Techniques de simulation
Monte-Carlo

Nombres aléatoires

Il est possible de générer des nombres aléatoires à l'aide des phénomènes physiques aléatoires.

exemple

on mesure pendant un temps fixe t. le nombre de cosmiques dans un détecteur. Le temps doit assez large pour avoir une quantité importante

si le nb est pair $\Longrightarrow$ bit = 1

si le nb est impair $\Longrightarrow$ bit = 0

1101001110 .... mais cette procédure peut être biaisé

si le nb désintégration pair # nb de désint. impair

on régle le problème en prenant deux mesures successives si les deux donnent des bits identiques on rejette sinon on prend le 2ème bit

Nombres pseudo-aléatoires

Les méthodes utilisées sont basée sur des suites récurrentes et donc malheureusement périodiques.

La méthode de Lehmer est la plus utilisée

$$r_{i+1} = a\, r_i \text{ modulo } m$$

on fixe a, m. on choisit m le plus large possible (periode $\simeq \frac{m}{4}$ pour un choix approprié de a)

on commence par $r_0 \longrightarrow r_1 \longrightarrow r_2 \ldots$

$\frac{r_i}{m-1}$ est une variable "aléatoire" $\in [0, 1]$

Pensez à changer r_0 pour chaque tirage .....

Tirage d'un échantillon d'une variable X

- Inversion de la fonction de répartition

cette methode s'applique lorsque F^{-1} a une forme analytique simple.

$Y = F(X)$ est uniformément distribuée dans $[0,1]$ car

$$g(y) = \frac{f(F^{-1}(y))}{F'(F^{-1}(y))} = 1$$

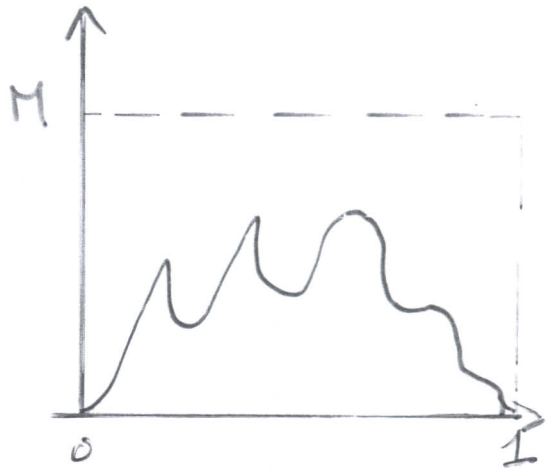
donc en choisissant n nb aléatoires $r_1, r_2 \ldots r_n$ dans l'intervalle $[0,1]$ permettent d'obtenir un échantillon de n nb aléatoires de X en prenant $F^{-1}(r_i)$

- Méthode de rejet

celle methode s'applique lorsque la densité de prob de X est à support borné et reste finie.

on suppose que $0 \leq X \leq 1$ pour simplifier.

soit M un nombre réel telque $\forall\ X \in [0,1]\quad f(X) \leq M$



1) on tire au hasard un nombre entre 0 et 1 (d'une façon uniforme) : U

2) on tire un nombre entre 0 et 1 : V

3) on compare $\frac{f(U)}{M}$ et V

si $\frac{f(U)}{M} > V$ on garde U

sinon on le rejette

en effet $P(x < U < x+dx \mid U \text{ est retenu}) \propto (U < x+dx)$

$\propto \frac{f(x)}{M} \times \frac{dx}{1}$ et donc $\propto f(x)dx$

Application

- Comment générer une distribution gaussienne ?

$N(X, \mu, \sigma)$

on va utiliser le théorème central-limite :

la somme de variables aléatoires uniformément distribuées sur l'intervalle $[0, 1]$ est une variable gaussienne si $n \nearrow$ ($n \geq 12$)

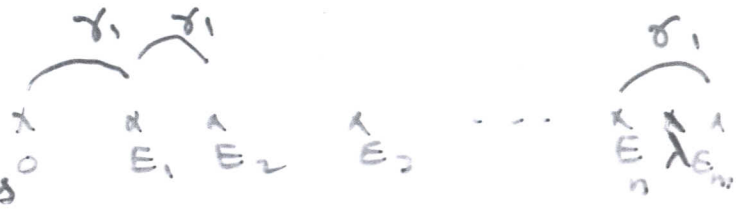
$$X = \mu + \sigma \left[\sum_{i=1}^{12} r_i - 6 \right]$$

en fait $\sum_{i=1}^{12} r_i \longrightarrow N(r, 12 \times \frac{1}{2}, 12 \times \frac{1}{12})$

$N(r, \sigma, 1)$

- Comment générer une distribution de poisson

on engendre des variables aléatoires uniforms



$r_i \in [0, 1] \Rightarrow \Gamma_i = -\ln r_i$

La réalisation n de la loi de poisson est le plus grand nombre n / $\sum_{i=1}^{n} \Gamma_i < \lambda$