

Concepts pratiques :

vision dite objective fréquentiste

basée sur la loi des grands nombres

on répète l'expérience un grand nombre de fois et la fréquence de répétition définit la probabilité

critiques :

- cette vision ne peut probabiliser les événements rares : quelle est la probabilité qu'il neige le 22/4/04
- la probabilité dite fréquentiste est basée sur la loi des grands nombres qui considère déjà que la probabilité est déjà définie

Vision dite subjective Bayesienne

la vision objective étant limitée, la vision subjective élargit le champ d'action en faisant appel au théorème de Bayes

$$P(A|B) = \frac{Pr(B|A) P(A)}{P(B)}$$

↓ ↓
posterior prior

la probabilité d'un événement s'assujettie à
l'évolution de l'information / mesure d'incertitude

Critiques

cette probabilité dépend du choix arbitraire du priori généralement inconnu et donc il s'agit d'une probabilité qui varie avec l'observateur

Variable aléatoire (X)

c'est une application d'un ensemble probabilisé (Ω, \mathcal{G}, P) dans un autre ensemble E . E doit être probabilisable (E, \mathcal{T}) . Tout élément

$T \in \mathcal{T}$ a pour image réciproque un événement

Ex : jeu de 2 dés

$$\Omega = \{(1,1), (1,2) \dots (6,6)\} \text{ muni de } P$$

$$P(\omega) = \frac{1}{36} \quad \forall \omega \in \Omega$$

$$E = \{2, 3, \dots, 12\} \text{ somme des 2 dés}$$

$s \in E$ Application = somme des 2 dés

$$P(s=7) = P((1,6), (2,5), (3,4)) = \frac{3}{36} \times 2$$

L'application permet de transporter la loi de prob. de Ω sur E $P \rightarrow P_X$

si $E = \mathbb{R}$ on parle d'une variable aléatoire réelle

$$P_X(A) = P(\omega / X(\omega) \in A) = P(X^{-1}(A))$$

$$A \in \mathcal{B}$$

Fonction de densité de probabilité

si X est une variable discrète \Rightarrow Probabilité

si X est continue $\Rightarrow P(X=x) = 0$

\Rightarrow on introduit la notion de densité de prob.

$$P(x_{\min} < X < x_{\max}) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(x) dx$$

densité de probabilité

Fonction de répartition

$$F(x) = P(X < x)$$

F est une fonction monotone continue à gauche

si X est continue \Rightarrow

$$F(x) = \int_{x_{\min}}^x f(x') dx'$$

$$F(x_{\min}) = 0, \quad F(x_{\max}) = 1$$

$$f(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x}$$

F est plus fondamental que f

Application importante

X est une variable aléatoire réelle

$\phi(X)$ est une fonction de X (supposée dérivable)

si f, F sont respectivement f.d. et f.p. de X

quelles sont les f.d. et f.p. de ϕ (g, G) ?

- ϕ bijective

donc monotone

si ϕ est croissante alors

$$F(x) = G(\phi(x)) \text{ car } P(X < x) = P(\phi(X) < \phi(x))$$

$$P(x) = g(y) \phi'(x) \Rightarrow g(y) = \frac{f(x)}{\phi'(x)} \quad y = \phi(x)$$

si ϕ est décroissante alors

$$\phi' > 0$$

$$F(x) = 1 - G(\phi(x)) \text{ car } P(X < x) = P(\phi(X) > \phi(x))$$

$$P(x) = -g(y) \phi'(x) \Rightarrow g(y) = \frac{f(x)}{-\phi'(x)} \quad y = \phi(x)$$

donc dans les deux cas

$$\phi' < 0$$

$$g(y) = \frac{f(x)}{|\phi'(x)|}$$

- ϕ quelconque pour g donné on cherche les valeurs possibles de x
 $\phi(x) = x^2$

Les moments

Ce sont des valeurs réelles qui permettent de caractériser $f(x)$.

- $E[x^m] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m f(x) dx = \mu_m$

Espérance :

$$m = 1 \Rightarrow E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Les moments centraux.

ce sont des moments autour de μ

- $E[(x-\mu)^m] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^m f(x) dx$

Variance :

$$m = 2 \Rightarrow V = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx$$

$$\gamma_1 = \frac{E[(x-\mu)^3]}{\sigma^3}$$

coeff. d'asymétrie : skewness



$$\gamma_2 = \frac{E[(x-\mu)^4]}{\sigma^4} - 3$$

coeff d'aplatissement : kurtosis

