

Trous noirs dans les théories Einstein-Maxwell-Dilaton

Blaise Goutéraux

LPT, Orsay

01.12.2008, JJC08

Outline

- 1 Trous noirs en Relativité Générale
 - Trou noir de Schwarzschild
 - Solution de Reissner-Nordstrom
 - Trous noirs en présence d'une constante cosmologique
- 2 Théories Einstein-Maxwell-Dilaton
 - Motivations
 - Solutions de trous noirs
- 3 Perspectives

Qu'est-ce qu'un trou noir? (1)

Une inspiration pour les musiciens...



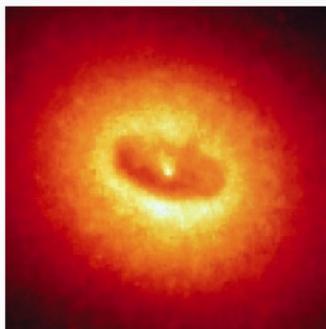
Qu'est-ce qu'un trou noir ? (2)

Une inspiration pour les graphistes...



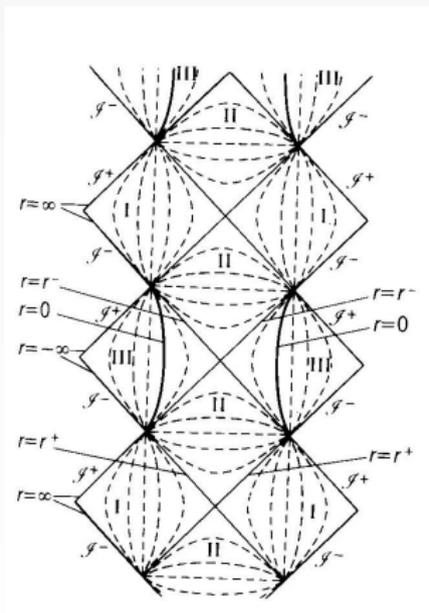
Qu'est-ce qu'un trou noir ? (3)

Un casse-tête pour les physiciens...



Télescope Hubble.

+



=

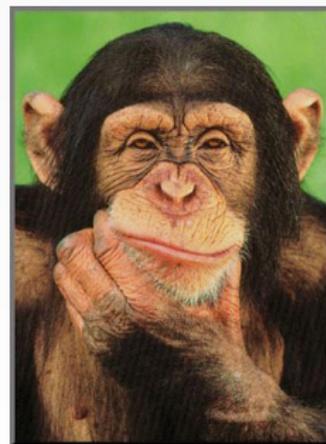


Diagramme de
Penrose-Carter.

- 1 Trous noirs en Relativité Générale
 - Trou noir de Schwarzschild
 - Solution de Reissner-Nordstrom
 - Trous noirs en présence d'une constante cosmologique
- 2 Théories Einstein-Maxwell-Dilaton
 - Motivations
 - Solutions de trous noirs
- 3 Perspectives

Action de la Relativité Générale. Equations du mouvement

- Action (vide) :

$$S_{RG} = \int \sqrt{-g} [\mathcal{R}]$$

- Equations du mouvement :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathcal{R} g_{\mu\nu} = 0$$

- Quasi-linéaires, d'ordre 2.
- Une solution simple : **Minkowski** (vide de la théorie)

$$ds_{\mathcal{M}}^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

- Solutions non-triviales : problème très compliqué.
- Méthode de résolution : **symétries** !

Solutions à symétrie sphérique. Solution de Schwarzschild.

La symétrie la plus simple : **symétrie sphérique** (pas de dépendance angulaire).

$$ds^2 = -e^{\nu(t,r)} dt^2 + e^{\lambda(t,r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

Les équations d'Einstein permettent de déterminer $\nu(t, r)$ et $\lambda(t, r)$:

$$ds_{schw}^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

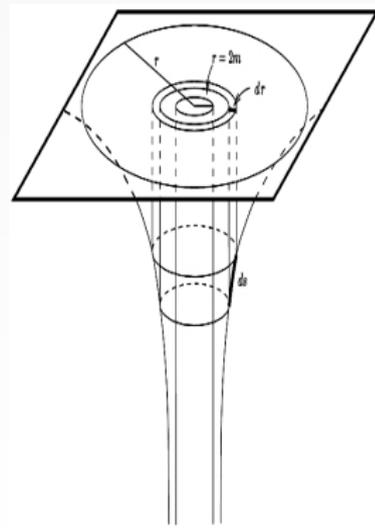


C'est la **solution de Schwarzschild** (1873-1916).

Propriétés de la solution de Schwarzschild

$$ds_{schw}^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

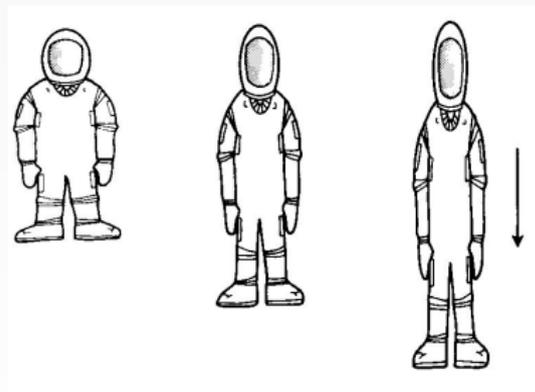
- **Stationnaire** : pas de rotation au cours du temps.
- **Statique** : pas de dépendance en t .
- Conséquence : pas de radiation.
- Deux "singularités" : $r = 0$ et $r = 2M$.
- $r = 0$: masse ponctuelle \sim gravité newtonienne.
- Asymptotiquement **plate** (Minkowski).



Des singularités pas si singulières

Nature de la singularité en $r = 2M$? On "mesure" les forces de marées gravitationnelles \rightarrow tenseur de Riemann : $\mathcal{R}_{\mu\nu\rho\sigma} \sim \frac{M}{r^3}$

- Fini en $r = 2M$, infini en $r = 0$.
- Vérification : invariants scalaires (indépendants du système de coordonnées)
 $\mathcal{K} = \text{Riemann}^2 = \frac{48M}{r^3}$
- **Singularité intrinsèque** en $r = 0$
- **Singularité de coordonnées** en $r_S = 2M$.

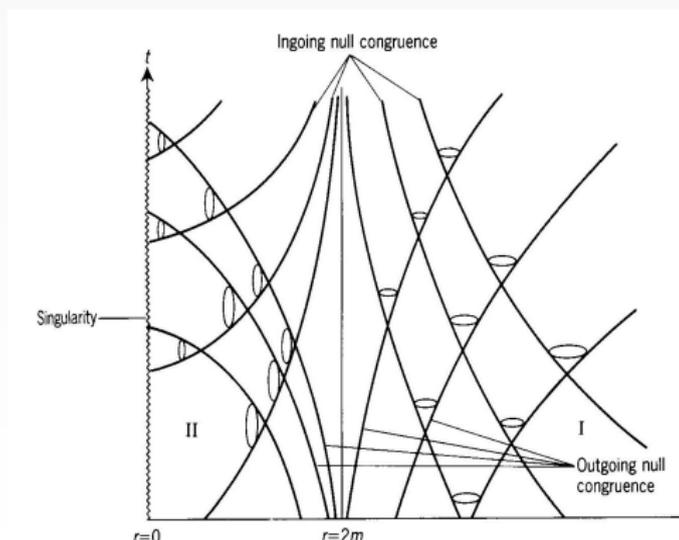


L'horizon de Schwarzschild (1)

$$ds_{schw}^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

En $r_S = 2M$, g_{tt} devient de genre espace, g_{rr} de genre temps :

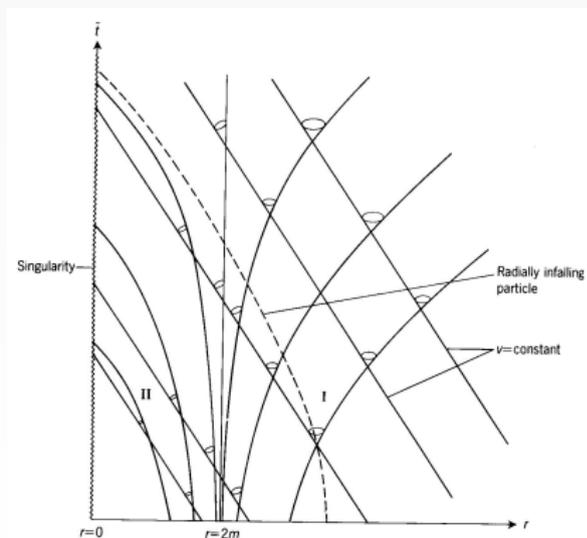
- Région I régulière.
- Région II inaccessible depuis I ! On ne peut pas tomber dans le TN...
- Région II : $v > c$, on tombe dans la singularité.



L'horizon de Schwarzschild (2)

$$ds_{schw}^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

- Coordonnées suivant une particule qui tombe vers le TN.
- On traverse bien l'horizon : TN accessible.
- Rien ne ressort de l'horizon : singularité de genre espace inévitable.



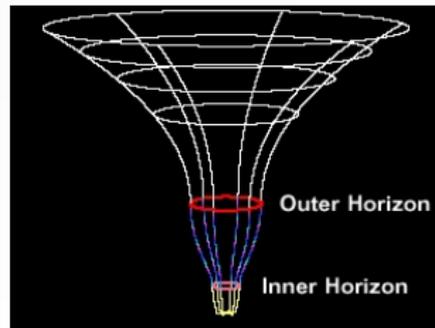
Solution de Reissner-Nordstrom (RN). Propriétés (1)

RN \iff Schwarzschild pour une source ponctuelle $M, Q \neq 0$.

$$S_{EM} = \int \sqrt{-g} \left[\mathcal{R} - \frac{1}{4} \mathcal{F}^2 \right]$$

$$ds_{RN}^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

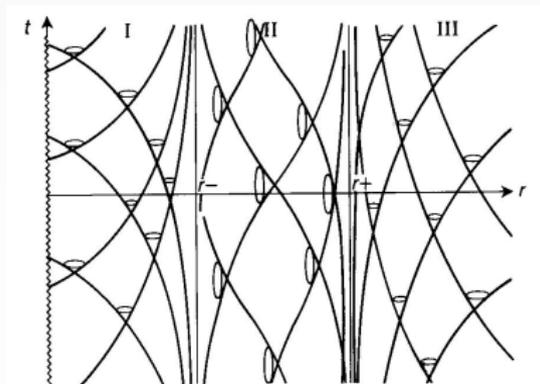
- Si $Q=0$, \longrightarrow Schwarzschild.
- Singularité centrale en $r = 0$.
- Pas d'horizon si $M < Q$.
- Si $M > Q$, **2 horizons!**
- **Asymptotiquement Minkowski.**



Solution de Reissner-Nordstrom (RN). Propriétés (2)

$$ds_{RN}^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

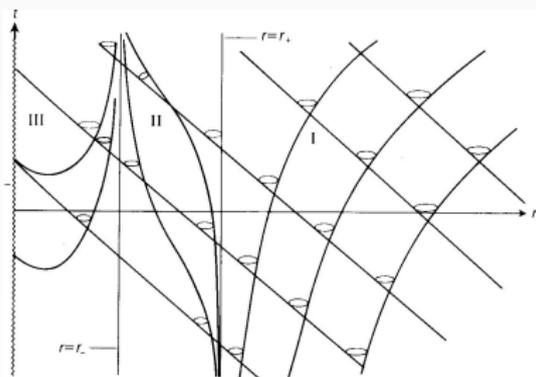
- Région I : espace-temps régulier.
- Région II : attiré par la singularité ($v > c \dots$).
- Région III : **singularité évitable** (genre temps) !
- Observateur à l'extérieur : les horizons ne sont jamais traversés, la particule ne tombe pas dans le TN !



Solution de Reissner-Nordstrom (RN). Propriétés (3)

$$ds_{RN}^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

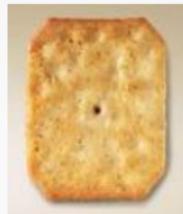
- Coordonnées décrivant une particule tombant dans le TN.
- Région II : atteignable, $v < c$.
- La particule tombe bien dans le TN.
- L'Univers est neutre :
existence des TN chargés ?



Effet de Λ sur le vide de l'espace-temps

Λ contribue à "courber" l'espace-temps. Vides de la théorie :

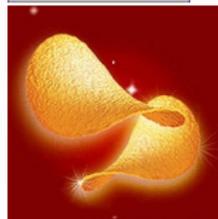
$\Lambda = 0$: plat, Minkowski.



$\Lambda > 0$: courbure positive, de Sitter.



$\Lambda < 0$: courbure négative, anti-de Sitter.



Λ -Schwarzschild solution

$$ds_{\Lambda-Schw}^2 = -\left(\Lambda r^2 + 1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\Lambda r^2 + 1 - \frac{2M}{r}} + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \right)$$

- **Singularité centrale** en $r = 0$.
- "Près" du TN : comme Schwarzschild (**horizon de Schwarzschild**).
- "Loin" du TN : comme dS ou AdS (**horizon cosmologique**). $\implies \Lambda$ crée de la courbure, donc une échelle de longueur pour former un horizon supplémentaire.



- 1 Trous noirs en Relativité Générale
 - Trou noir de Schwarzschild
 - Solution de Reissner-Nordstrom
 - Trous noirs en présence d'une constante cosmologique
- 2 Théories Einstein-Maxwell-Dilaton
 - Motivations
 - Solutions de trous noirs
- 3 Perspectives

Relativité générale en dimension 5 et réduction dimensionnelle.

- Action à 5D :

$$S_5 = \int d^5x \sqrt{-g_5} [\mathcal{R}_5 - 2\Lambda]$$

- Métrique :

$$ds_5^2 = e^{\frac{\Phi}{\sqrt{3}}} ds_4^2 + e^{-2\Phi\sqrt{3}} (dw + A_\nu dx^\nu)^2$$

- Action à 4D :

$$S_4 = \int d^4x \sqrt{-g_4} \left[\mathcal{R}_4 - \frac{1}{2} (\nabla\Phi)^2 - \frac{1}{4} \mathcal{F}^2 e^{\sqrt{3}\Phi} - 2\Lambda e^{-\frac{\Phi}{\sqrt{3}}} \right]$$

- Action utilisée :

$$S_{EMD} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\mathcal{R} - \frac{1}{2} (\nabla\Phi)^2 - \frac{1}{4} \mathcal{F}^2 e^{\gamma\Phi} - 2\Lambda e^{-\delta\Phi} \right]$$

Contenu des théories EMD.

$$S_{EMD} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\mathcal{R} - \frac{1}{2} (\nabla\Phi)^2 - \frac{1}{4} \mathcal{F}^2 e^{\gamma\Phi} - 2\Lambda e^{-\delta\Phi} \right]$$

- Gravitation : relativité générale + constante cosmologique.
- Electromagnétisme.
- Champ scalaire : Dilaton (Dimensions supplémentaires, théorie des cordes, théories tenseur-scalaire).

Propriétés.

$$\Lambda = 0$$

- Asymptotiquement **plates**.
- Deux singularités, un horizon : même structure causale que **Schwarzschild**.
- Dilaton **constant** asymptotiquement, \supset les deux singularités.

$$\Lambda \neq 0$$

- Asymptotiquement **irrégulières** : ni dS, ni AdS.
- Une singularité, deux horizons : même structure causale que **Reissner-Nordstrom** (pas d'horizon cosmologique!).
- Dilaton **divergent** asymptotiquement (pas si grave ?
 $g_S \sim e^{-\Phi}$).
- Masse, charge finies.

- 1 Trous noirs en Relativité Générale
 - Trou noir de Schwarzschild
 - Solution de Reissner-Nordstrom
 - Trous noirs en présence d'une constante cosmologique
- 2 Théories Einstein-Maxwell-Dilaton
 - Motivations
 - Solutions de trous noirs
- 3 Perspectives

Perspectives

- Généralisation en **dimension quelconque**.
- Inclure le **terme de Gauss-Bonnet** (théorie des cordes, théorie de Lovelock), qui peut peut-être régulariser les solutions. Problème : équations extrêmement compliquées, solutions numériques uniquement.

