

## Combinaison des incertitudes

On est souvent amené à estimer des quantités qui sont des combinaisons d'autres quantités mesurables. et on est ainsi conduit à estimer l'incertitude qui entâche notre estimation.

Cas linéaire

on prend un exemple simple:

$$C = a - b$$

$\Rightarrow \delta c = \delta a - \delta b$  on peut déduire l'erreur sur

$c$  à partir des erreurs sur  $a$  et  $b$  mais ceci n'a pas de sens car si on connaissait les erreurs  $\delta a, \delta b$  on les aurait éliminées....

Par contre on a

$$\Delta a \equiv \sigma_a, \quad \Delta b \equiv \sigma_b$$

$$\Delta x = \sqrt{(x - \bar{x})^2}$$

$$= \sqrt{\bar{x}^2 - \bar{x}^2}$$

on essaie d'estimer  $\Delta c$  à partir de  $\Delta a, \Delta b$

$$\Delta c = \sigma_c = \sqrt{\bar{c}^2 - \bar{c}^2} \Rightarrow \sigma_c^2 = \bar{c}^2 - \bar{c}^2 = \overline{(c - \bar{c})^2}$$

en remplaçant  $c$  par  $a-b$  et  $\bar{c}$  par  $\bar{a}-\bar{b}$   
 on peut montrer que

$$\begin{aligned}\sigma_c^2 &= \sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2 \overline{(ab)} + 2 \bar{a} \cdot \bar{b} \\ &= \sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2 \overline{(b-\bar{b})(a-\bar{a})} \\ \sigma_c^2 &= \sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2 \text{cov}(a, b)\end{aligned}$$

si n'y a pas de corrélation entre  $a$  et  $b$  alors

$$\sigma_c^2 = \sigma_a^2 + \sigma_b^2 \Rightarrow \sigma_c = \sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}$$

On peut comprendre à partir du résultat précédent pourquoi répéter la mesure et moyenner est très utile :

$$\bar{q} = \frac{\sum_i q_i}{n} \Rightarrow n \bar{q} = \sum_i q_i$$

$$\Rightarrow n^2 \sigma_{\bar{q}}^2 = \sum_i q_i^2 \quad \text{or} \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma$$

$$\Rightarrow \sigma_{\bar{q}}^2 = \frac{\sum_i q_i^2}{n^2} \quad \text{m\u00eame grandeur}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\bar{q}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Cas non-linéaire

Difficulté:

La méthode appliquée dans le cas linéaire, basée sur la différentiation est toujours correcte.

Dans le cas non linéaire, on peut appliquer la même méthode mais seulement lorsque les incertitudes sont faibles.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{1!} + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{dx^2}{2!} + \dots}_{\text{doivent être négligeables}}$$

Exemple:

$$c = a^r b^s$$

$$\Delta c = ?$$

$$\delta c = r b^s a^{r-1} \delta a + s a^r b^{s-1} \delta b$$

$$\Rightarrow \frac{\delta c}{c} = r \frac{\delta a}{a} + s \frac{\delta b}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_c^2}{c^2} = r^2 \frac{\sigma_a^2}{a^2} + s^2 \frac{\sigma_b^2}{b^2} + 2rs \frac{\text{cov}(a,b)}{a \cdot b}$$

## Combinaison des résultats

Lorsqu'une quantité est mesurée par plusieurs expériences ou de plusieurs façons, on est amené naturellement à combiner ces résultats pour mieux connaître cette quantité.

C'est un des sujets qui nécessite une attention particulière notamment quand il s'agit des mesures à faibles statistiques.

ici on donne la recette dans un cas idéal où on a des mesures à grandes statistiques

$$X = \frac{\sum_i \omega_i X_i}{\sum_i \omega_i} \quad \text{avec} \quad \omega_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$$

$$\frac{1}{\sigma^2} = \sum_i \frac{1}{\sigma_i^2} \quad \propto n_i$$

Attention  $\sigma_i$  est la variance. En général, le problème vient du fait qu'on a une estimation  $s_i$  de cette variance qui n'est pas toujours bien "faite".

# Propagation des incertitudes

Lorsqu'on s'intéresse à une quantité physique qui est elle-même fonction d'autres quantités mesurables on fait appel à la méthode de différentiation également dans les mêmes conditions qu'auparavant

$$z = z(x_1, x_2)$$

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} \delta x_2 + \dots$$

ordres supérieurs  
censés être négligeables ou non,

$$\overline{\delta z^2} = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2 \overline{\delta x_1^2} + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^2 \overline{\delta x_2^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{\partial z}{\partial x_2} \overline{\delta x_1 \delta x_2}$$

$$\overline{\delta z^2} = \left( \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2} \right) \begin{pmatrix} \overline{\delta x_1^2} & \overline{\delta x_1 \delta x_2} \\ \overline{\delta x_1 \delta x_2} & \overline{\delta x_2^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x_1} \\ \frac{\partial z}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

$$\left( \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2} \right) \begin{pmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \text{cov}(x_1, x_2) \\ \text{cov}(x_1, x_2) & \sigma_{x_2}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x_1} \\ \frac{\partial z}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_z^2 = D^t V D$$

La situation peut devenir plus compliquée :

$$z = z(y_1, y_2) \quad \text{avec} \quad y_1 = y_1(x_1, x_2), \quad y_2 = y_2(x_1, x_2)$$

$$\overline{\delta z^2} = \left(\frac{\partial z}{\partial y_1}\right)^2 \overline{\delta y_1^2} + \left(\frac{\partial z}{\partial y_2}\right)^2 \overline{\delta y_2^2} + 2 \left(\frac{\partial z}{\partial y_1}\right) \left(\frac{\partial z}{\partial y_2}\right) \overline{\delta y_1 \delta y_2}$$

ou

$$\overline{\delta y_1^2} = \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)^2 \overline{\delta x_1^2} + \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\right)^2 \overline{\delta x_2^2} + 2 \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \overline{\delta x_1 \delta x_2}$$

$$\begin{aligned} \overline{\delta y_1 \delta y_2} &= \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \overline{\delta x_1^2} + \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \overline{\delta x_2^2} \\ &+ \left( \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \right) \overline{\delta x_1 \delta x_2} \end{aligned}$$

on peut regrouper tout cela à l'aide d'un formalisme matriciel :

$$\overline{\sigma_z^2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial y_1} & \frac{\partial z}{\partial y_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\delta x_1^2} & \overline{\delta x_1 \delta x_2} \\ \overline{\delta x_1 \delta x_2} & \overline{\delta x_2^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial y_1} \\ \frac{\partial z}{\partial y_2} \end{pmatrix}$$

$$\overline{\sigma_z^2} = D^t (P \quad V \quad P) D$$