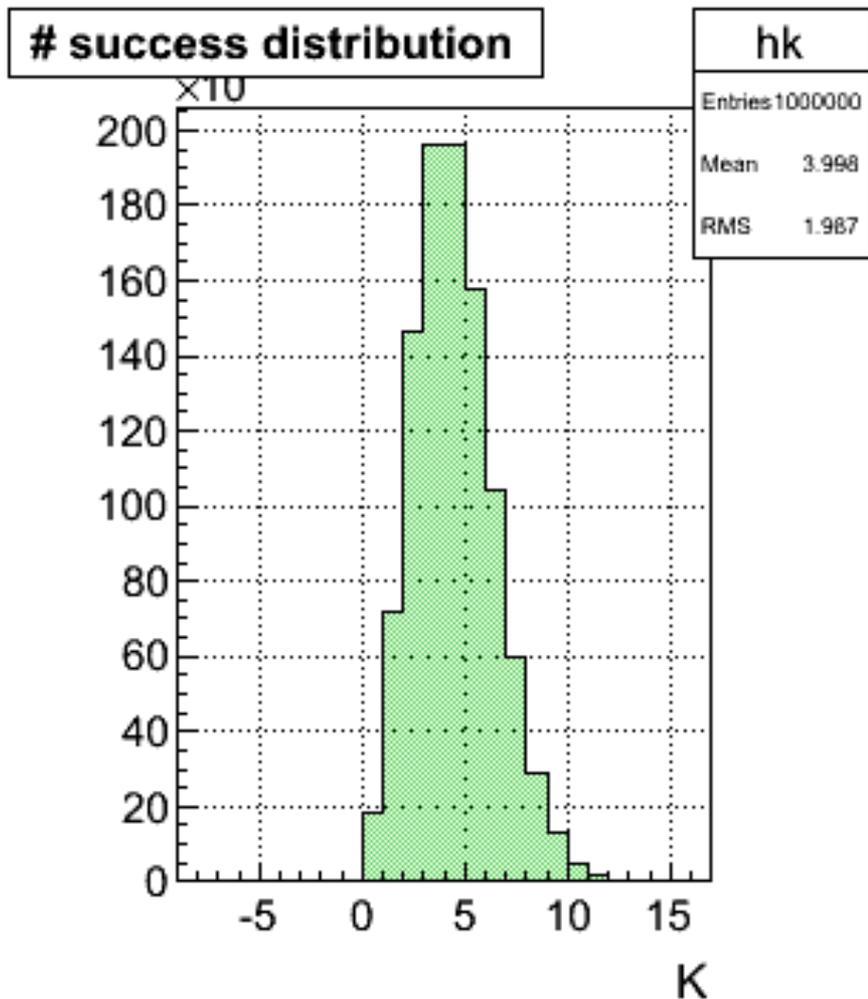
x **Estimateur de p = K/N → variance de p = variance(K)/N²**

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}$$

x **Sur les exemples précédents**

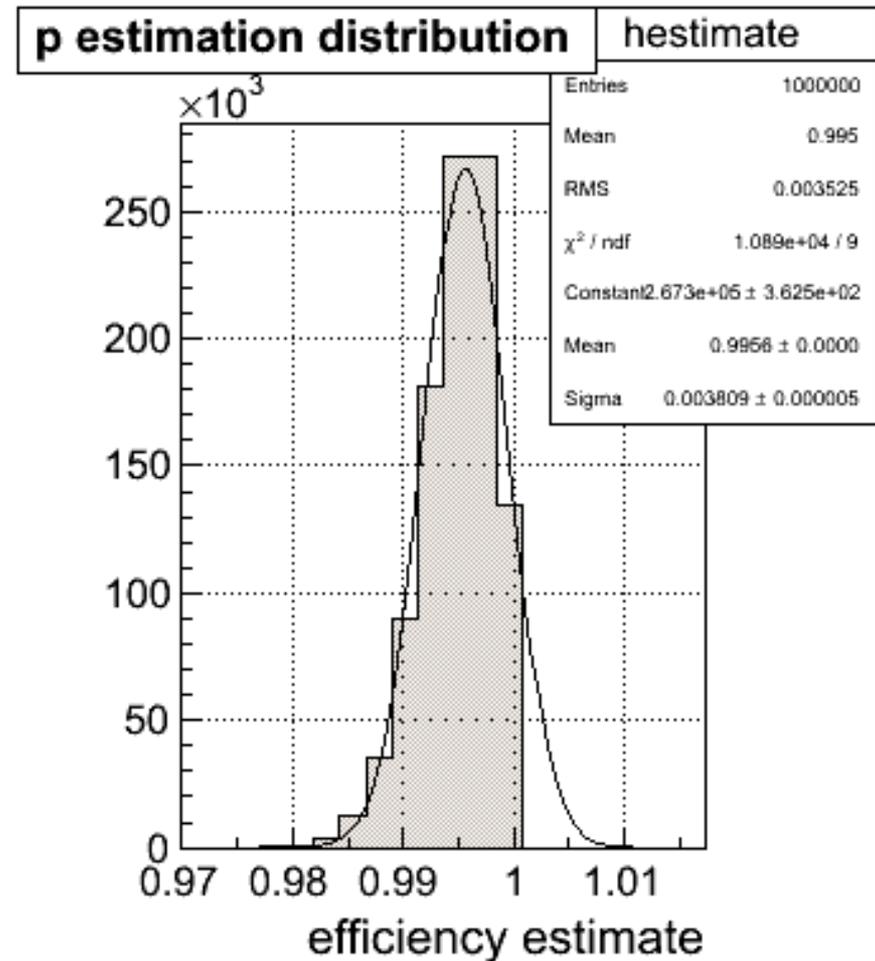
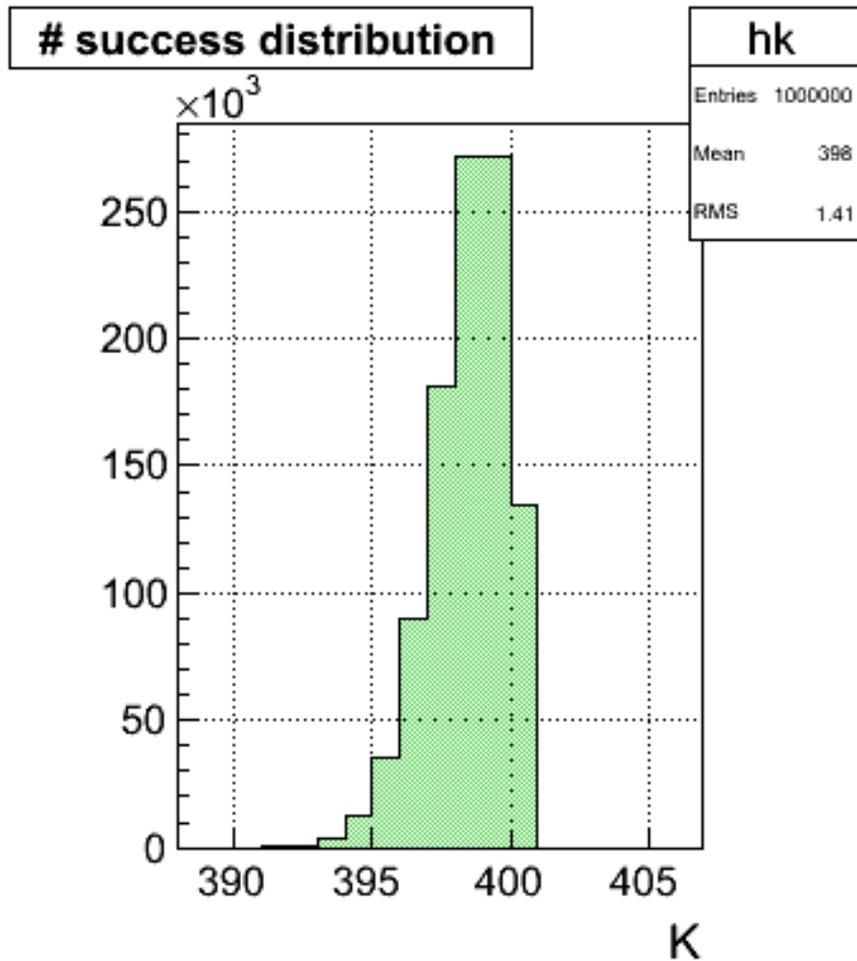
p	RMS histo	$\sigma(p)$
0.5	0.025	0.025
0.25	0.022	0.022
0.1	0.015	0.015

So far, so good...



M=10⁶ expériences de N=400 tirages

Moyenne \neq 0.005
Variance prévue 0.005 !



■ La distribution devient **asymétrique**

- x La moyenne n'est plus le mode (valeur la plus probable)
- x L'erreur est **ridiculement** faible (prévue 0.0035)

■ Cas $p \sim 0$ ou $p \sim 1$

- x Il est possible d'observer $K=0$ ou N sans que $p=0$ ou 1 strictement
- x Formulation avec écart-type de la binomiale prédit dans ces cas :
 - ATTENTION, on utilise l'estimateur de $p=K/N$ dans la formule
 - Incertitude $(1-p)p = 0$???

■ Revenons à la loi Binomiale

- x Pour $p=0$ (ou 1), la seule variable possible de K est 0 (ou N)
- x Il est donc normal que la variance soit nulle

... On n'a rien compris !

■ La réponse que nous avons :

- × Loi binomiale = probabilité que pour **p fixé**, on observe K (à N fixé)
 - Écart-type ~ intervalle dans lequel se situe 68% des K (pour N grand)

■ La bonne question :

- × Pour **K observé fixé**, quelle est la loi de probabilité de p ?
 - Écart-type ~ intervalle dans lequel se situent 68% des p

■ L'hypothèse implicite que nous avons faite :

- × Les deux questions précédentes sont équivalentes
 - Identification de la loi de distribution de l'estimateur de p avec la loi de distribution de la variable K
- × **Aux limites $p=0$, ou 1 cette hypothèse est mise en défaut !**

■ **La solution = probabilité conditionnelle**

x **Probabilité de p sachant que K est observé = $P(p|K)$**

$$P(p|K) = \frac{P(K|p) * P(p)}{Z}$$

x **$P(K|p)$ est la probabilité binomiale, connue**

x **$P(p)$ est une distribution *a priori*, le fameux prior des Bayesiens !**

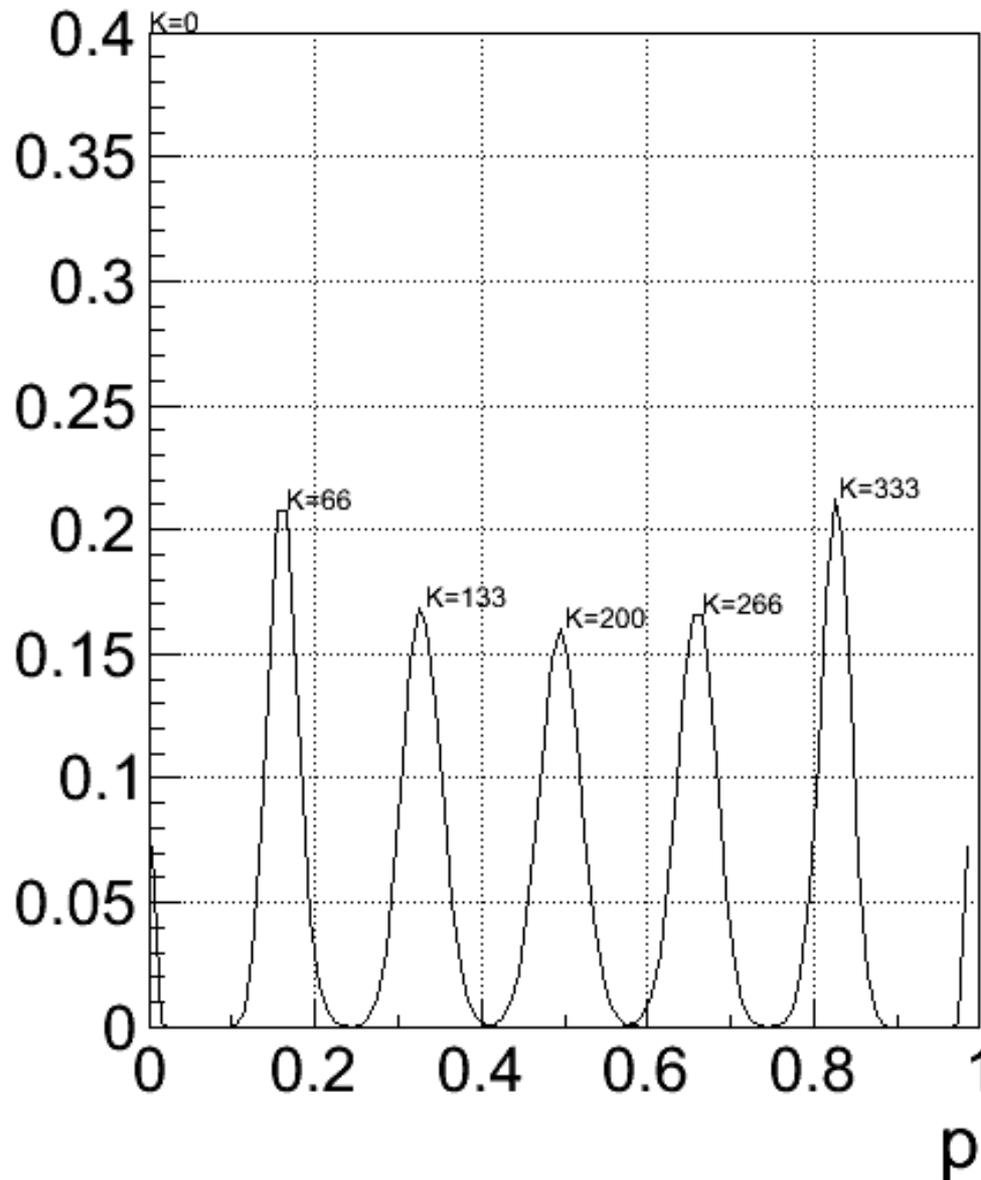
→ **Choix “naturel” $P(p)$ uniforme=1 dans $[0,1]$, nulle ailleurs**

x **Z est une constante de normalisation ($0 < P(p|K) < 1$)**

→ **Vérifie** $1 = \int P(p|K) = \frac{1}{Z} \frac{N!}{K!K-N!} \int p^K (1-p)^{N-K} dp$

$$P(p|K) = \frac{N+1!}{K!K-N!} p^K (1-p)^{N-K}$$

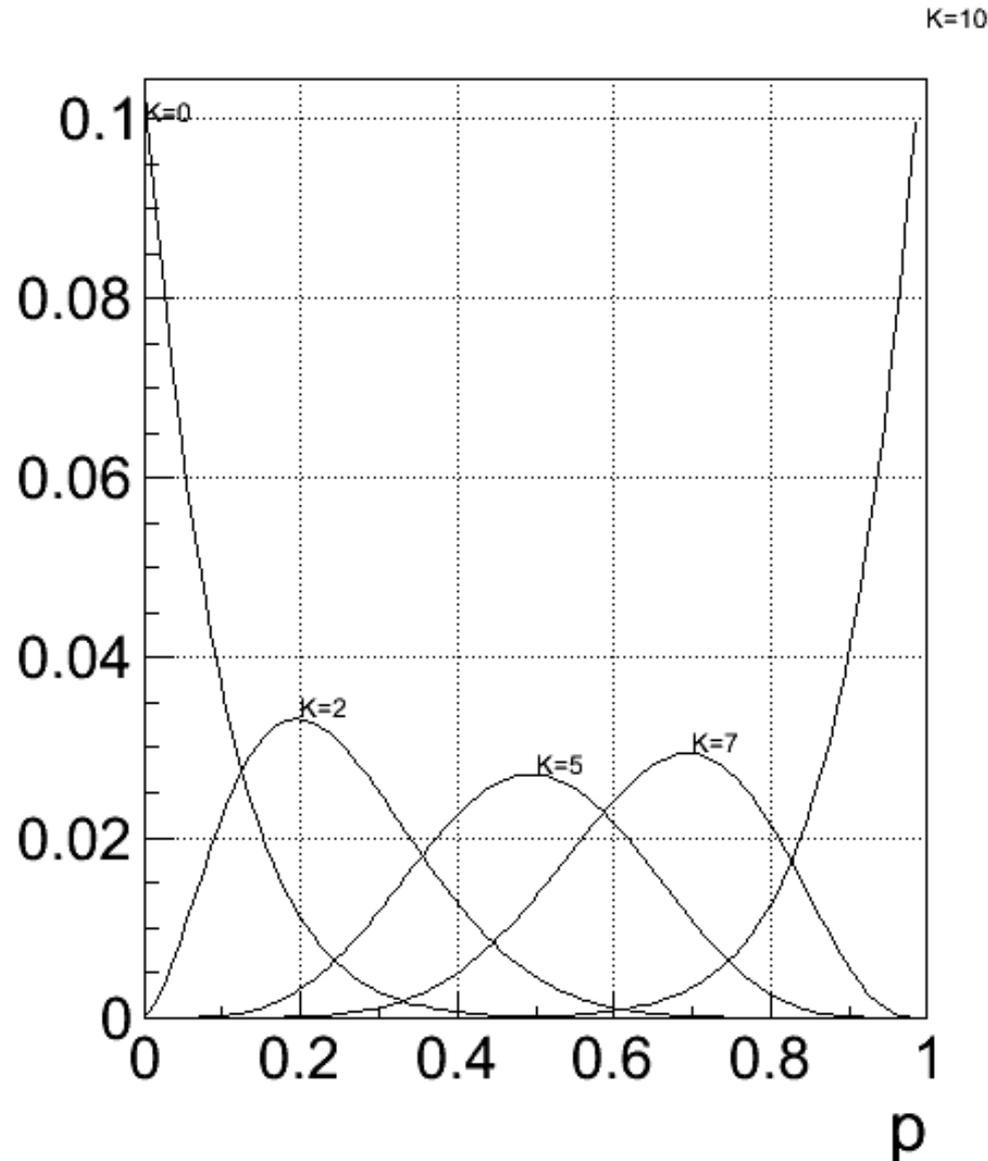
→ **On obtient**



- Pour $N(=400)$ grand, l'asymétrie de la distribution reste peut visible sauf à très petit (grand) K

Macros :

- `distributionEfficiencyFromOccurence.C`
- `distributionOfEfficiency.C`



- Pour $N(=10)$ faible, l'asymétrie de la distribution apparaît rapidement
- Le **mode** vaut K/N
- La **moyenne** vaut $(K+1)/(N+2) \neq \text{mode} !$
- La probabilité est nulle en $p=0$ ou 1 sauf si $K=0$ ou N

■ Méthode 1 : prendre l'écart-type de $P(p|K)$

x Calcul donne :

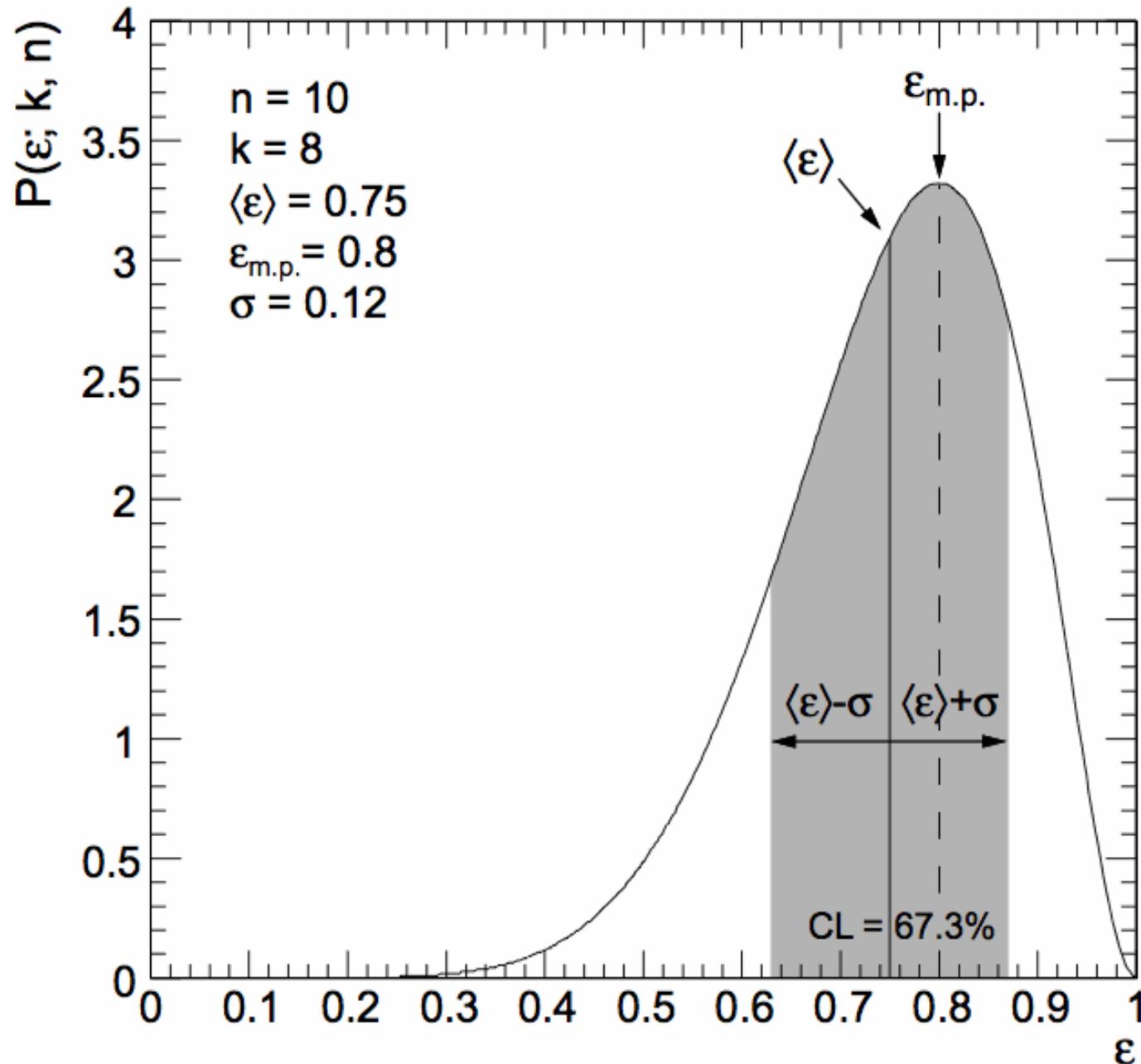
$$\sigma_p = \sqrt{\frac{(K+1)(K+2)}{(N+2)(N+3)} - \frac{(K+1)^2}{(N+2)^2}}$$

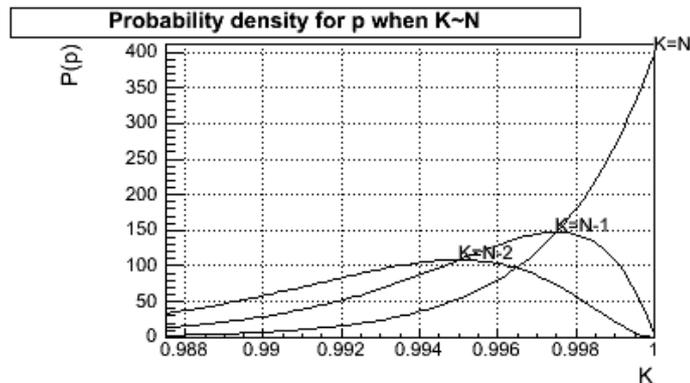
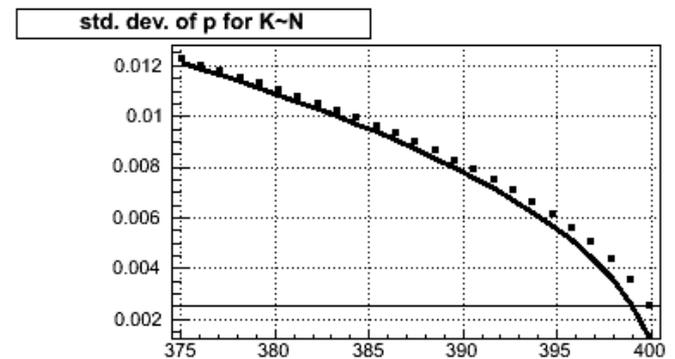
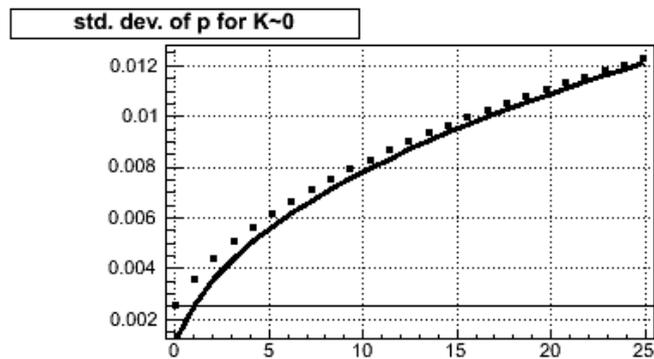
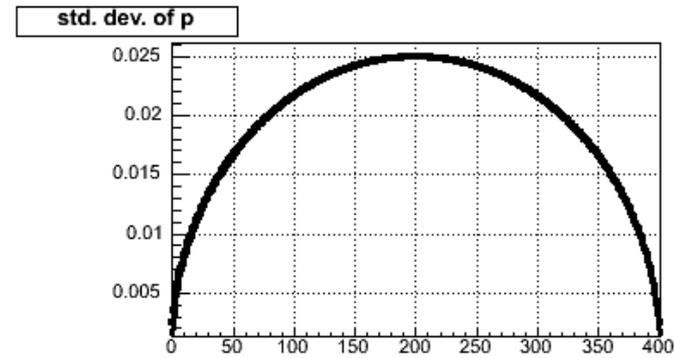
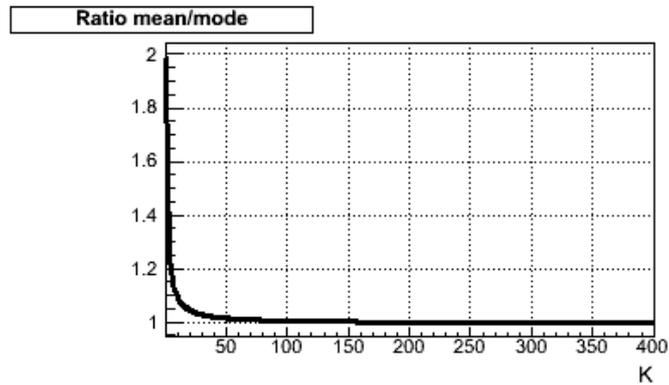
■ Méthode 2 : intervalle avec couverture de 68%

x Méthode numérique proposée par M.Paterno

x Voir la classe `TgraphAsymmError` dans `Root`

Estimation de l'incertitude





N=400 trials

K is the number of success

p is the probability for a success

- full line stands for the estimation:

$$p = K/N$$

$$\text{uncertainty on epsilon} = \sqrt{p(1-p)/N}$$

- Dots stand for the exact p probability distribution:

$$\langle p \rangle = (K+1)/(N+2)$$

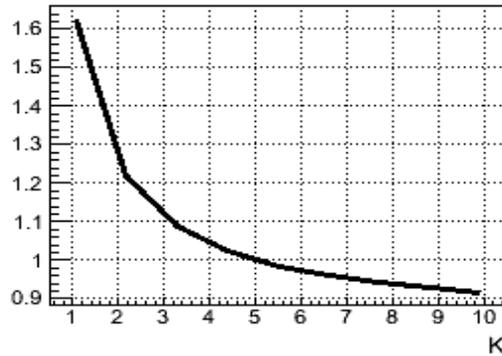
$$\sqrt{\langle p^2 \rangle} = \sqrt{((K+1)(N-K+1)/(N+3)(N+2))^2}$$

- when K=N or 0,

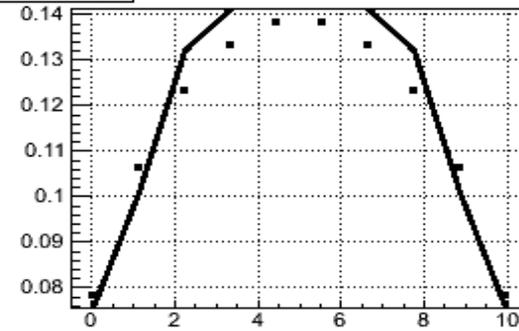
then $\sigma_p = 1/N = \text{Poisson statistics (line)}$

Comparons les incertitudes

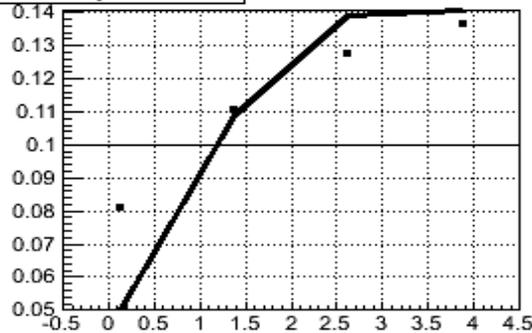
Ratio mean/mode



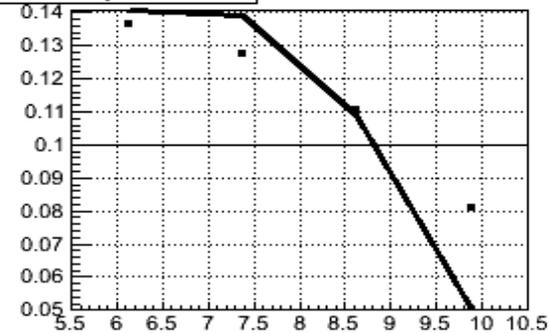
std. dev. of p



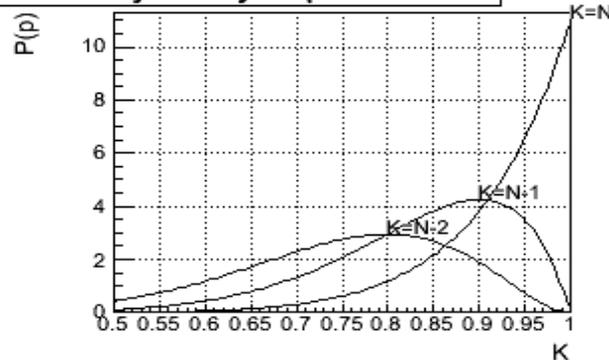
std. dev. of p for K=0



std. dev. of p for K=N



Probability density for p when K=N



N=10 trials

K is the number of success

p is the probability for a success

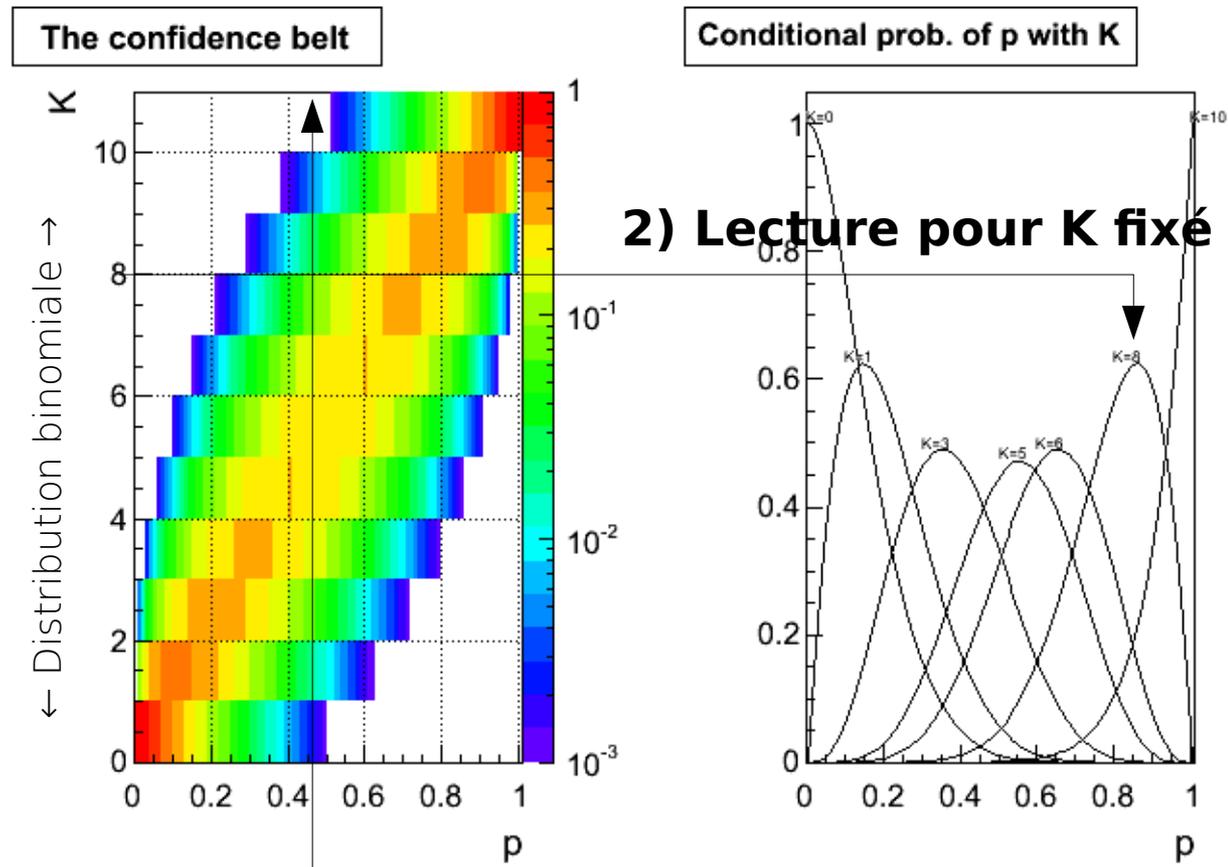
- full line stands for the estimation:
 $p = K/N$
 uncertainty on epsilon = $\sqrt{p(1-p)/N}$

- Dots stand for the exact p probability distribution:
 $\langle p \rangle = (K+1)/(N+2)$
 $\sqrt{\langle p^2 \rangle} = \sqrt{((K+1)(N-K+1)/(N+3)(N+2)^2)}$

- when $K=N$ or 0,
 then $\#sigma_p = 1/N =$ Poisson statistics (line)

■ Inversion graphique

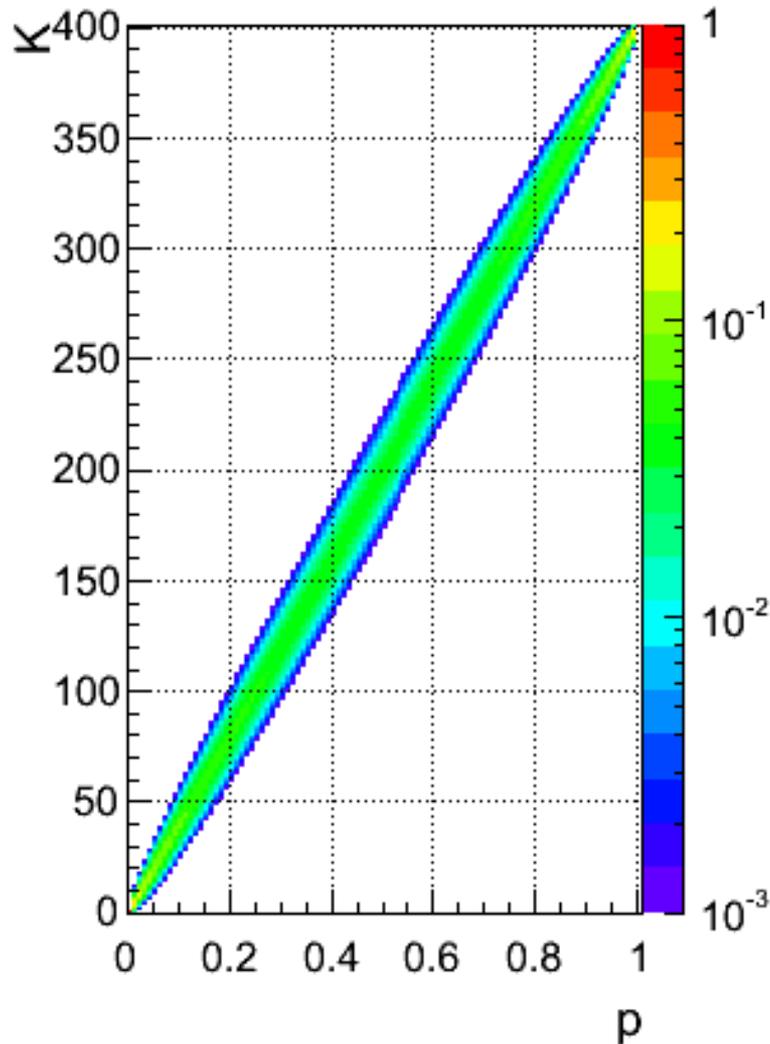
- x De $P(K|p)$ vers $P(p|K)$
- x Macro uncertaintyOnEfficiency_Inversion.C



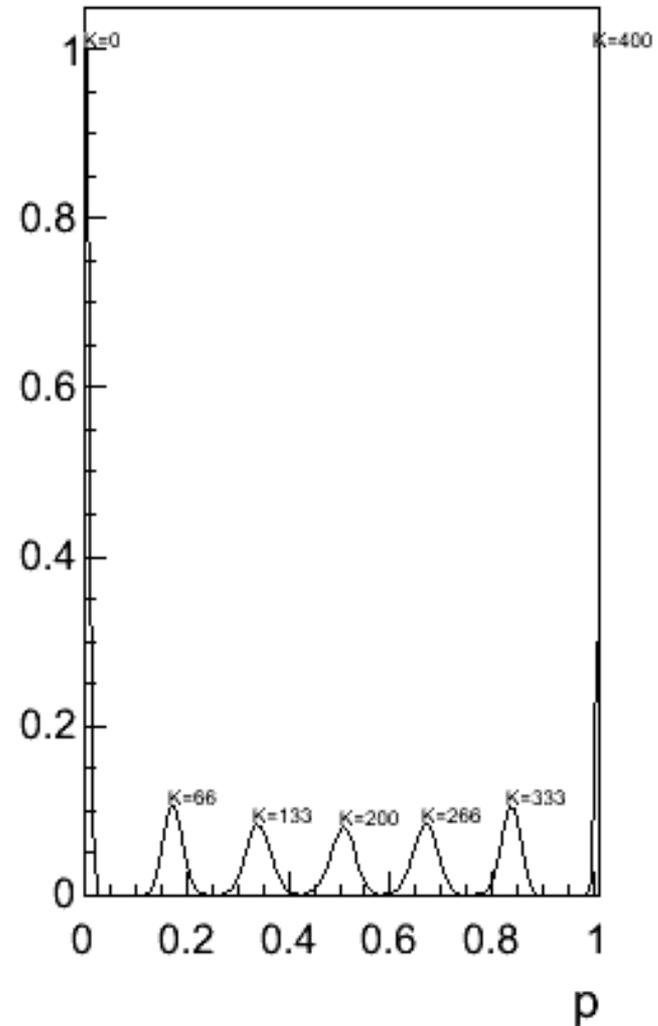
1) Génération à p fixé

$N=400$

The confidence belt



Conditional prob. of p with K



- **Sur le problème de l'incertitude associée à l'estimation de l'efficacité :**

- x **Méthode de la variance binomiale correcte dans la plupart des cas**
- x **Pour les cas limites ($p \sim 0, 1$) faire attention !**

- **En général**

- x **Le point crucial consiste à se poser **la bonne question****