ELEMENTS de CORRECTION DST 28-2-2014 ENSI

I) POTENTIELS POUR UNE ONDE PLANE

1°) $\vec{E}(\vec{r},t) = -\overrightarrow{grad}\, V(\vec{r},t) - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}(\vec{r},t)$ Par définition

$\vec{B}(\vec{r},t) = \overrightarrow{rot}\, \vec{A}(\vec{r},t)$

Si on écrit $\textcircled{a}\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{grad}\, \chi \\ V' = V - \dfrac{\partial \chi}{\partial t} \end{cases}$ avec $\chi(\vec{r},t)$ $\quad \overrightarrow{rot}\, \vec{A}' = \overrightarrow{rot}\, \vec{A} + \vec{0}$

$\rightarrow \vec{B}' = \vec{B}$

$$\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial (\overrightarrow{grad}\, \chi)}{\partial t} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\, \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{grad}\, V' = \overrightarrow{grad}\, V - \overrightarrow{grad}\, \frac{\partial \chi}{\partial t} \Rightarrow \vec{E}' = -\overrightarrow{grad}\, V' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}\, V + \overrightarrow{grad}\, \frac{\partial \chi}{\partial t} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{grad}\, \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

$$\vec{E}' = \vec{E} \qquad = -\overrightarrow{grad}\, V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}$$

$\Rightarrow$ Tout couple ⓐ issu de $\{\vec{A}, V\}$ conduit à une interaction $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ invariante

$\Rightarrow$ INVARIANCE de JAUGE

2°) $\Delta \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{0}$ (équation de D'Alembert) avec $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$

$\rightarrow$ Solution générale : $\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{f}(\vec{r}.\vec{m} - c.t) + \vec{g}(\vec{r}.\vec{m} + ct)$

ONDE PLANE à 1D $\vec{A}(\alpha,t) = \vec{f}(\alpha - c.t) + \vec{g}(\alpha + ct)$

$$\frac{\partial^2 \vec{A}(\alpha,t)}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}(\alpha,t) = \vec{0} \quad \textcircled{B}$$

On considère une onde progressive. $\vec{A}(\alpha,t) = \vec{f}(\alpha - c.t) = \vec{f}(u)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \cdot}{\partial \alpha} = \dfrac{\partial \cdot}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial \alpha} = \dfrac{d \cdot}{du} \\ \dfrac{\partial \cdot}{\partial t} = \dfrac{\partial \cdot}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial t} = -c.\dfrac{d \cdot}{du} \end{cases}$$

en réécrivant l'équation Ⓑ

car la définition $u = \alpha - c.t$

$$\rightarrow \frac{d^2 \vec{A}}{du^2} - \frac{c^2}{c^2}\frac{d^2 \vec{A}}{du^2} = \vec{0}$$

ont bien vérifiés

| Jauge de Lorentz . A priori $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$

$$\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad \text{avec } \vec{A}(x,t) \equiv \vec{A}(u) \text{ et } V(x,t) \equiv V(u)$$

$$\rightarrow \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \iff \frac{dA_x}{du} - \frac{c}{c^2}\frac{dV}{du} = 0$$

$$\frac{d}{du}\left[A_x - \frac{V}{c}\right] = 0$$

$\rightarrow$ $\boxed{V = c.A_x}$ {à une constante près qui ne concerne pas le régime propagatif}

hamp magnétique.

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{dA_z}{du} \\ \frac{dA_y}{du} \end{pmatrix}$$

hamps électrique.

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{e_x} + c\frac{d\vec{A}}{du} = -\frac{dV}{du}\vec{e_x} + c\frac{d\vec{A}}{du}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{dV}{du} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c\frac{dA_x}{du} \\ c\frac{dA_y}{du} \\ c\frac{dA_z}{du} \end{pmatrix} \quad \text{et } V = c.A_x$$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ c\frac{dA_y}{du} \\ c\frac{dA_z}{du} \end{pmatrix}$$

Si $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ [propagation suivant $\vec{e_x}$] on a bien : $\boxed{\vec{E} = c\vec{B}\wedge\vec{n}}$

STRUCTURE de L'ONDE PLANE

°) On a cette fois $\operatorname{div}\vec{A} = 0$ et $V = 0$ [Jauge de Coulomb]

$\rightarrow \frac{\partial A_x}{\partial x} = 0 \quad A_x = 0$ {à une constante près qui ne concerne pas le régime propagatif} $\rightarrow$ $\vec{A}$ est transverse

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{dA_z}{du} \\ \frac{dA_y}{du} \end{pmatrix} \qquad \vec{E} = \vec{0} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = c\frac{d\vec{A}}{du} = \begin{pmatrix} 0 \\ c\frac{dA_y}{du} \\ c\frac{dA_z}{du} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ on retrouve $\boxed{\vec{E} = c\vec{B}\wedge\vec{n}}$

A PROPOS de L'IDENTITÉ de POYNTING.

1°). Soit une charge ponctuelle q soumise au couple $\{\vec{E}, \vec{B}\}$, le travail de la force (d'interaction) de Lorentz s'écrit (élémentaire pour un déplacement $\vec{dl}$),

$$\delta W = \vec{F_L}.\vec{dl} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).\vec{dl}$$

$$= q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})\,\vec{v}.dt = q.\vec{E}.\vec{v}.dt$$

ce qui conduit à la puissance : $\quad P = \dfrac{\delta W}{dt} = q\vec{E}.\vec{v}$

- Si on considère dN charges contenues dans le volume dV (densité $n = \dfrac{dN}{dV}$)

$$dP = q\,dN\,\vec{E}.\vec{v} = nq\,\vec{E}.\vec{v}.dV$$

$$= \underbrace{nq\vec{v}}_{\vec{j}}.\vec{E}.dV$$

$\vec{j}$ vecteur densité de courant.

{ valeur de q et $\vec{v}$ identiques pour chacune } dans dV
$\downarrow$
Point de vue "Mésoscopique"

$$\boxed{\frac{dP}{dV} = \vec{j}.\vec{E}}$$

2°) On a $\quad \vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad$ multiplions cette équation par $\vec{E}$

$$\vec{E}.\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j}\vec{E} + \varepsilon_0\mu_0\,\vec{E}.\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$= \mu_0\left[\vec{j}.\vec{E} + \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{\partial(\vec{E}^2)}{\partial t}\right]$$

avec la relation $\quad div(\vec{E}\wedge\vec{B}) = \vec{B}\,\vec{rot}\,\vec{E} - \vec{E}.\vec{rot}\,\vec{B} \quad$ on a

$$\vec{B}.\underbrace{\vec{rot}\,\vec{E}}_{-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}} - div(\vec{E}\wedge\vec{B}) = \mu_0\left[\vec{j}.\vec{E} + \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial\vec{E}^2}{\partial t}\right]$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial\vec{B}^2}{\partial t} - div(\vec{E}\wedge\vec{B}) = \mu_0\left[\vec{j}.\vec{E} + \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial\vec{E}^2}{\partial t}\right]$$

soit : $-\operatorname{div}\left(\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\right) = \vec{j}\cdot\vec{E} + \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial \vec{E}^2}{\partial t} + \frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial \vec{B}^2}{\partial t}$

$\rightarrow \quad -\operatorname{div}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Vecteur de Poynting}}}{\vec{R}} = \vec{j}\cdot\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\Big[\underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2}_{U_{em}\ \text{Densité volumique d'énergie E.M}}\Big]$

$\rightarrow$ $\operatorname{div}\vec{R} + \frac{\partial U_{em}}{\partial t} = \underbrace{-\vec{j}\cdot\vec{E}}_{\text{Echange champ E-M/particules}}$ $\leftrightarrow$ équation de continuité locale avec terme de source/perte pour l'énergie électromagnétique

$\vec{R} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$

3°) $\vec{E} = E_x(z,t)\vec{e_x} + E_y(z,t)\vec{e_y}$

comme on a une onde <u>plane</u>, on peut appliquer le formalisme afférent :

$\hat{n} \equiv \vec{e_z}$ (propagation suivant Oz)

$\rightarrow \quad c\vec{B} = \vec{e_z}\wedge\vec{E}$

$\vec{B} = B_x e_x + B_y e_z$

avec $B_x = -\frac{E_y}{c}$; $B_y = \frac{E_x}{c}$

$\rightarrow \quad \vec{R} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$ (en prenant les expressions réelles des champs (données))

$\vec{R} = \frac{1}{\mu_0 c}\left\{E_{0x}^2\cdot\cos^2(kz-\omega t+\varphi_x) + E_{0y}^2\cdot\cos^2(kz-\omega t+\varphi_y)\right\}\cdot\vec{e_z}$

4°) $\underset{\text{puissance moyenne}}{\langle\Pi\rangle} = \langle\vec{R}\rangle\cdot\vec{S}$ $\quad \vec{S} = S\vec{e_z}$ $\quad$ {$\vec{R}$ ne dépend que de z}

$\langle\Pi\rangle = \frac{S}{\mu_0 c}\cdot\frac{1}{2}\left\{E_{0x}^2 + E_{0y}^2\right\}$ $\qquad \left\{\langle\cdot\rangle \equiv \frac{1}{T}\int_0^T \cdot(t)\,dt\right\}$

) On peut écrire : [de manière à introduire les expressions complexes]

$$\boxed{\underset{\sim}{\vec{E}} = \underset{\sim}{\vec{E_0}}\, e^{i(kz-\omega t)} = \underset{\sim}{\vec{E_0}}\, e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)}}$$ avec $\vec{k} = k.\vec{e_z} = \frac{\omega}{c}\vec{e_z}$

et $\underset{\sim}{\vec{E_0}} = E_{0x}\, e^{i\varphi_x} . \vec{e_x} + E_{0y}\, e^{i\varphi_y} . \vec{e_y}$

(ici constante complexe)

Dans cette représentation :

$$\left.\begin{aligned} \vec{\nabla}. &\rightarrow i\vec{k}. \\ \frac{\partial}{\partial t}. &\rightarrow -i\omega. \end{aligned}\right\} \quad \vec{rot}\, \underset{\sim}{\vec{E}} = -\frac{\partial \underset{\sim}{\vec{B}}}{\partial t}$$

$$\rightarrow \underset{\sim}{\vec{B}} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \underset{\sim}{\vec{E}}$$

$$\rightarrow \underset{\sim}{\vec{B}} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \underset{\sim}{\vec{E_0}} . e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)}$$

$$\rightarrow \boxed{\underset{\sim}{\vec{B}} = \frac{\vec{e_z}}{c} \wedge \underset{\sim}{\vec{E_0}} . e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)}}$$

En prenant le conjugué complexe :

$$\underset{\sim}{\vec{B}}^* = \frac{\vec{e_z}}{c} \wedge \underset{\sim}{\vec{E_0}}^*\, e^{-i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)}$$

→ On définit le vecteur de Poynting complexe :

$$\underset{\sim}{\vec{R}} = \frac{1}{2\mu_0}\, \underset{\sim}{\vec{E}} \wedge \underset{\sim}{\vec{B}}^* = \frac{1}{2\mu_0 c}\, \underset{\sim}{\vec{E_0}} \wedge (\vec{e_z} \wedge \underset{\sim}{\vec{E_0}}^*) = \frac{1}{2\mu_0 c}\, \underset{\sim}{\vec{E_0}} . \underset{\sim}{\vec{E_0}}^*$$

$$\boxed{\underset{\sim}{\vec{R}} = \frac{1}{2\mu_0 c}\left(E_{0x}^2 + E_{0y}^2\right)}$$

6°) On a donc bien $\langle \vec{R}_{réel} \rangle = Re\{\underset{\sim}{\vec{R}}\}$

III) ONDE CYLINDRIQUE A GRANDE DISTANCE

1°) $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$ $\qquad \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ $\qquad \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

} équations de Ma[xwell] dans le vide.

2°) $\vec{E}(\vec{r},t) = E(r)\exp\left(j(\omega t - kr)\right)\vec{e_z}$

$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E}$ avec ici $\vec{E} = E(r)\,\vec{e_z}$ $\qquad \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \begin{pmatrix} \vec{e_r} & 0 \\ \vec{e_\theta} & -\dfrac{\partial E_z}{\partial r} \\ \vec{e_z} & 0 \end{pmatrix} =$

$$\frac{\partial E_z}{\partial r} = \frac{\partial E(r)}{\partial r}\exp\left(j(\omega t - kr)\right) - jk\,E(r)\exp\left(j(\omega t - kr)\right)$$

$$\vec{B} = \left[\frac{\partial E(r)}{\partial r} - jk\,E(r)\right]\frac{1}{j\omega}\exp\left(j(\omega t - kr)\right)\vec{e_\theta}$$ [CE N'EST PAS UNE ONDE

$$\vec{B}(r,t) = \left[\underbrace{\frac{\partial E(r)}{\partial r}\cdot\frac{1}{j\omega}}_{\text{déphasage}} - \underbrace{\frac{k}{\omega}E(r)}_{\text{en phase}}\right]\exp\left(j(\omega t - kr)\right)\vec{e_\theta}$$

) Pour le vecteur de Poynting : il faut utiliser les grandeurs <u>RÉELLES</u>

)

$$\vec{E} = E(r)\cos(\omega t - kr)\,\vec{e_z}$$

$$\vec{B} = \left[-\frac{k}{\omega}E(r)\cos(\omega t - kr) + \frac{1}{\omega}\frac{\partial E(r)}{\partial r}\sin(\omega t - kr)\right]\cdot\vec{e_\theta}$$

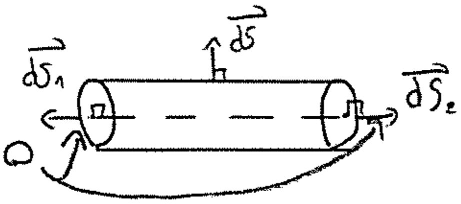
$$\vec{P} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0}|E||B|\,\vec{e_z}\wedge\vec{e_\theta} = -\frac{|E||B|}{\mu_0}\vec{e_r}$$

$$\vec{P} = \frac{k}{\omega\mu_0}E^2(r)\cos^2(\omega t - kr)\,\vec{e_r} + -\frac{1}{\omega\mu_0}\frac{\partial E(r)}{\partial r}E(r)\cos(\omega t - kr)\sin(\omega t - kr)\,\vec{e_r}$$

3°b) $\boxed{\langle\vec{P}\rangle = \frac{k}{2\omega\mu_0}E^2(r).\vec{e_r}} + \vec{0}$ (sin et cos : fonctions ORTHOGONAUX)

3°c) $\langle\Pi\rangle$ puissance moyenne rayonnée dans un cylindre de hauteur h
. de rayon r

$$\langle\Pi\rangle = \iint_{S\ \text{latérale}}\langle\vec{P}\rangle.\vec{dS} + 0$$



$$\vec{dS} = r\,d\theta\,dz\cdot\vec{e_r}$$

$$\boxed{\langle\Pi\rangle = \frac{k}{2\omega\mu_0}.2\pi r.h.E^2(r)}$$

3°d) $\langle\Pi_h\rangle = \frac{\langle\Pi\rangle}{h}$ (par unité de longueur) (longueur $\equiv$ hauteur)

4°) <u>CF COURS POUR ETABLIR</u>
$$\begin{cases}\Delta\vec{E} = \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\\[2mm] \Delta\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}\end{cases}$$