

Introduction à la notion de PROBABILITE

Expérience aléatoire

Une expérience est qualifiée d'aleatoire si on ne peut pas prévoir par avance son résultat et si répétée, dans les mêmes conditions, elle peut donner des résultats différents.

Le résultat d'une telle expérience peut être considéré comme un élément ω de l'ensemble des résultats possibles, Ω appelé ensemble fondamental de l'univers des possibles (sample space).

La nature de l'ensemble Ω n'est pas définie d'une manière unique. Elle dépend de l'usage qu'on veut faire des résultats :

Ex: le jet de deux dés

Ω peut être les différents couples possibles

$$\{(1,1), (1,2), \dots, (6,6)\}$$

ou la somme possible des deux dés

$$\{(2), (3), \dots, (12)\}$$

Événement :

est une proposition logique relative au résultat de l'expérience

Ex somme des deux dés > 7

$$\Rightarrow \{(4,4), (4,5), (5,5), (4,6), (5,6), (6,6)\}$$

Algèbre d'événement :

l'ensemble des événements constitue une classe \mathcal{G} des parties de Ω . On définit sur \mathcal{G} une algèbre

- si $A \in \mathcal{G}$ alors $\bar{A} \in \mathcal{G}$
- pour tout ensemble dénombrable $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{G}$
 $\cup_i A_i \in \mathcal{G}$
- $\Omega \in \mathcal{G}$

\mathcal{G} : σ -algèbre de Boole / tribu

le couple $(\Omega; \mathcal{G})$ est appelé espace probabilisable

Espace probabilisé

- système complet d'événements :

$$\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \in \mathcal{P} / \quad \forall i \neq j \quad A_i \cap A_j = \emptyset$$

$$\bigcup_i A_i = \Omega$$

Probabilité / axiomatique de Kolmogorov

On appelle une loi de probabilité sur (Ω, \mathcal{B}) une application P de \mathcal{B} dans $[0, 1]$ telle que

- $P(\Omega) = 1$
- pour tout ensemble d'événements incompatibles A_1, A_2, \dots, A_n , on a $P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$

(Ω, \mathcal{B}, P) est un espace probabilisé

Propriétés :

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A) \leq P(B)$ si $A \subset B$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(\bigcup_i A_i) \leq \sum_i P(A_i)$
- si $\{\mathbb{B}_i\}$ constitue un système d'événements ^{complet} alors $\forall A: \quad P(A) = \sum_i P(A \cap B_i)$

Probabilité conditionnelle

$P(A|B)$: probabilité conditionnelle de A sachant B

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Il s'agit d'une probabilité :

- $P(\cup_i A_i | B) = \sum_i P(A_i | B)$

Indépendance de deux événements :

A et B sont indépendants si

$$P(A|B) = P(A) \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

Formules de Bayes

1) $P(A|B) = \frac{P(B|A) P(A)}{P(B)}$

$$P(A \cap B) = P(A|B) P(B) = P(B|A) P(A)$$

$$2 \quad P(A) = \sum_i P(A \cap B_i) \quad \{B_i\} \text{ système complet}$$

$$= \sum_i P(A|B_i) P(B_i)$$

\Rightarrow

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) P(B_i)}{\sum_k P(A|B_k) P(B_k)}$$

Ex UFR de Physique a acheté 100 PC de trois marques différentes chacune a un taux de définition à marque

	nombre	€
m_1	30	2%
m_2	50	2%
m_3	20	3%

le pc attribué au chercheur λ est défectueux il est de quelle marque ?

$$P(m_1 | \text{défectueux}) = \frac{\frac{2}{100} \times \frac{30}{100}}{\frac{2}{100} \times \frac{30}{100} + \frac{2}{100} \times \frac{50}{100} + \frac{3}{100} \times \frac{20}{100}} = \frac{6}{22}$$

$$P(m_2 | \text{déf}) = \frac{10}{22}$$

$$P(m_3 | \text{déf}) = \frac{6}{22}$$

Reflexion sur la notion de probabilité

Concept théorique

ensemble fini + symétrie \Rightarrow chaque événement

élémentaire possède la même probabilité \Rightarrow

la probabilité est une affaire de dénombrement

$$P(A) = \frac{\text{nb de cas favorables}}{\text{nb de cas possibles}}$$

Or les symétries parfaites sont rares et

les ensembles considérés ne sont pas tout le temps finis

Ex le paradoxe de Bertrand