

## Méthodes d'intégration

$$I = \int_a^b f(x) dx \Rightarrow \frac{b-a}{n} \sum_i f(x_i)$$
$$x_i = a + (i-1) \frac{b-a}{n} \quad i=1, \dots$$

l'équivalent de cette intégration numérique à l'aide de M.C. est :

$$\frac{b-a}{n} \sum_i f(x_i)$$
$$x_i = a + r_i (b-a)$$
$$r_i \in [0, 1]$$

Est-ce utile ?

si l'on s'agit d'une intégration à 1 dim  $\rightarrow$  non  
résolution numérique  $\propto \frac{1}{n^2}$ , MC  $\frac{1}{\sqrt{n}}$

mais à  $n$  dimensions

$$\text{numérique} \propto \frac{1}{n^{2/d}}, \quad \text{MC} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

si les bornes d'intégration d'une variable dépendent de l'autre ..... l'intégration numérique devient extrêmement compliquée tandis que le MC peut le faire

## Méthode de réduction de la variance

- Stratification : diviser l'intervalle d'intégration en 2 et choisir la moitié des points générés dans un et l'autre dans l'autre moitié  
⇒ mieux répartir les points
- Echantillonnage non-uniforme : choisir de générer plus de points là où l'intégrand varie rapidement.  
⇒ stratification avec nombre de points différent dans chaque moitié et plus généralement dans les différents intervalles choisis.
- Echantillonnage proportionnelle "Importance sampling"  
La variance dépend de l'intégrand. réduire la fluctuation de l'intégrand conduit à réduire la variance de l'intégrale.

$$\int f(x) dx = \int \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) g(x) dx$$

$$\int h \quad dy$$

on choisit  $g$  telle que  $f(x)/g(x)$  varie peu  
 (si  $g \equiv f$  l'intégrand  $\equiv 1$  et la variance  $= 0$ )

exemple

$$\int_0^1 x^3 dx = \int_0^1 \frac{x^3}{3x^2} 3x^2 dx = \frac{1}{3} \int_0^1 x dx^3$$

$$h = \frac{x}{3}, \quad g = x^3$$

on génère uniformément les points selon la variable  
 $y \Rightarrow$  l'intégrale  $I = \frac{1}{3} \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$   
 $N \rightarrow$  nb de pts

• symétrisation

on intègre sur un intervalle  $[a, b]$

à chaque point généré  $x_i \in [a, b]$  on lui associe

$x'_i$  son symétrique / à  $\frac{b-a}{2}$ . cela permet

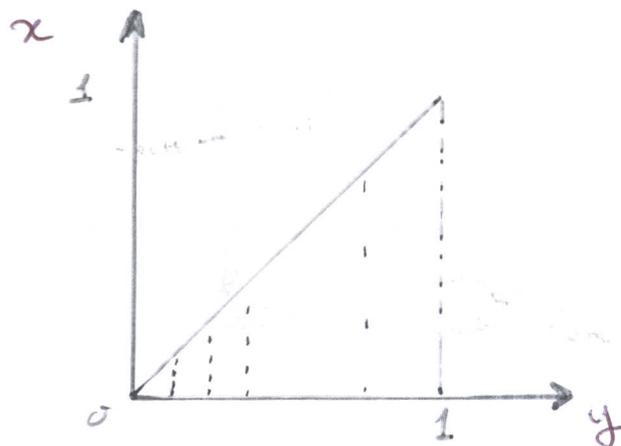
de supprimer la partie impaire /  $\frac{b-a}{2}$ .

Remarque

pour les intégrations à plusieurs dimensions pour lesquelles les bornes d'une variable dépendent des autres il faut faire attention à bien répartir les points générés.

exemple

$$I = \int_0^1 dy \int_0^y dx f(x,y)$$



X 1ère méthode: générer  $x$  uniformément dans  $[0,1]$  et  $y$  uniformément dans  $[0,x]$

2ème méthode générer  $x \in [0,1]$

$y \in [0,1]$

rejeter les points /  $y_i \geq x_i$