Problèmes Inverses :

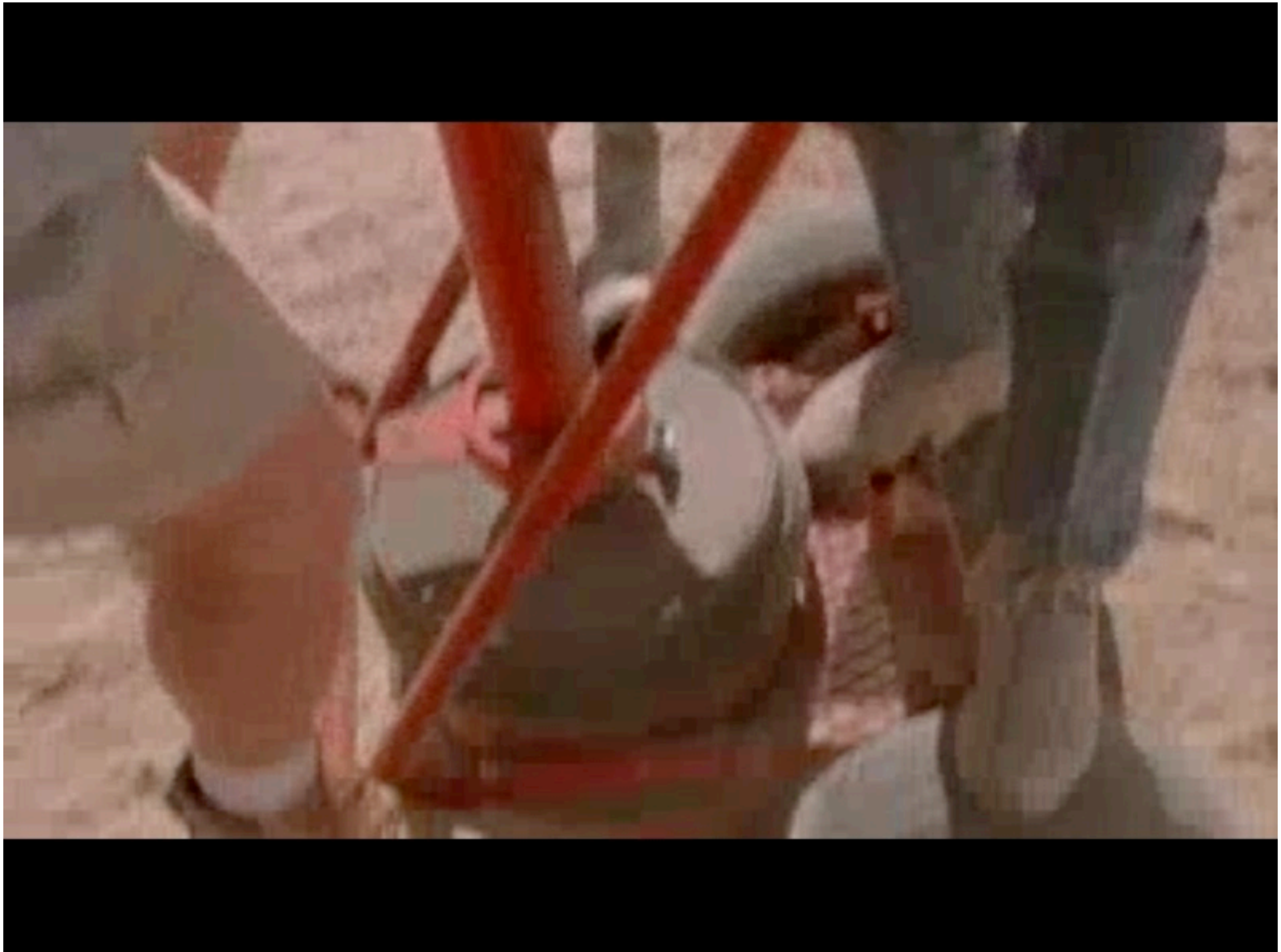
Définition, exemples et approche mathématique

M. Cristofol LATP Université Aix-Marseille

Retour dans le Passé!!!

Jurassik park

La machinerie



Définition

- Ils apparaissent naturellement dans tous les domaines .....
- Typiquement : Identification de paramètres
- Mais aussi : recherche de formes ou de frontières (fissures, cavités, ...)

Les obstacles (d'où les pb inverses!!!!)

- Certaines quantités sont inaccessibles :
  - étude des exoplanètes,
  - des ressources du fond des océans,
  - des sous sols, le coeur des réacteurs nucléaires, les marchés financiers, notre corps,...

Les contraintes

- Physiques : inaccessibilité.
- Financières : ....
- Les données : problèmes mal posés, erreurs sur ces données, ...
- Mathématiques : la complexité des modèles

Des Mathématiques

- pour modéliser,
- pour prouver l’unicité,
- pour reconstruire...

Les modèles

Voici un modèle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u\,(\mu(x) - \gamma(x)u),\ \ t \geq 0,\ \ x \in (a,b), \\ \alpha_1 u(t,a) - \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x}(t,a) = 0, t > 0, \\ \alpha_2 u(t,b) + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial x}(t,b) = 0,\ \ t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x) > 0,\ \ x \in (a,b). \end{array} \right.$$

Les modèles

- le même expliqué :
- u(t,x) est une fonction dépendant du temps : t et de l'espace : x. Elle peut ici modéliser l'évolution d'une population.
- Le taux de croissance de u(t,x) est défini par :

$$\mu(x)$$

Les modèles

- les effets de la compétition entre naissance et mort sont représentés par :

$$\gamma(x)$$

- D désigne le coefficient de diffusion
- u(0,x) désigne la condition initiale

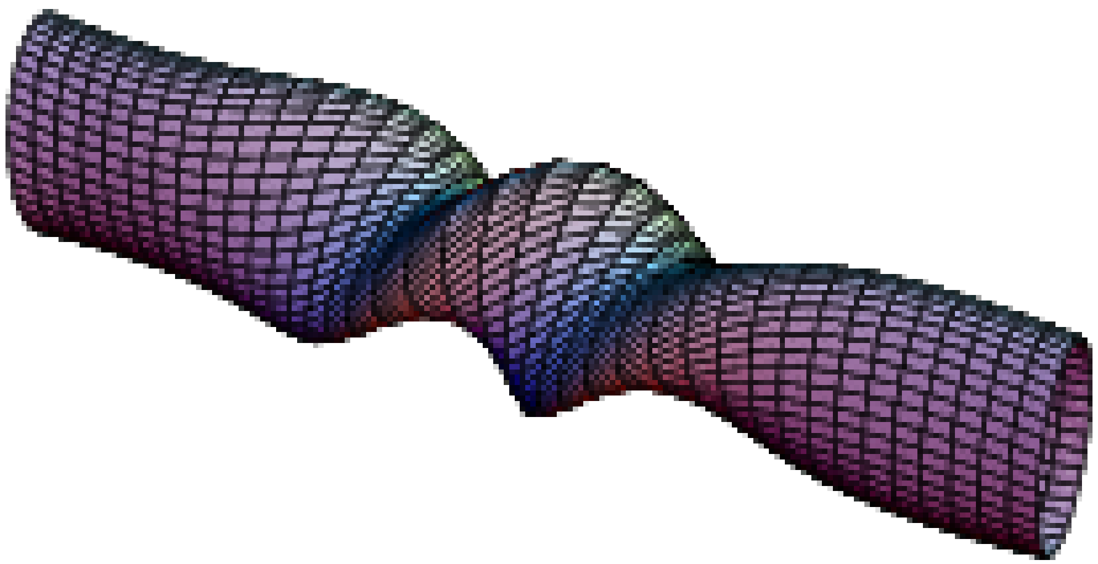
D'autres modèles

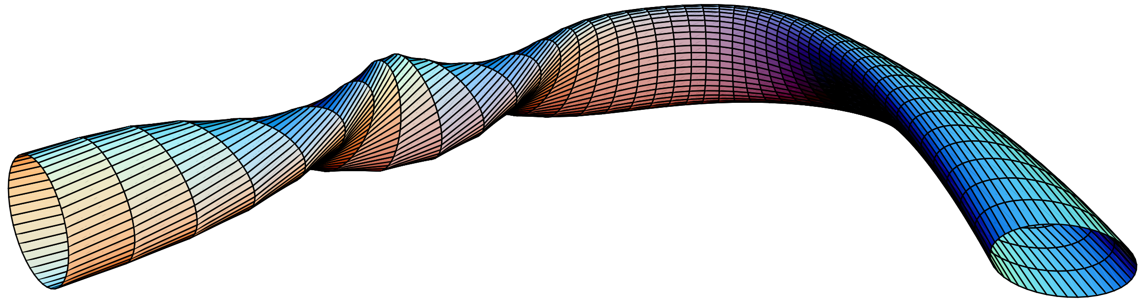
$$\left\{\begin{array}{ll} -\imath q'(t,x) + H_{\dot\theta} q(t,x) = 0, & (t,x) \in (0,T)\times\Omega \\ q(t,x) = h(t,x), & (t,x)\in(0,T)\times\Gamma \\ q(0,x) = q_0(x) & x\in\Omega, \end{array}\right.$$

avec :

$$H_{\dot\theta} := -\Delta_\tau - (\dot\theta(x_3)(x_1\partial_2 - x_2\partial_1) + \partial_3)^2.$$

Plus sérieusement





Ou encore :

$$
\begin{cases}
D' - curl(\mu B) = 0, & \text{in } \; Q := \Omega \times (-T, T), \\
B' + curl(\lambda D) = 0, & \text{in } \; Q, \\
divD = divB = 0, & \text{in } \; Q, \\
D \times \nu = 0, \quad B \cdot \nu = 0, & \text{on } \; \Sigma := \Gamma \times (-T, T),
\end{cases}
$$

avec

λ^{-1} la permittivité dielectrique et μ^{-1} perméabilité magnétique.

D: induction électrique B : induction magnétique

L'Unicité

- Le problème est d'être sur de trouver le coefficient que l'on cherche à reconstruire et pas un autre....

L'Unicité

- Des contre-exemples connus ou moins connus

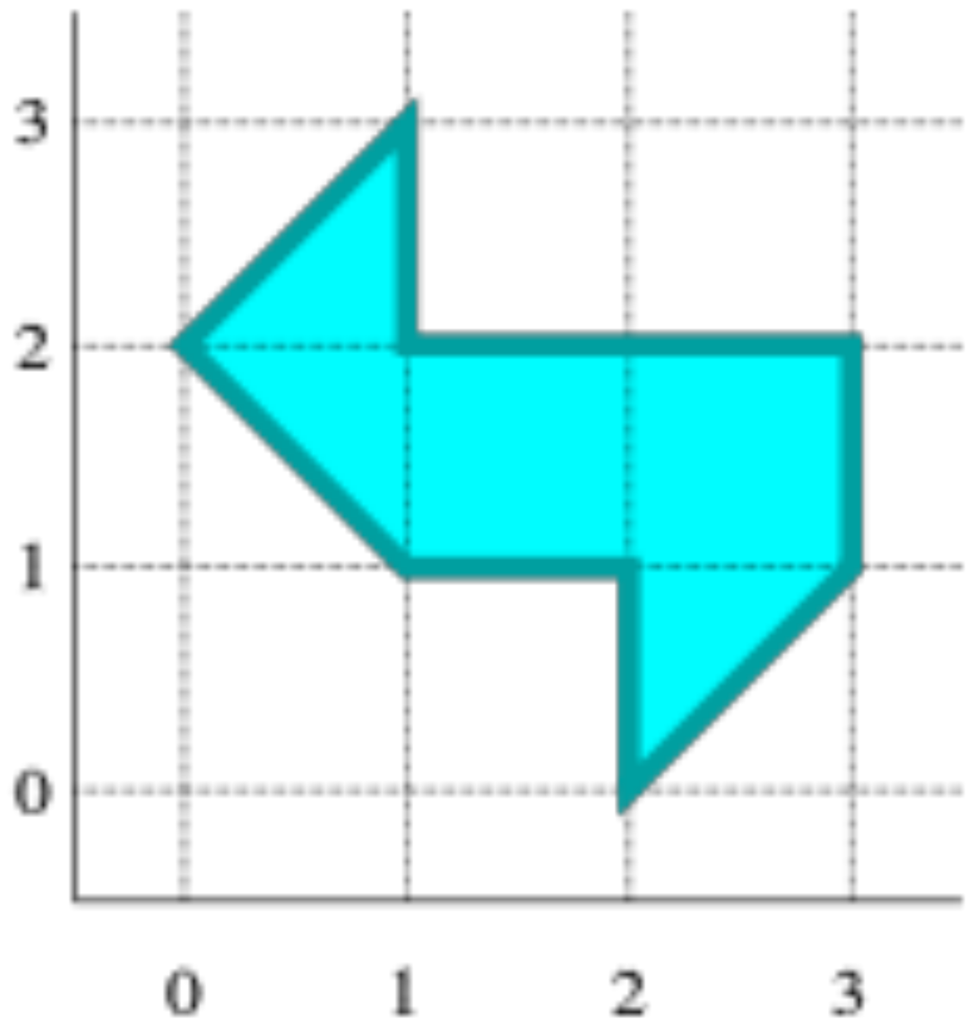
L'Unicité

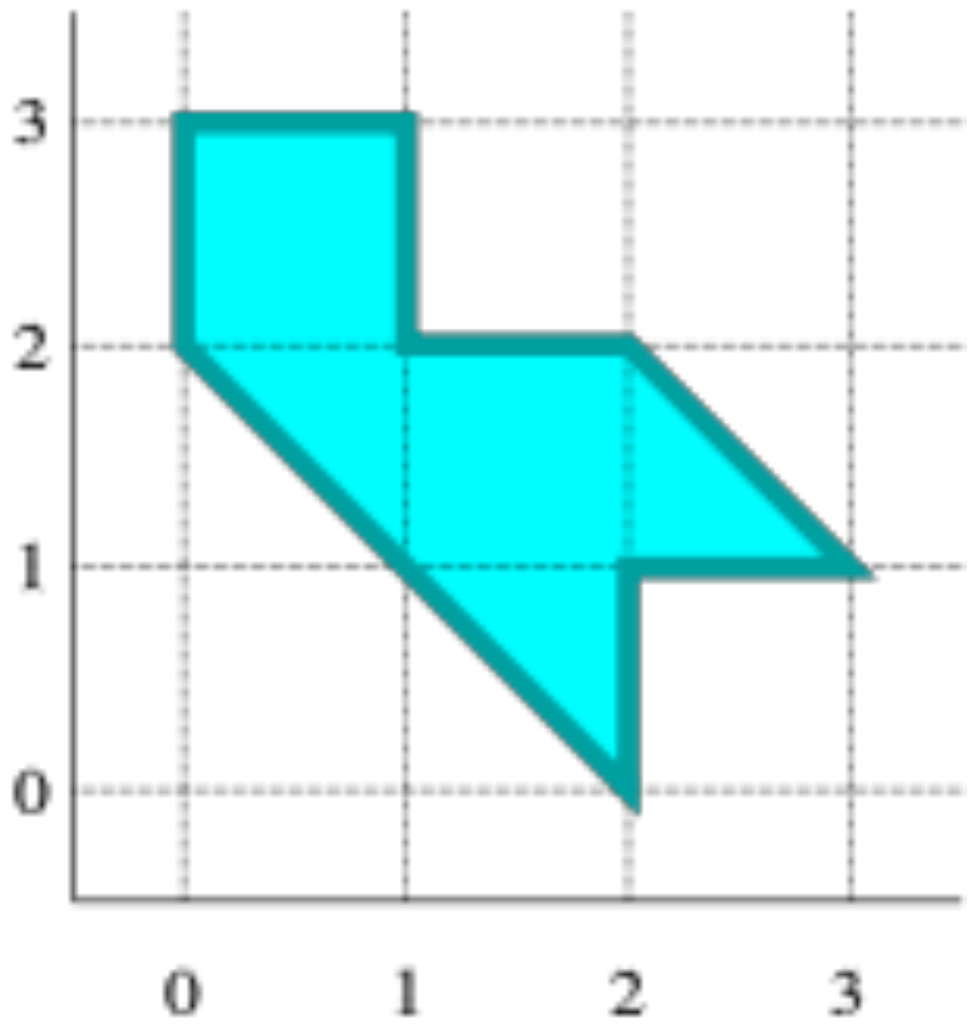
- Peut-on entendre la forme d'un tambour (Kac 1966) ?
- Peut-on détecter l'intérieur d'une boule par des mesures au bord de celle-ci ? : oui et non !!!!

Le tambour

- la donnée du son (les fréquences propres de vibration) donne accès à l'aire, au périmètre mais pas à la forme.

Le son et la forme....





L'Unicité

L’Unicité

La reconstruction

- En pratique les numériciens savent résoudre leurs problèmes inverses de manière approchée.
- Mais ils ont besoin d’une étude théorique pour :

La reconstruction

- établir l'unicité de la solution qu'ils trouvent numériquement (surdétermination),
- gérer le problème de la stabilité des données ou mesures,
- améliorer leur algorithme de reconstruction,
- intégrer le bruit, les données à priori, ...

Quelques Domaines :

- Imagerie médicale
- Industrie
- Ecologie
- Finance
- Biologie
- Climatologie
- Le renseignement (cloaking, ...)

Imagerie médicale:

Essentiellement de la mesure, du numérique

+

les a priori issus de la médecine

- IRM
- Scanner
- Echographie

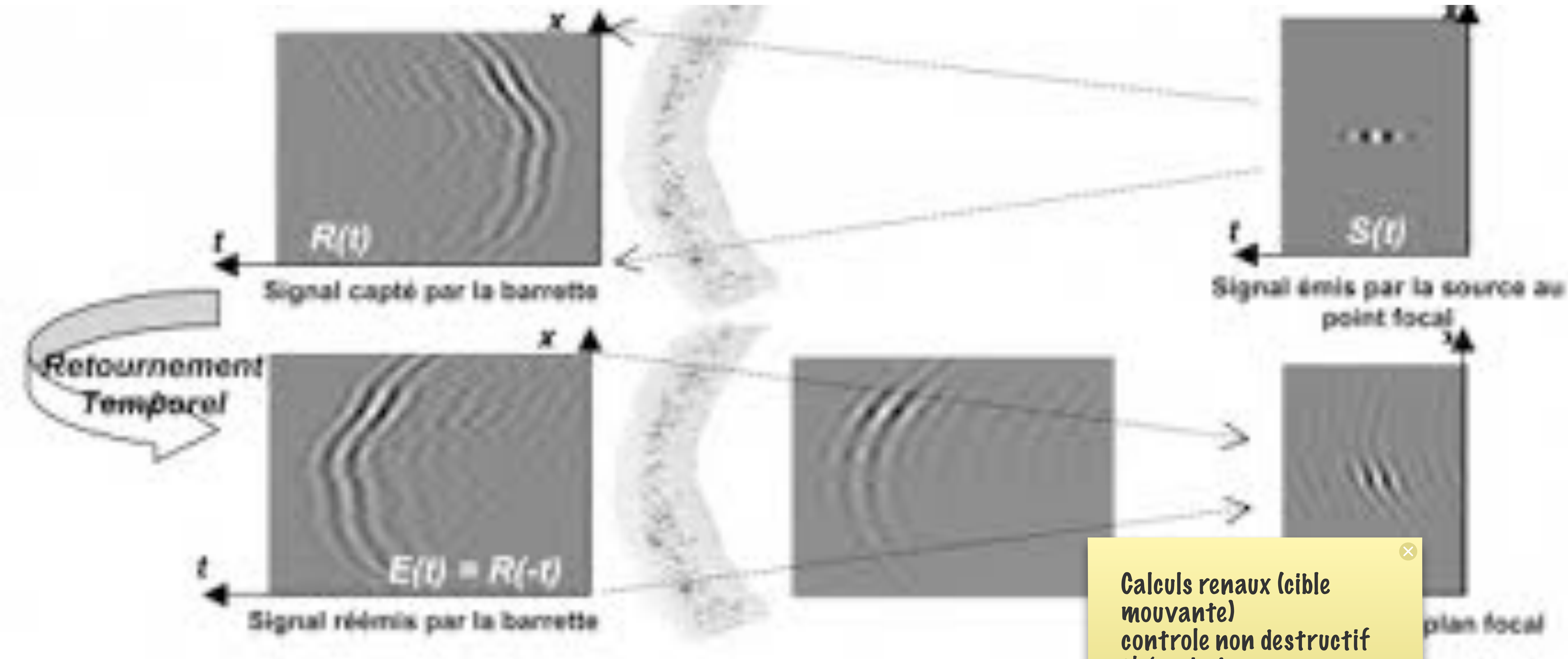
Imagerie médicale:

Là, de la physique et des Maths.....

- Le retournement temporel

Imagerie médicale:

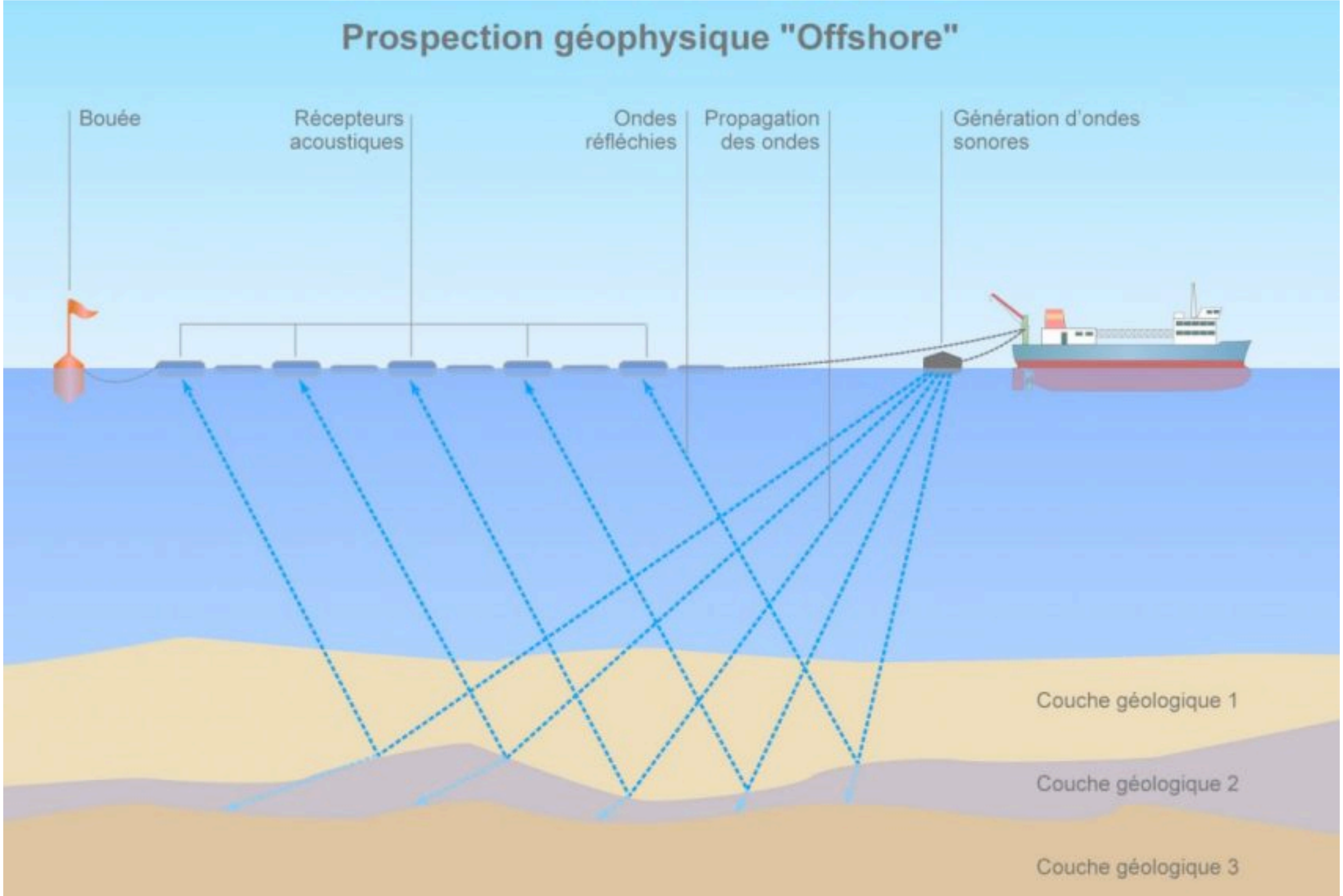
Imagerie médicale:



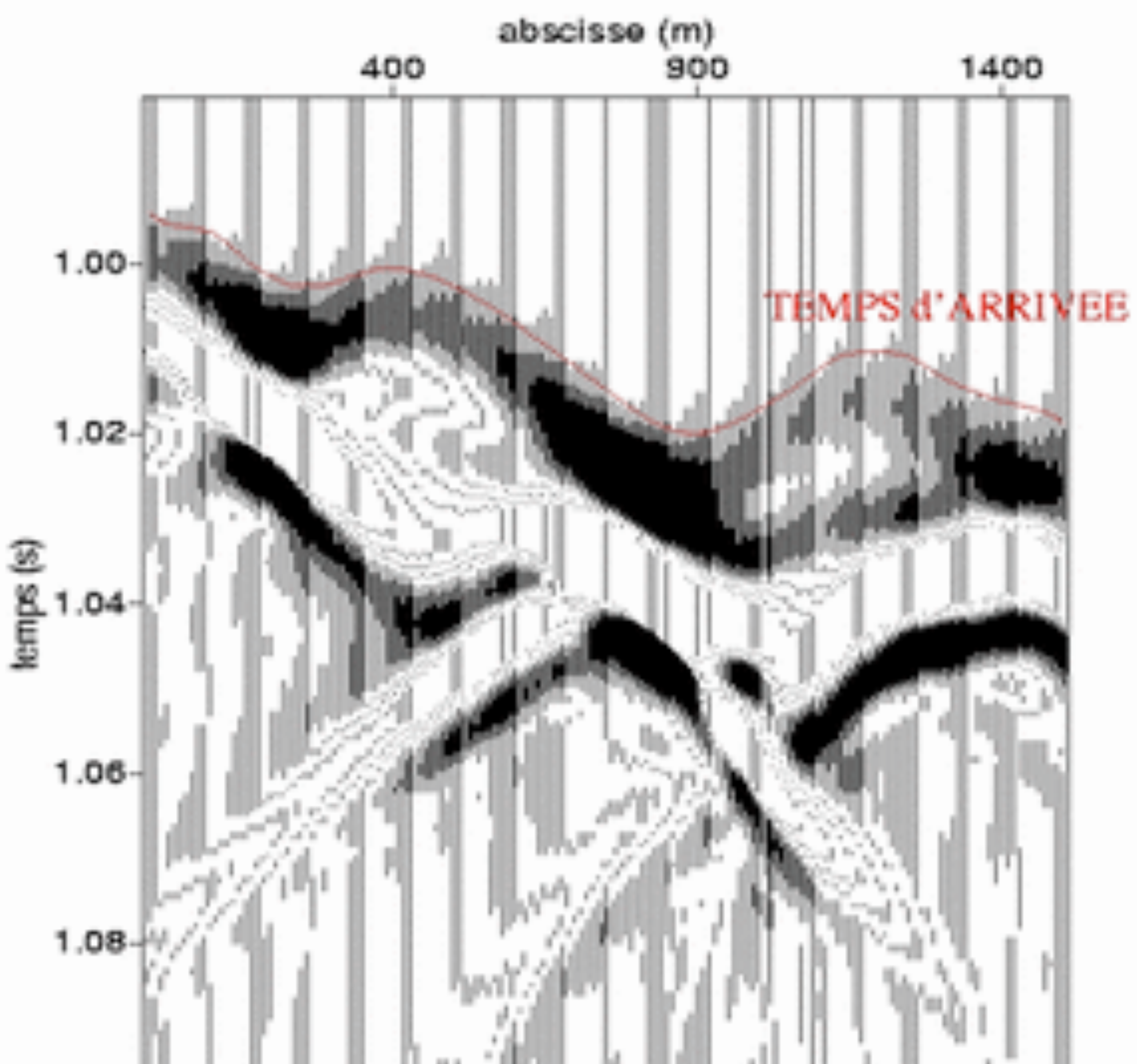
Calculs renaux (cible mouvante)
controle non destructif
thérapie du cerveau
travaux sous marins
applicable en electromagnétisme (frequences 1000 fois

Industrie :

Recherche pétrolière



Sismique, ...

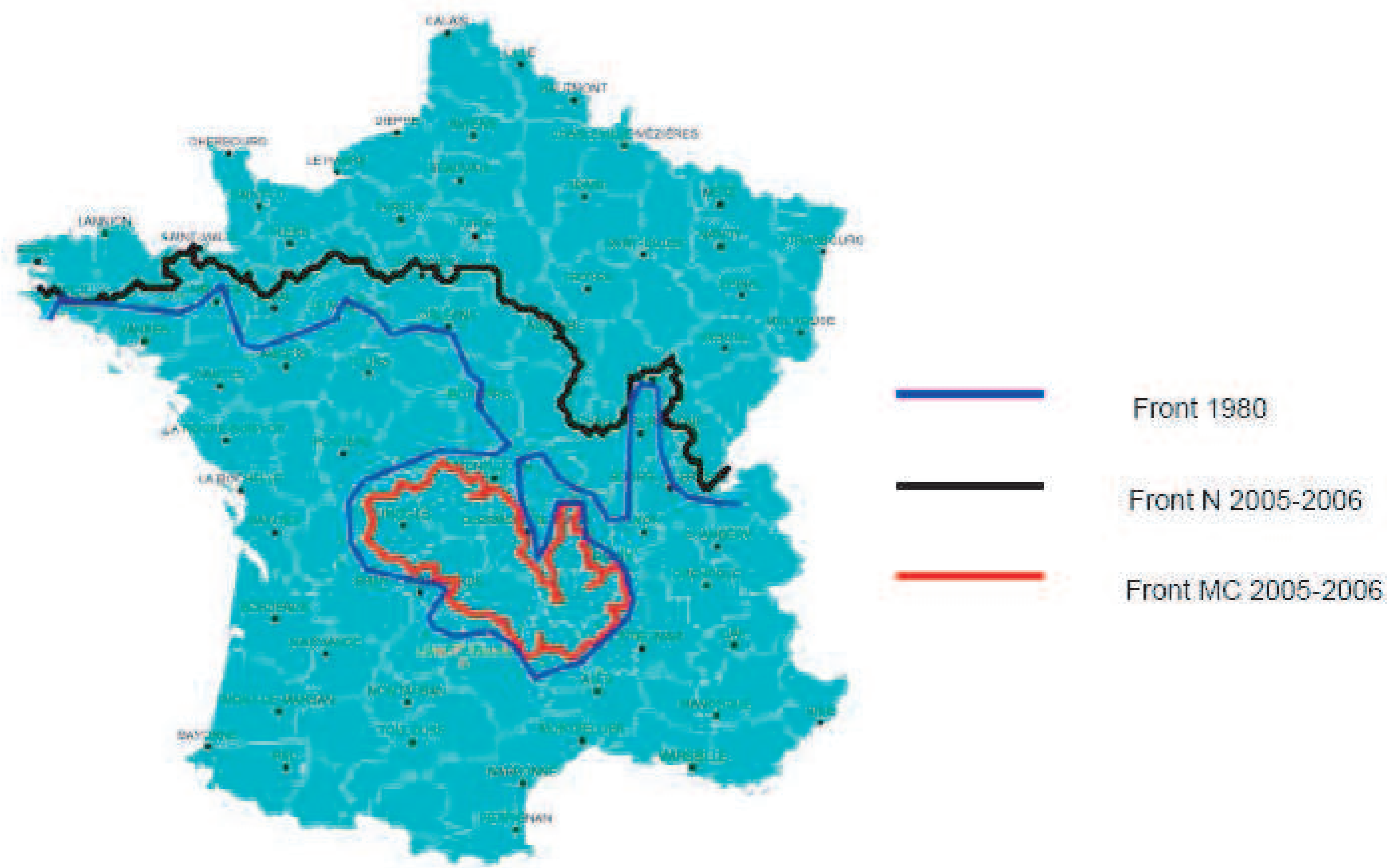

abscisse (m)
400
900
1400
temps (s)
1.00
1.02
1.04
1.06
1.08
TEMPS d'ARRIVEE

Ecologie

La chenille processionnaire : Invasion et prévision

Thaumetopoea pityocampa

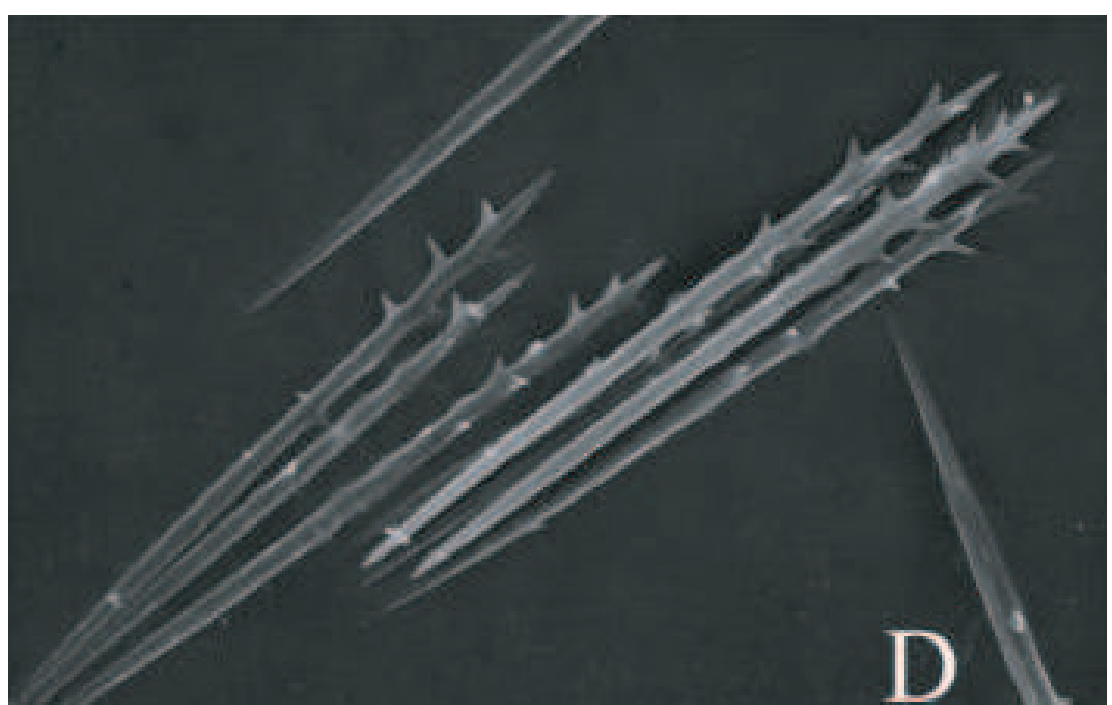
La chenille processionnaire : Invasion et prévision



La chenille processionnaire : Invasion et prévision

La chenille processionnaire

Invasion et prévision :



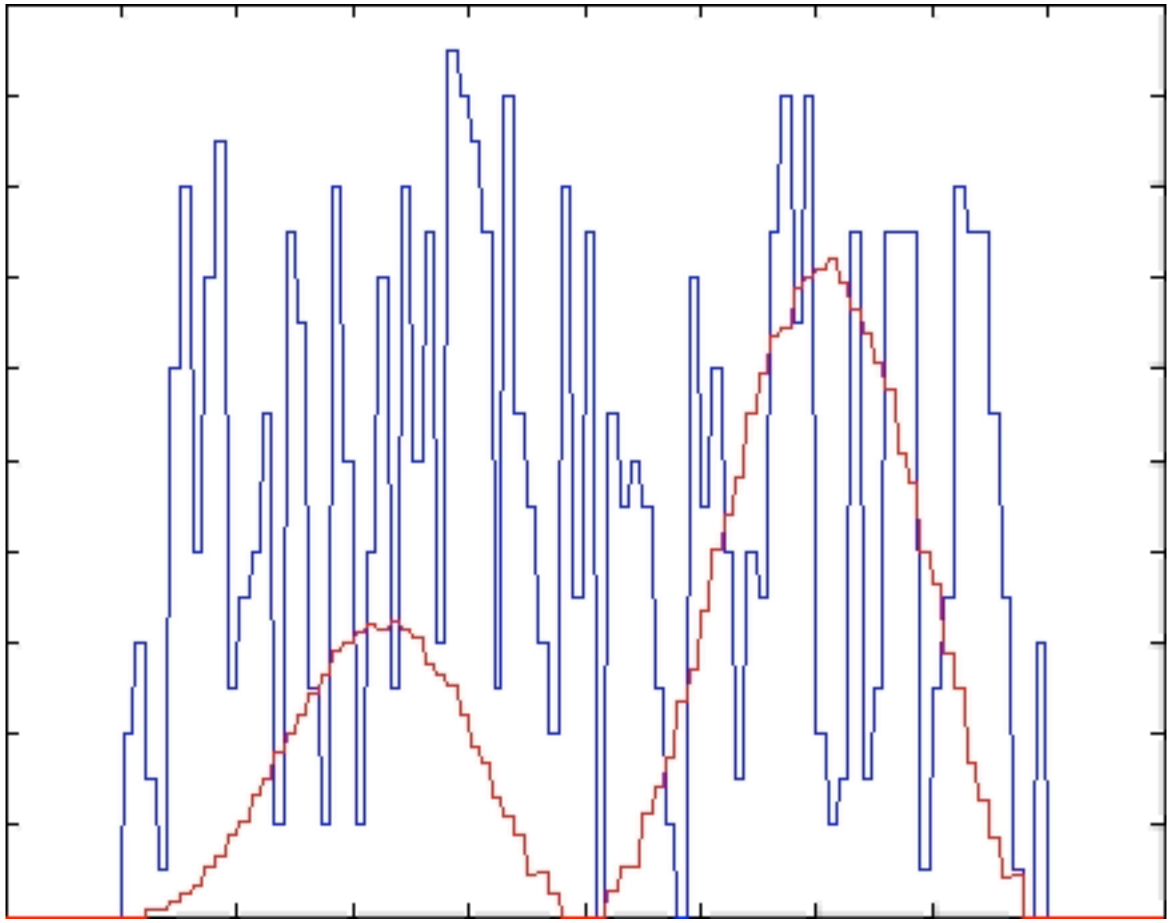
La chenille processionnaire

Invasion et prévision :

$$
\begin{cases}
\partial_t u_\gamma = D\Delta u_\gamma + u_\gamma(\mu(x) - \gamma u_\gamma), \;\; t > 0, x \in \Omega, \\
u_\gamma(t,x) = 0, \;\; t > 0, x \in \partial\Omega, \\
u_\gamma(0,x) = u_i(x) \text{ in } \Omega,
\end{cases}
\qquad (P_{\mu,\gamma})
$$

La chenille processionnaire

Invasion, inversion, prévision et prévention



Finances : La volatilité

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} S^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} + (r - q) S \frac{\partial v}{\partial S} - rv = 0.$$

v(t,S) : désigne le prix d'une option,
option : produit qui établit un contrat entre acheteur et vendeur,
S : l'actif sous-jacent (action, devise, obligation,...),
r et q :paramètres connus liés à des taux d'intérêt et des dividendes.

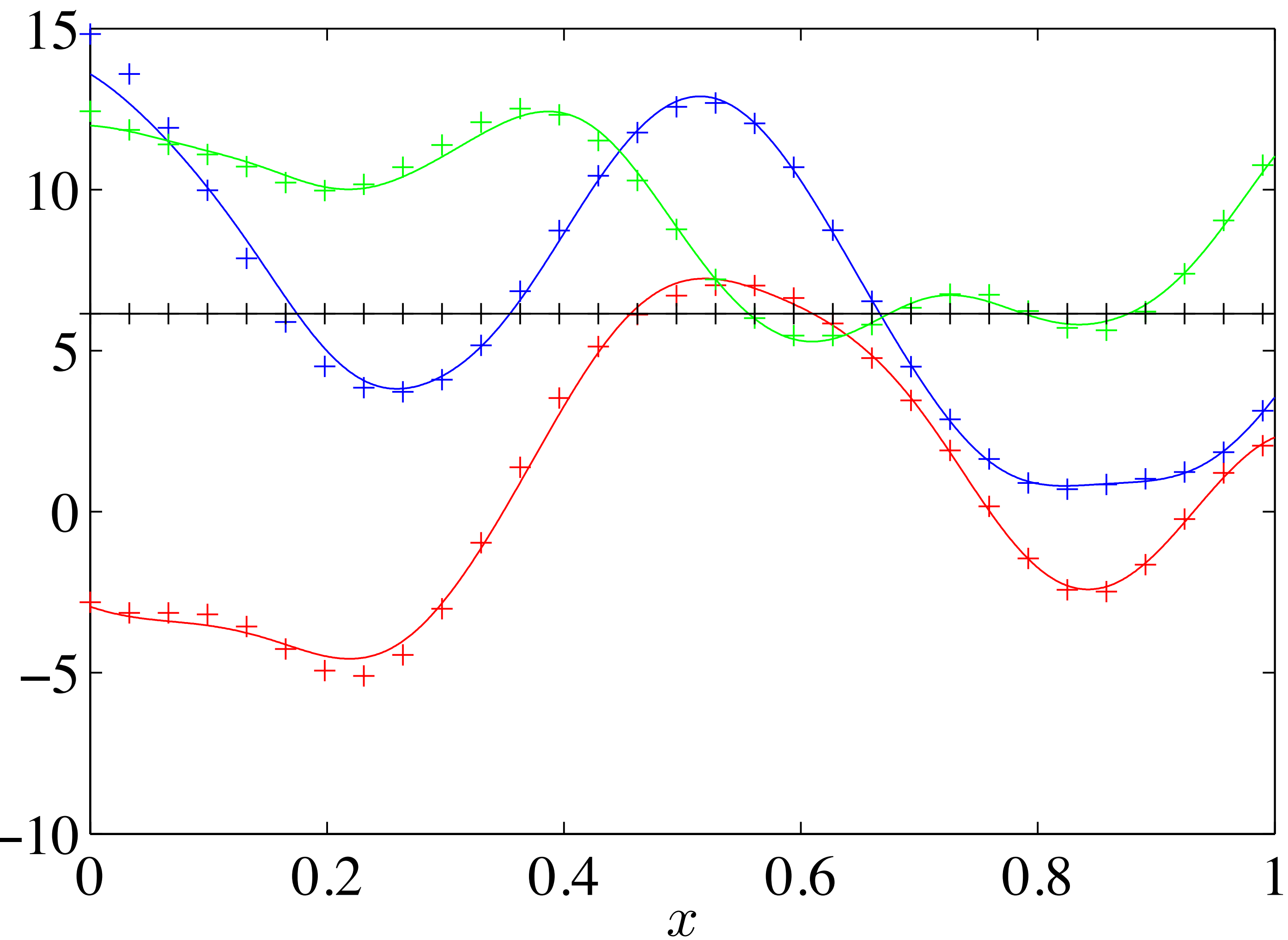
La volatilité:

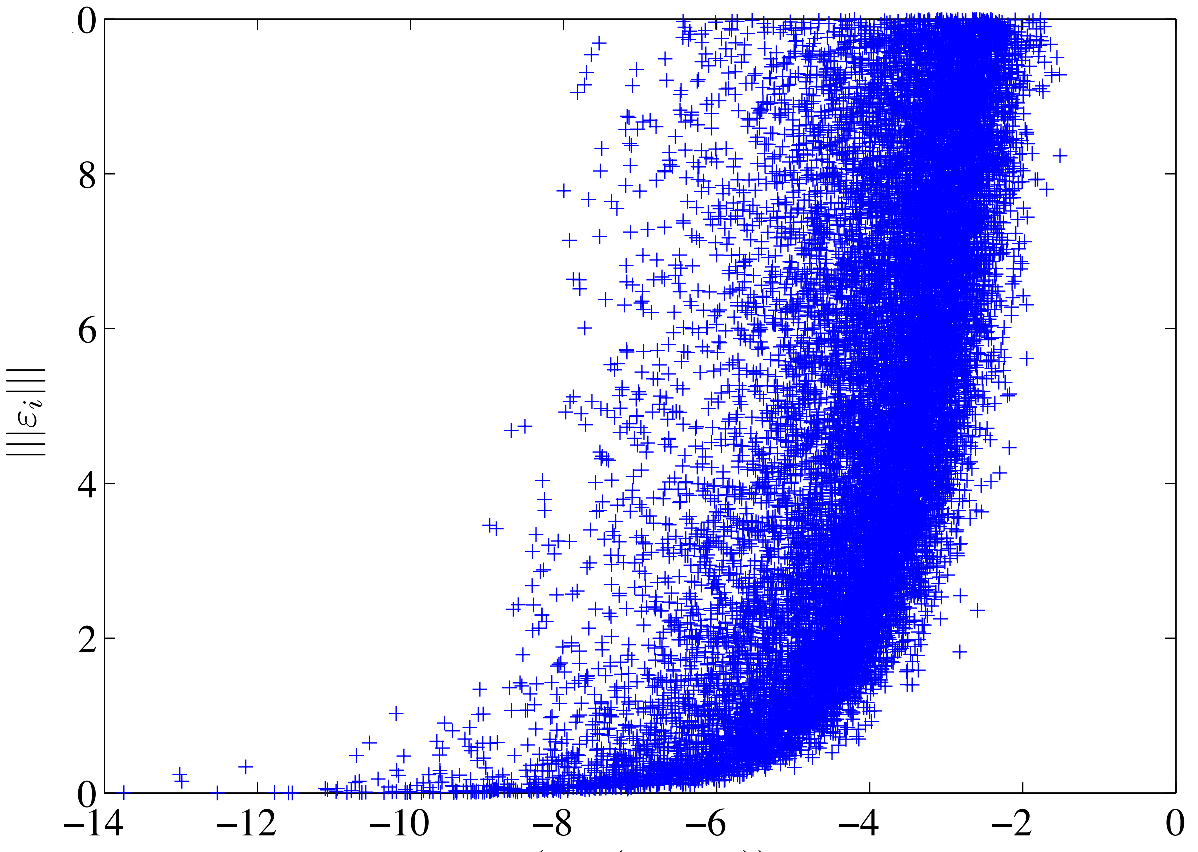
La volatilité sigma mesure l'ampleur des variations du cours d'un actif : σ (S).
Elle quantifie le risque de rendement d'un actif.
Un trader «parie» sur la volatilité future.
Le probable est du domaine du futur et l'étude du passé est rarement suffisante sur les marchés financiers.
La volatilité est donc un paramètre clé !!!!
Mais :
«La prévision est très difficile, particulièrement au sujet du Futur» (N. Bohr).

Invasion biologique:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D_1 \, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r_1 \, u - a_{11} \, u^2 - a_{12} \, uv, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = D_2 \, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + r_2 \, v - a_{21} \, uv - a_{22} \, v^2, \end{cases} \quad \text{pour } t > 0, \, x \in (a, b) \subset R.$$

Invasion biologique(suite)





Prévoir le climat !!!:

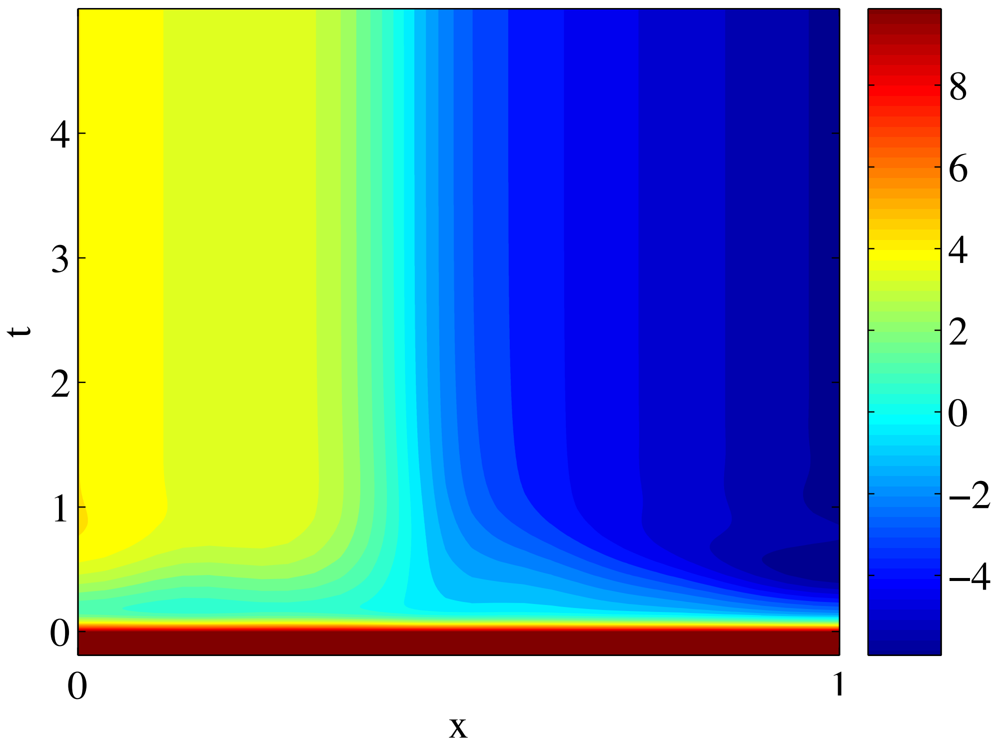
$$c(x, H(t,x,T))\,\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\,\frac{\partial T}{\partial x}\right) + f(t,x,T,H(t,x,T))$$

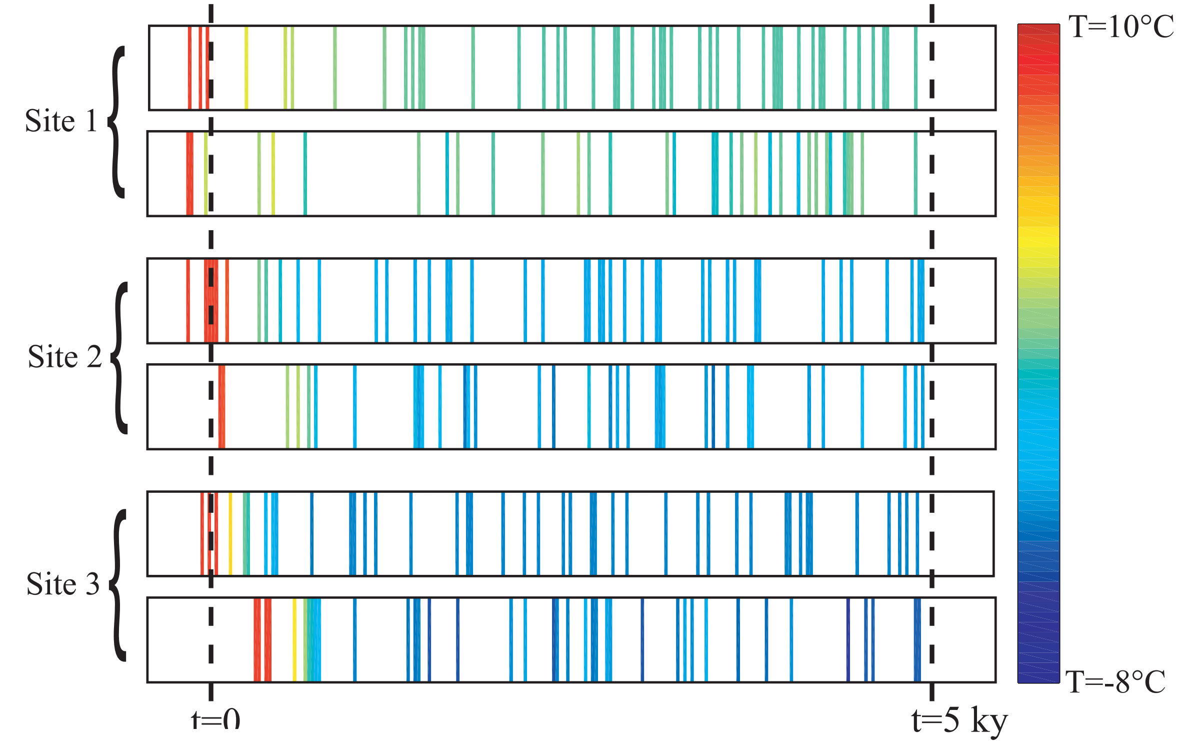
$$H(t,x,T) = \int_{-\tau}^{0} \beta(s,x)\,T(t+s,x)\,\mathrm{d}s,$$

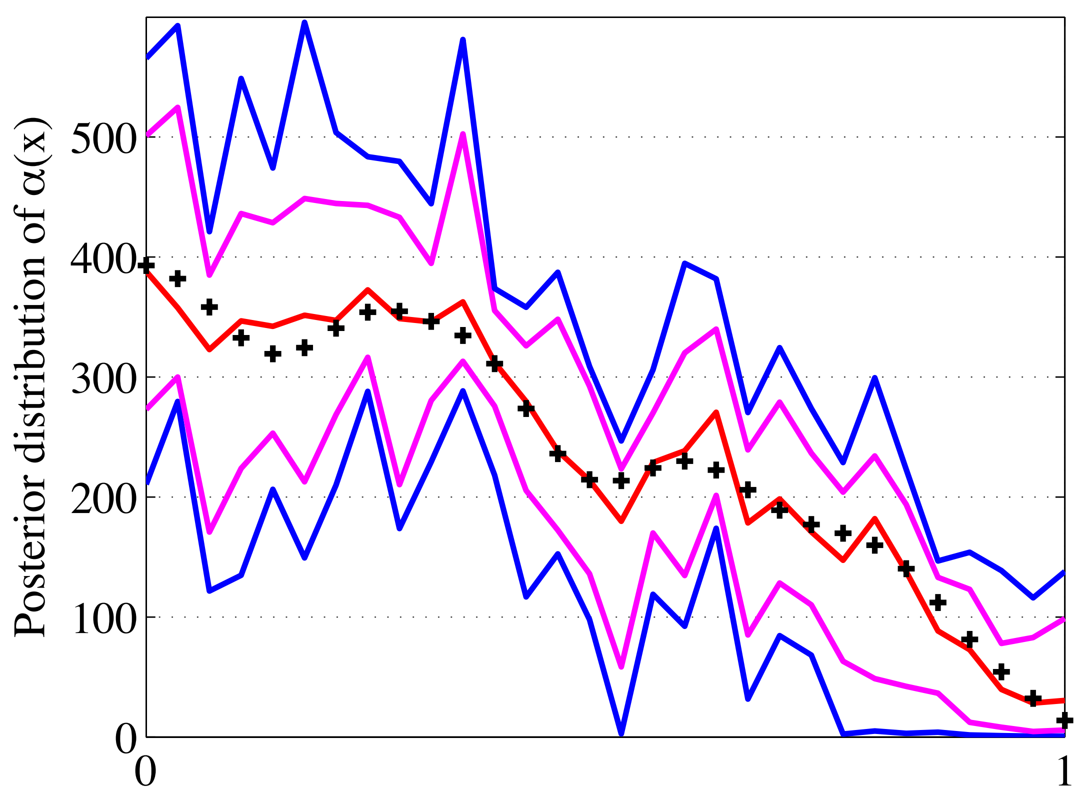
$$f = f_\alpha(t,x,T,H(t,x,T)) = f_1(t,x,T,H(t,x,T)) + \alpha(x)\,f_2(t,T,H(t,x,T)),$$

Albedo : Coefficient d'énergie solaire réfléchie

Prévoir le climat (suite)







le cloaking:

- phys.org