Instabilités hydrodynamiques quantifiées

Olivier LAFITTE

LAGA – Université de Paris 13

Séminaire Annecy le Vieux

Collaborators

- Bernard Helffer (Université Paris Sud)
- Catherine Cherfils (CEA Bruyeres le Chatel)

Outline

Outline

Outline

Outline

Outline

Contexte scientifique de l'expérience du Laser MegaJoule

Instabilité de Rayleigh-Taylor: expérience du M.I.T. dans les années 1940.
Développement des structures en champignon (explosions thermonucléaires).
Apparait dans le problème de l'implosion sous éclairement laser (attaque directe ou indirecte) d'un microballon contenant du deutérium-tritium.
Objectif: atteindre la densité critique à laquelle se déclenche la réaction de fusion.

Mise en oeuvre de l'expérience

Dimensionnement de l'expérience: connaitre l'amplification d'un défaut de sphéricité dûe aux instabilités dans les plasmas.
Formule physique (Takabe):
sur un très faible nombre de mesures obtient$\gamma = \sqrt{Agk} - \beta k V_a$,
A: Atwood, V_a: vitesse d'ablation, γ: taux de croissance de l'instabilité, k nombre d'onde de la perturbation (mode harmonique sphérique). $\Rightarrow$ Preciser le modèle physique.

Modèle de base

On considère les équations d'Euler incompressibles avec force de gravité.

Le système s'écrit classiquement

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho \vec{u}) = 0 \\ \partial_t(\rho \vec{u}) + \mathrm{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + \nabla p = \rho \vec{g} \\ \mathrm{div} \vec{u} = 0 \end{cases}$$

Une solution particulière est

$$(\rho_0(z), \vec{0}, p_0(z) = \int_{z_0}^{z} \rho_0(z') g dz')$$

Il s'agit d'étudier la stabilité linéaire de cette solution.

Modèle de base

On considère les équations d'Euler incompressibles avec force de gravité.
Le système s'écrit classiquement

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho \vec{u}) = 0 \\ \partial_t(\rho \vec{u}) + \mathrm{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + \nabla p = \rho \vec{g} \\ \mathrm{div} \vec{u} = 0 \end{cases}$$

Une solution particulière est

$$(\rho_0(z), \vec{0}, p_0(z) = \int_{z_0}^{z} \rho_0(z') g dz')$$

Il s'agit d'étudier la stabilité linéaire de cette solution.

Modèle de base

On considère les équations d'Euler incompressibles avec force de gravité.
Le système s'écrit classiquement

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho \vec{u}) = 0 \\ \partial_t(\rho \vec{u}) + \mathrm{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + \nabla p = \rho \vec{g} \\ \mathrm{div} \vec{u} = 0 \end{cases}$$

Une solution particulière est

$$(\rho_0(z), \vec{0}, p_0(z) = \int_{z_0}^{z} \rho_0(z') g dz')$$

Il s'agit d'étudier la stabilité linéaire de cette solution.

Modèle de base

On considère les équations d'Euler incompressibles avec force de gravité.
Le système s'écrit classiquement

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho \vec{u}) = 0 \\ \partial_t(\rho \vec{u}) + \mathrm{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + \nabla p = \rho \vec{g} \\ \mathrm{div} \vec{u} = 0 \end{cases}$$

Une solution particulière est

$$(\rho_0(z), \vec{0}, p_0(z) = \int_{z_0}^{z} \rho_0(z') g dz')$$

Il s'agit d'étudier la stabilité linéaire de cette solution.

Système linéarisé:

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\rho} + \rho_0'(z) w = 0 \\ \rho_0(z)\partial_t u + \partial_x p = 0 \\ \rho_0(z)\partial_t v + \partial_y p = 0 \\ \rho_0(z)\partial_t w + \partial_z p = -g\tilde{\rho} \\ \partial_x u + \partial_y v + \partial_z w = 0 \end{cases}$$

Equation obtenue sur w:

$$\partial_t \partial_z(\rho_0(z)\partial_t \partial_z w) + \rho_0(z)\partial_{t^2}^2 \Delta' w = -g\rho_0'(z)\Delta' w.$$

Système linéarisé:

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\rho} + \rho_0'(z) w = 0 \\ \rho_0(z)\partial_t u + \partial_x p = 0 \\ \rho_0(z)\partial_t v + \partial_y p = 0 \\ \rho_0(z)\partial_t w + \partial_z p = -g\tilde{\rho} \\ \partial_x u + \partial_y v + \partial_z w = 0 \end{cases}$$

Equation obtenue sur w:

$$\partial_t \partial_z (\rho_0(z)\partial_t \partial_z w) + \rho_0(z)\partial^2_{t^2}\Delta' w = -g\rho_0'(z)\Delta' w.$$

Cas modèles de Rayleigh

On considère $\hat{w}(z)e^{ik_1x+ik_2y+\gamma t}$, continue en $z=0$.

Equation (de Rayleigh):

$$\frac{d}{dz}(\rho_0(z)\frac{d\hat{w}}{dz}) - \rho_0(z)k^2\hat{w} = \frac{gk^2}{\gamma^2}(\rho_0'(z))\hat{w}.$$

a) Cas où $\rho_0(z) = \rho_- + (\rho_+ - \rho_-)1_{z>0}$:

$$w(t,x,y,z) = e^{-k|z|+ik_1x+ik_2y}(Ae^{\gamma t} + Be^{-\gamma t})$$

$$k = (k_1^2 + k_2^2)^{\frac{1}{2}}, \gamma^2 = -gk\frac{\rho_+ - \rho_-}{\rho_+ + \rho_-}.$$

Instabilité linéaire si $g < 0$ et $\rho_+ > \rho_-$ ou $g > 0$ et $\rho_+ < \rho_-$.

b) Cas où $\rho_0(z) = \rho_-$ sur $z < 0$, $\rho_- e^{\beta z}$ pour $0 < z < L_0$, ρ_+ pour $z > L_0$, avec $\rho_- e^{\beta L_0} = \rho_+$:

$\hat{w}(z,t) = A_- e^{kz}, z < 0, \hat{w} = A_+ e^{-k(z-L_0)}, z > L_0.$

Cas modèles de Rayleigh

On considère $\hat{w}(z)e^{ik_1x+ik_2y+\gamma t}$, continue en $z=0$.
Equation (de Rayleigh):

$$\frac{d}{dz}(\rho_0(z)\frac{d\hat{w}}{dz}) - \rho_0(z)k^2\hat{w} = \frac{gk^2}{\gamma^2}(\rho_0'(z))\hat{w}.$$

a) Cas où $\rho_0(z) = \rho_- + (\rho_+ - \rho_-)1_{z>0}$:

$$w(t,x,y,z) = e^{-k|z|+ik_1x+ik_2y}(Ae^{\gamma t} + Be^{-\gamma t})$$

$$k = (k_1^2+k_2^2)^{\frac{1}{2}}, \gamma^2 = -gk\frac{\rho_+ - \rho_-}{\rho_+ + \rho_-}.$$

Instabilité linéaire si $g<0$ et $\rho_+ > \rho_-$ ou $g>0$ et $\rho_+ < \rho_-$.

b) Cas où $\rho_0(z) = \rho_-$ sur $z<0$, $\rho_- e^{\beta z}$ pour $0<z<L_0$, ρ_+ pour $z>L_0$, avec $\rho_- e^{\beta L_0} = \rho_+$:
$\hat{w}(z,t) = A_- e^{kz}, z<0, \hat{w} = A_+ e^{-k(z-L_0)}, z>L_0.$

Cas modèles de Rayleigh

On considère $\hat{w}(z)e^{ik_1x+ik_2y+\gamma t}$, continue en $z=0$.
Equation (de Rayleigh):

$$\frac{d}{dz}(\rho_0(z)\frac{d\hat{w}}{dz}) - \rho_0(z)k^2\hat{w} = \frac{gk^2}{\gamma^2}(\rho_0'(z))\hat{w}.$$

a) Cas où $\rho_0(z) = \rho_- + (\rho_+ - \rho_-)1_{z>0}$:

$$w(t,x,y,z) = e^{-k|z|+ik_1x+ik_2y}(Ae^{\gamma t} + Be^{-\gamma t})$$

$$k = (k_1^2 + k_2^2)^{\frac{1}{2}}, \gamma^2 = -gk\frac{\rho_+ - \rho_-}{\rho_+ + \rho_-}.$$

Instabilité linéaire si $g < 0$ et $\rho_+ > \rho_-$ ou $g > 0$ et $\rho_+ < \rho_-$.

b) Cas où $\rho_0(z) = \rho_-$ sur $z < 0$, $\rho_- e^{\beta z}$ pour $0 < z < L_0$, ρ_+ pour $z > L_0$, avec $\rho_- e^{\beta L_0} = \rho_+$:
$\hat{w}(z,t) = A_- e^{kz}, z < 0, \hat{w} = A_+ e^{-k(z-L_0)}, z > L_0.$

Cas modèles de Rayleigh

On considère $\hat{w}(z)e^{ik_1x+ik_2y+\gamma t}$, continue en $z=0$.
Equation (de Rayleigh):

$$\frac{d}{dz}(\rho_0(z)\frac{d\hat{w}}{dz}) - \rho_0(z)k^2\hat{w} = \frac{gk^2}{\gamma^2}(\rho_0'(z))\hat{w}.$$

a) Cas où $\rho_0(z) = \rho_- + (\rho_+ - \rho_-)1_{z>0}$:

$$w(t,x,y,z) = e^{-k|z|+ik_1x+ik_2y}(Ae^{\gamma t} + Be^{-\gamma t})$$

$$k = (k_1^2 + k_2^2)^{\frac{1}{2}}, \gamma^2 = -gk\frac{\rho_+ - \rho_-}{\rho_+ + \rho_-}.$$

Instabilité linéaire si $g < 0$ et $\rho_+ > \rho_-$ ou $g > 0$ et $\rho_+ < \rho_-$.

b) Cas où $\rho_0(z) = \rho_-$ sur $z < 0$, $\rho_- e^{\beta z}$ pour $0 < z < L_0$, ρ_+ pour $z > L_0$, avec $\rho_- e^{\beta L_0} = \rho_+$:
$\hat{w}(z,t) = A_- e^{kz}, z < 0, \hat{w} = A_+ e^{-k(z-L_0)}, z > L_0.$

Cas modèles de Rayleigh

On considère $\hat{w}(z)e^{ik_1x+ik_2y+\gamma t}$, continue en $z=0$.
Equation (de Rayleigh):

$$\frac{d}{dz}(\rho_0(z)\frac{d\hat{w}}{dz}) - \rho_0(z)k^2\hat{w} = \frac{gk^2}{\gamma^2}(\rho_0'(z))\hat{w}.$$

a) Cas où $\rho_0(z) = \rho_- + (\rho_+ - \rho_-)1_{z>0}$:

$$w(t,x,y,z) = e^{-k|z|+ik_1x+ik_2y}(Ae^{\gamma t} + Be^{-\gamma t})$$

$$k = (k_1^2 + k_2^2)^{\frac{1}{2}}, \gamma^2 = -gk\frac{\rho_+ - \rho_-}{\rho_+ + \rho_-}.$$

Instabilité linéaire si $g < 0$ et $\rho_+ > \rho_-$ ou $g > 0$ et $\rho_+ < \rho_-$.

b) Cas où $\rho_0(z) = \rho_-$ sur $z < 0$, $\rho_- e^{\beta z}$ pour $0 < z < L_0$, ρ_+ pour $z > L_0$, avec $\rho_- e^{\beta L_0} = \rho_+$:

$\hat{w}(z,t) = A_- e^{kz}, z < 0, \hat{w} = A_+ e^{-k(z-L_0)}, z > L_0.$

Cas modèles de Rayleigh

On considère $\hat{w}(z)e^{ik_1x+ik_2y+\gamma t}$, continue en $z=0$.
Equation (de Rayleigh):

$$\frac{d}{dz}(\rho_0(z)\frac{d\hat{w}}{dz})-\rho_0(z)k^2\hat{w}=\frac{gk^2}{\gamma^2}(\rho_0'(z))\hat{w}.$$

a) Cas où $\rho_0(z)=\rho_-+(\rho_+-\rho_-)1_{z>0}$:

$$w(t,x,y,z)=e^{-k|z|+ik_1x+ik_2y}(Ae^{\gamma t}+Be^{-\gamma t})$$

$$k=(k_1^2+k_2^2)^{\frac{1}{2}},\gamma^2=-gk\frac{\rho_+-\rho_-}{\rho_++\rho_-}.$$

Instabilité linéaire si $g<0$ et $\rho_+>\rho_-$ ou $g>0$ et $\rho_+<\rho_-$.

b) Cas où $\rho_0(z)=\rho_-$ sur $z<0$, $\rho_-e^{\beta z}$ pour $0<z<L_0$, ρ_+ pour $z>L_0$, avec $\rho_-e^{\beta L_0}=\rho_+$:
$\hat{w}(z,t)=A_-e^{kz},z<0,\hat{w}=A_+e^{-k(z-L_0)},z>L_0.$

Cas modèles de Rayleigh

$\Rightarrow$ Condition aux limites (C.L.):
$\hat{w}'(0) = k\hat{w}(0)$, $\hat{w}'(L_0) = -k\hat{w}(L_0)$.
Equation de Rayleigh à coefficients constants. Equation caractéristique $r^2 + \beta r - (\frac{g\beta}{\gamma^2} + 1) = 0$.

i) Cas $\beta^2 > -4k^2(1 + \frac{g\beta}{\gamma^2})$: deux racines réelles. Solution:

$$\hat{w}(z) = e^{-\frac{\beta z}{2}}(C\cosh sz + D\sinh sz), s^2 = \frac{\beta^2}{4} + k^2(1 + \frac{g\beta}{\gamma^2}).$$

C.L. $\Rightarrow$ système homogène sur (C, D).
Déterminant:
$s\sinh sL_0 + (k + \frac{\beta}{2})\cosh sL_0 - (-k + \frac{\beta}{2})(\cosh sL_0 + \frac{k+\frac{\beta}{2}}{s}\sinh sL_0)$

Cas modèles de Rayleigh

$\Rightarrow$ Condition aux limites (C.L.):
$\hat{w}'(0) = k\hat{w}(0)$, $\hat{w}'(L_0) = -k\hat{w}(L_0)$.
Equation de Rayleigh à coefficients constants. Equation caractéristique $r^2 + \beta r - (\frac{g\beta}{\gamma^2} + 1) = 0$.
i) Cas $\beta^2 > -4k^2(1 + \frac{g\beta}{\gamma^2})$: deux racines réelles. Solution:

$$\hat{w}(z) = e^{-\frac{\beta z}{2}}(C\cosh sz + D\sinh sz), s^2 = \frac{\beta^2}{4} + k^2(1 + \frac{g\beta}{\gamma^2}).$$

C.L. $\Rightarrow$ système homogène sur (C, D).
Déterminant:
$s\sinh sL_0 + (k + \frac{\beta}{2})\cosh sL_0 - (-k + \frac{\beta}{2})(\cosh sL_0 + \frac{k+\frac{\beta}{2}}{s}\sinh sL_0)$

Cas modèles de Rayleigh

$\Rightarrow$ Condition aux limites (C.L.):
$\hat{w}'(0) = k\hat{w}(0)$, $\hat{w}'(L_0) = -k\hat{w}(L_0)$.
Equation de Rayleigh à coefficients constants. Equation caractéristique $r^2 + \beta r - (\frac{g\beta}{\gamma^2} + 1) = 0$.
i) Cas $\beta^2 > -4k^2(1 + \frac{g\beta}{\gamma^2})$: deux racines réelles. Solution:

$$\hat{w}(z) = e^{-\frac{\beta z}{2}}(C \cosh sz + D \sinh sz), s^2 = \frac{\beta^2}{4} + k^2(1 + \frac{g\beta}{\gamma^2}).$$

C.L. $\Rightarrow$ système homogène sur (C, D).
Déterminant:
$s \sinh sL_0 + (k + \frac{\beta}{2}) \cosh sL_0 - (-k + \frac{\beta}{2})(\cosh sL_0 + \frac{k+\frac{\beta}{2}}{s} \sinh sL_0)$

Cas modèles de Rayleigh

Existence d'une solution non nulle: $\tanh sL_0 = \dfrac{-2ks}{s^2 + k^2 - \frac{\beta^2}{4}}$.

ii) Cas $\beta^2 > -4k^2(1 + \frac{g\beta}{\gamma^2})$: deux racines complexes conjuguées.
Equation (on remplace s par $i\omega$, $\omega^2 = -\frac{\beta^2}{4} - k^2(1 + \frac{g\beta}{\gamma^2})$):

$$\tan \omega L_0 = \frac{2k\omega}{\omega^2 + \frac{\beta^2}{4} - k^2}$$

Cas i): aucune solution. Cas ii) une infinité de solutions, unique solution ω_n dans chaque intervalle $]\frac{\pi}{2L_0} + (n-1)\frac{\pi}{L_0}, \frac{\pi}{2L_0} + n\frac{\pi}{L_0}[$.

Cas modèles de Rayleigh

Existence d'une solution non nulle: $\tanh sL_0 = \dfrac{-2ks}{s^2 + k^2 - \frac{\beta^2}{4}}$.

ii) Cas $\beta^2 > -4k^2(1 + \frac{g\beta}{\gamma^2})$: deux racines complexes conjuguées.
Equation (on remplace s par $i\omega$, $\omega^2 = -\frac{\beta^2}{4} - k^2(1 + \frac{g\beta}{\gamma^2})$):

$$\tan \omega L_0 = \frac{2k\omega}{\omega^2 + \frac{\beta^2}{4} - k^2}$$

Cas i): aucune solution. Cas ii) une infinité de solutions, unique solution ω_n dans chaque intervalle $]\frac{\pi}{2L_0} + (n-1)\frac{\pi}{L_0}, \frac{\pi}{2L_0} + n\frac{\pi}{L_0}[$.

Cas modèles de Rayleigh

Existence d'une solution non nulle: $\tanh sL_0 = \dfrac{-2ks}{s^2 + k^2 - \frac{\beta^2}{4}}$.

ii) Cas $\beta^2 > -4k^2(1 + \frac{g\beta}{\gamma^2})$: deux racines complexes conjuguées. Equation (on remplace s par $i\omega$, $\omega^2 = -\frac{\beta^2}{4} - k^2(1 + \frac{g\beta}{\gamma^2})$):

$$\tan \omega L_0 = \frac{2k\omega}{\omega^2 + \frac{\beta^2}{4} - k^2}$$

Cas i): aucune solution. Cas ii) une infinité de solutions, unique solution ω_n dans chaque intervalle $]\frac{\pi}{2L_0} + (n-1)\frac{\pi}{L_0}, \frac{\pi}{2L_0} + n\frac{\pi}{L_0}[$.

Cas de Cherfils-L.

Deuxième exemple marrant (car faisant intervenir les fonctions spéciales)

$$\rho_0(z) = \rho_- + \frac{\rho_+ - \rho_-}{2L_0}(z + L_0)$$

Changement de variable dans l'équation de Rayleigh $X = \rho_0(z)$, $\theta = \rho_0'(z) = \frac{\rho_+ - \rho_-}{2L_0}$:

$$-\frac{d}{dX}(X\frac{dw}{dX})\theta^2 + k^2(X - \frac{g\theta}{\gamma^2})w = 0$$

Avec $w(X) = e^{-\frac{k}{\theta}X} f(2\frac{kx}{\theta})$, $a = \frac{1}{2}(1 - \frac{gk}{\gamma^2})$

$$tf'' + (1-t)f' - af = 0$$

Equation de Kummer (fonctions hypergéométriques confluentes).

Cas de Cherfils-L.

Deuxième exemple marrant (car faisant intervenir les fonctions spéciales)

$$\rho_0(z) = \rho_- + \frac{\rho_+ - \rho_-}{2L_0}(z + L_0)$$

Changement de variable dans l'équation de Rayleigh $X = \rho_0(z)$, $\theta = \rho_0'(z) = \frac{\rho_+ - \rho_-}{2L_0}$:

$$-\frac{d}{dX}(X\frac{dw}{dX})\theta^2 + k^2(X - \frac{g\theta}{\gamma^2})w = 0$$

Avec $w(X) = e^{-\frac{k}{\theta}X} f(2\frac{kx}{\theta})$, $a = \frac{1}{2}(1 - \frac{gk}{\gamma^2})$

$$tf'' + (1-t)f' - af = 0$$

Equation de Kummer (fonctions hypergéométriques confluentes).

Cas de Cherfils-L.

Deuxième exemple marrant (car faisant intervenir les fonctions spéciales)

$$\rho_0(z) = \rho_- + \frac{\rho_+ - \rho_-}{2L_0}(z + L_0)$$

Changement de variable dans l'équation de Rayleigh $X = \rho_0(z)$, $\theta = \rho_0'(z) = \frac{\rho + -\rho_-}{2L_0}$:

$$-\frac{d}{dX}(X\frac{dw}{dX})\theta^2 + k^2(X - \frac{g\theta}{\gamma^2})w = 0$$

Avec $w(X) = e^{-\frac{k}{\theta}X} f(2\frac{kx}{\theta})$, $a = \frac{1}{2}(1 - \frac{gk}{\gamma^2})$

$$tf'' + (1 - t)f' - af = 0$$

Equation de Kummer (fonctions hypergéométriques confluentes).

Cas de Cherfils-L.

Solutions $f = AM(a,1,t) + BU(a,1,t)$.

Notant $t_\pm = 2kL_0(\frac{\rho_+ + \rho_-}{\rho_+ - \rho_-} \pm 1)$, relation de dispersion (issue des C.L.)

$$\begin{array}{c}(M(a,1,t_-) - M'(a,1,t_-))U'(a,1,t_+) = \\ M'(a,1,t_+)(U(a,1t_-) - U'(a,1,t_-))\end{array},$$

Comportement des a

$$-a_n \simeq \frac{\pi^2 n^2}{4kL_0}((1+A)^{\frac{1}{2}} + (1-A)^{\frac{1}{2}})^2$$

$$\gamma_n^2 \simeq \frac{gk}{((1+A)^{\frac{1}{2}} + (1-A)^{\frac{1}{2}})^2} \frac{2kL_0}{\pi^2 n^2}$$

Cas de Cherfils-L.

Solutions $f = AM(a,1,t) + BU(a,1,t)$.
Notant $t_\pm = 2kL_0(\frac{\rho_+ + \rho_-}{\rho_+ - \rho_-} \pm 1)$, relation de dispersion (issue des C.L.)

$$\begin{array}{c}(M(a,1,t_-) - M'(a,1,t_-))U'(a,1,t_+) = \\ M'(a,1,t_+)(U(a,1t_-) - U'(a,1,t_-))\end{array},$$

Comportement des a

$$-a_n \simeq \frac{\pi^2 n^2}{4kL_0}((1+A)^{\frac{1}{2}} + (1-A)^{\frac{1}{2}})^2$$

$$\gamma_n^2 \simeq \frac{gk}{((1+A)^{\frac{1}{2}} + (1-A)^{\frac{1}{2}})^2} \frac{2kL_0}{\pi^2 n^2}$$

Obtention de Schrodinger

Observation: dès Rayleigh et modèle exponentiel, taux de croissance d'instabilité ou de stabilité quantifiés.

Pas pour le cas discontinu.

$$-k^{-2}\frac{d}{dz}(\rho_0(z)\frac{dw}{dz})+(\rho_0(z)+\frac{g}{\gamma^2}\rho_0'(z))w = 0 \Leftrightarrow k^{-2}v''+V(k,z,\gamma)v = 0$$

avec $v = (\rho_0(z))^{\frac{1}{2}}w$,

Potentiel $V(k,z,\gamma) = 1 + \frac{g}{\gamma^2}\frac{\rho_0'(z)}{\rho_0(z)} + k^{-2}\rho_0(z)^{-\frac{1}{2}}\frac{d^2}{dz^2}(\rho_0(z))^{\frac{1}{2}}$.

Obtention de Schrodinger

Observation: dès Rayleigh et modèle exponentiel, taux de croissance d'instabilité ou de stabilité quantifiés.
Pas pour le cas discontinu.

$$-k^{-2}\frac{d}{dz}(\rho_0(z)\frac{dw}{dz})+(\rho_0(z)+\frac{g}{\gamma^2}\rho_0'(z))w = 0 \Leftrightarrow k^{-2}v''+V(k,z,\gamma)v = 0$$

avec $v = (\rho_0(z))^{\frac{1}{2}}w$,
Potentiel $V(k,z,\gamma) = 1 + \frac{g}{\gamma^2}\frac{\rho_0'(z)}{\rho_0(z)} + k^{-2}\rho_0(z)^{-\frac{1}{2}}\frac{d^2}{dz^2}(\rho_0(z))^{\frac{1}{2}}$.

Obtention de Schrodinger

Observation: dès Rayleigh et modèle exponentiel, taux de croissance d'instabilité ou de stabilité quantifiés.
Pas pour le cas discontinu.

$$-k^{-2}\frac{d}{dz}(\rho_0(z)\frac{dw}{dz})+(\rho_0(z)+\frac{g}{\gamma^2}\rho_0'(z))w=0 \Leftrightarrow k^{-2}v''+V(k,z,\gamma)v=0$$

avec $v=(\rho_0(z))^{\frac{1}{2}}w$,
Potentiel $V(k,z,\gamma)=1+\frac{g}{\gamma^2}\frac{\rho_0'(z)}{\rho_0(z)}+k^{-2}\rho_0(z)^{-\frac{1}{2}}\frac{d^2}{dz^2}(\rho_0(z))^{\frac{1}{2}}$.

Obtention d'un problème de Sturm-Liouville

Conditions aux limites

$$v'(a) = \frac{1}{2}\frac{\rho_0'}{\rho_0}(a)v(a) + kv(a), v'(b) = \frac{1}{2}\frac{\rho_0'}{\rho_0}(b)v(b) - kv(b)$$

Changement de paramètre $h = k^{-1}$ (haute fréquence= semi-classique)

Equation $-h^2\frac{d^2v}{dz^2} + U(z,\gamma,h)v = 0$ sur $]a,b[$.

Obtention d'un problème de Sturm-Liouville

Conditions aux limites

$$v'(a) = \frac{1}{2}\frac{\rho_0'}{\rho_0}(a)v(a) + kv(a), v'(b) = \frac{1}{2}\frac{\rho_0'}{\rho_0}(b)v(b) - kv(b)$$

Changement de paramètre $h = k^{-1}$ (haute fréquence= semi-classique)

Equation $-h^2\frac{d^2v}{dz^2} + U(z,\gamma,h)v = 0$ sur $]a,b[$.

Obtention d'un problème de Sturm-Liouville

Conditions aux limites

$$v'(a) = \frac{1}{2}\frac{\rho_0'}{\rho_0}(a)v(a) + kv(a), v'(b) = \frac{1}{2}\frac{\rho_0'}{\rho_0}(b)v(b) - kv(b)$$

Changement de paramètre $h = k^{-1}$ (haute fréquence= semi-classique)

Equation $-h^2\frac{d^2v}{dz^2} + U(z,\gamma,h)v = 0$ sur $]a,b[$.

Obtention de γ^2 comme valeur propre

Définissons

$$P(h,\delta). = -h^2 \frac{d}{dz}(\rho_0(z)\frac{d}{dz}. + (\rho_0(z) + \delta\rho_0'(z))..$$

Problème à résoudre $P(h, \frac{g}{\gamma^2})w = 0$ (+C.L.).

Si $\rho_0(z) \geq \rho_{min} > 0$ (pas de vide), $P(h,0)$ opérateur bijectif bicontinu coercif de H^1 dans H^{-1}.

$\Rightarrow P(h,0)^{-\frac{1}{2}}$ bijectif de L^2 dans H^1 ou de H^{-1} dans L^2.

$\varphi \to \rho_0'(z)\varphi$ bijectif de H^1 dans H^{-1}.

Problème équivalent à

$$K(h)\tilde{u} =_{def} P(h,0)^{-\frac{1}{2}}\rho_0'(z)P(h,0)^{-\frac{1}{2}}\tilde{u} = -\frac{\gamma^2}{g}\tilde{u}$$

Opérateur compact sur L^2 donc spectre (éventuellement vide).

Obtention de γ^2 comme valeur propre

Définissons

$$P(h,\delta). = -h^2\frac{d}{dz}(\rho_0(z)\frac{d}{dz}. + (\rho_0(z)+\delta\rho_0'(z))..$$

Problème à résoudre $P(h,\frac{g}{\gamma^2})w = 0$ (+C.L.).
Si $\rho_0(z) \geq \rho_{min} > 0$ (pas de vide), $P(h,0)$ opérateur bijectif bicontinu coercif de H^1 dans H^{-1}.
$\Rightarrow P(h,0)^{-\frac{1}{2}}$ bijectif de L^2 dans H^1 ou de H^{-1} dans L^2.
$\varphi \to \rho_0'(z)\varphi$ bijectif de H^1 dans H^{-1}.
Problème équivalent à

$$K(h)\tilde{u} =_{def} P(h,0)^{-\frac{1}{2}}\rho_0'(z)P(h,0)^{-\frac{1}{2}}\tilde{u} = -\frac{\gamma^2}{g}\tilde{u}$$

Opérateur compact sur L^2 donc spectre (éventuellement vide).

Obtention de γ^2 comme valeur propre

Définissons

$$P(h,\delta). = -h^2 \frac{d}{dz}(\rho_0(z)\frac{d}{dz}. + (\rho_0(z) + \delta\rho_0'(z))..$$

Problème à résoudre $P(h, \frac{g}{\gamma^2})w = 0$ (+C.L.).
Si $\rho_0(z) \geq \rho_{min} > 0$ (pas de vide), $P(h,0)$ opérateur bijectif bicontinu coercif de H^1 dans H^{-1}.
$\Rightarrow P(h,0)^{-\frac{1}{2}}$ bijectif de L^2 dans H^1 ou de H^{-1} dans L^2.
$\varphi \to \rho_0'(z)\varphi$ bijectif de H^1 dans H^{-1}.
Problème équivalent à

$$K(h)\tilde{u} =_{def} P(h,0)^{-\frac{1}{2}}\rho_0'(z)P(h,0)^{-\frac{1}{2}}\tilde{u} = -\frac{\gamma^2}{g}\tilde{u}$$

Opérateur compact sur L^2 donc spectre (éventuellement vide).

Obtention de γ^2 comme valeur propre

Définissons

$$P(h,\delta). = -h^2\frac{d}{dz}(\rho_0(z)\frac{d}{dz}. + (\rho_0(z) + \delta\rho_0'(z))..$$

Problème à résoudre $P(h, \frac{g}{\gamma^2})w = 0$ (+C.L.).
Si $\rho_0(z) \geq \rho_{min} > 0$ (pas de vide), $P(h,0)$ opérateur bijectif bicontinu coercif de H^1 dans H^{-1}.
$\Rightarrow P(h,0)^{-\frac{1}{2}}$ bijectif de L^2 dans H^1 ou de H^{-1} dans L^2.
$\varphi \rightarrow \rho_0'(z)\varphi$ bijectif de H^1 dans H^{-1}.
Problème équivalent à

$$K(h)\tilde{u} =_{def} P(h,0)^{-\frac{1}{2}}\rho_0'(z)P(h,0)^{-\frac{1}{2}}\tilde{u} = -\frac{\gamma^2}{g}\tilde{u}$$

Opérateur compact sur L^2 donc spectre (éventuellement vide).

Notation: $K_0(z) = \frac{\rho_0'(z)}{\rho_0(z)}$ (inverse longueur de mélange $L_0(z) \geq 0$)

Résultat (formel): si ρ_0 de classe C^4 et K_0 admet un unique minimum non dégénéré, valeurs de γ quantifiées à k grand:

$$\gamma_n^2 = (\frac{|g|}{L_{min}}(1 + h(2n + 1 + h^{\frac{1}{2}}\varphi_n(h)(\frac{K''(x_{min})}{2})^{\frac{1}{2}}))^{\frac{1}{2}}$$

correspond à une unique fonction propre.

Lorsque k tend vers $+\infty$, tous les γ_n convergent vers $(\frac{|g|}{L_{min}})^{\frac{1}{2}}$ (Landau).

A k fixé, $n \to +\infty$, $\gamma_n \to 0$.

Notation: $K_0(z) = \frac{\rho_0'(z)}{\rho_0(z)}$ (inverse longueur de mélange $L_0(z) \geq 0$)
Résultat (formel): si ρ_0 de classe C^4 et K_0 admet un unique minimum non dégénéré, valeurs de γ quantifiées à k grand:

$$\gamma_n^2 = (\frac{|g|}{L_{min}}(1 + h(2n+1+h^{\frac{1}{2}}\varphi_n(h)(\frac{K''(x_{min})}{2})^{\frac{1}{2}}))^{\frac{1}{2}}$$

correspond à une unique fonction propre.
Lorsque k tend vers $+\infty$, tous les γ_n convergent vers $(\frac{|g|}{L_{min}})^{\frac{1}{2}}$ (Landau).
A k fixé, $n \to +\infty$, $\gamma_n \to 0$.

Notation: $K_0(z) = \frac{\rho_0'(z)}{\rho_0(z)}$ (inverse longueur de mélange $L_0(z) \geq 0$)
Résultat (formel): si ρ_0 de classe C^4 et K_0 admet un unique minimum non dégénéré, valeurs de γ quantifiées à k grand:

$$\gamma_n^2 = (\frac{|g|}{L_{min}}(1 + h(2n + 1 + h^{\frac{1}{2}}\varphi_n(h)(\frac{K''(x_{min})}{2})^{\frac{1}{2}}))^{\frac{1}{2}}$$

correspond à une unique fonction propre.
Lorsque k tend vers $+\infty$, tous les γ_n convergent vers $(\frac{|g|}{L_{min}})^{\frac{1}{2}}$ (Landau).
A k fixé, $n \to +\infty$, $\gamma_n \to 0$.

Notation: $K_0(z) = \frac{\rho_0'(z)}{\rho_0(z)}$ (inverse longueur de mélange $L_0(z) \geq 0$)
Résultat (formel): si ρ_0 de classe C^4 et K_0 admet un unique minimum non dégénéré, valeurs de γ quantifiées à k grand:

$$\gamma_n^2 = (\frac{|g|}{L_{min}}(1 + h(2n + 1 + h^{\frac{1}{2}}\varphi_n(h)(\frac{K''(x_{min})}{2})^{\frac{1}{2}}))^{\frac{1}{2}}$$

correspond à une unique fonction propre.
Lorsque k tend vers $+\infty$, tous les γ_n convergent vers $(\frac{|g|}{L_{min}})^{\frac{1}{2}}$ (Landau).
A k fixé, $n \to +\infty$, $\gamma_n \to 0$.

Preuve formelle

Avec $w = \rho_0^{\frac{1}{2}} u$,

$$-k^{-2}w'' + (1 + \frac{g}{\gamma^2} K_0(z) + k^{-2} r(z))w = 0$$

où $K_0(z) = \frac{1}{L_{min}} + \frac{1}{2} K_0''(z_{min})(z - z_{min})^2 + (z - z_{min})^3 g(z)$.

Changement de variable $X = \alpha k^{\frac{1}{2}}(z - z_{min})$

$$-\frac{d^2w}{dX^2} + [k\alpha^{-2}(1 + \frac{g}{\gamma^2 L_{min}}) + \frac{1}{2}\alpha^{-4} K_0''(z_{min}) X^2 \\ + \alpha^{-5} k^{-\frac{1}{2}} X^3 g(z_{min} + \alpha^{-1} k^{-\frac{1}{2}} X) + k^{-1}\alpha^{-2} r]w = 0$$

Avec $\alpha^4 = \frac{K_0''(z_{min})}{2}$, et spectre de $-w'' + X^2 w$ constitué des $2n+1 = E_n$, par perturbation

$$-\frac{d^2}{dX^2} + (X^2 + \alpha^{-5} k^{-\frac{1}{2}} X^3 g + \alpha^{-2} k^{-1} r)$$

a pour spectre $E_n + k^{-\frac{1}{2}} \varphi_n(k^{-1})$ pour $n \geq N$ dès que $k \geq k_0$.

Avec $\alpha^4 = \frac{K_0''(z_{min})}{2}$, et spectre de $-w'' + X^2 w$ constitué des $2n + 1 = E_n$, par perturbation

$$-\frac{d^2}{dX^2} + (X^2 + \alpha^{-5} k^{-\frac{1}{2}} X^3 g + \alpha^{-2} k^{-1} r)$$

a pour spectre $E_n + k^{-\frac{1}{2}} \varphi_n(k^{-1})$ pour $n \geq N$ dès que $k \geq k_0$.

Spectre de
$-\frac{\alpha^2}{k}\frac{d^2}{dX^2} + (1 + \frac{g}{\gamma^2 L_{min}} + X^2 + \alpha^{-5}k^{-\frac{1}{2}}X^3 g + \alpha^{-2}k^{-1}r)$ est

$$\lambda_n = \frac{\alpha^2}{k}(E_n + k^{-\frac{1}{2}}\varphi_n(k^{-1})) + 1 + \frac{g}{\gamma^2 L_{min}}$$

Pour tout
$\gamma_n = (\frac{|g|}{L_{min}})^{\frac{1}{2}}(1 + k^{-1}(2n + 1 + k^{-\frac{1}{2}}\varphi_n(k^{-1}))(\frac{K_0''(z_{min})}{2})^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}$,
il correspond une fonction propre.
Résultats limites ainsi obtenus:
$k \to +\infty$ tous les γ_n convergent vers la même valeur $\sqrt{\frac{|g|}{L_{min}}}$
$n \to +\infty$ à k fixé, γ_n tend vers 0.

Spectre de
$-\frac{\alpha^2}{k}\frac{d^2}{dX^2} + (1 + \frac{g}{\gamma^2 L_{min}} + X^2 + \alpha^{-5}k^{-\frac{1}{2}}X^3 g + \alpha^{-2}k^{-1}r)$ est

$$\lambda_n = \frac{\alpha^2}{k}(E_n + k^{-\frac{1}{2}}\varphi_n(k^{-1})) + 1 + \frac{g}{\gamma^2 L_{min}}$$

Pour tout
$\gamma_n = (\frac{|g|}{L_{min}})^{\frac{1}{2}}(1 + k^{-1}(2n + 1 + k^{-\frac{1}{2}}\varphi_n(k^{-1}))(\frac{K_0''(z_{min})}{2})^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}$,
il correspond une fonction propre.

Résultats limites ainsi obtenus:

$k \to +\infty$ tous les γ_n convergent vers la même valeur $\sqrt{\frac{|g|}{L_{min}}}$

$n \to +\infty$ à k fixé, γ_n tend vers 0.

Spectre de
$-\frac{\alpha^2}{k}\frac{d^2}{dX^2} + (1 + \frac{g}{\gamma^2 L_{min}} + X^2 + \alpha^{-5}k^{-\frac{1}{2}}X^3 g + \alpha^{-2}k^{-1}r)$ est

$$\lambda_n = \frac{\alpha^2}{k}(E_n + k^{-\frac{1}{2}}\varphi_n(k^{-1})) + 1 + \frac{g}{\gamma^2 L_{min}}$$

Pour tout
$\gamma_n = (\frac{|g|}{L_{min}})^{\frac{1}{2}}(1 + k^{-1}(2n + 1 + k^{-\frac{1}{2}}\varphi_n(k^{-1}))(\frac{K_0''(z_{min})}{2})^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}$,
il correspond une fonction propre.
Résultats limites ainsi obtenus:
$k \to +\infty$ tous les γ_n convergent vers la même valeur $\sqrt{\frac{|g|}{L_{min}}}$
$n \to +\infty$ à k fixé, γ_n tend vers 0.

Spectre de
$-\frac{\alpha^2}{k}\frac{d^2}{dX^2} + (1 + \frac{g}{\gamma^2 L_{min}} + X^2 + \alpha^{-5}k^{-\frac{1}{2}}X^3 g + \alpha^{-2}k^{-1}r)$ est

$$\lambda_n = \frac{\alpha^2}{k}(E_n + k^{-\frac{1}{2}}\varphi_n(k^{-1})) + 1 + \frac{g}{\gamma^2 L_{min}}$$

Pour tout
$\gamma_n = (\frac{|g|}{L_{min}})^{\frac{1}{2}}(1 + k^{-1}(2n + 1 + k^{-\frac{1}{2}}\varphi_n(k^{-1}))(\frac{K_0''(z_{min})}{2})^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}$,
il correspond une fonction propre.
Résultats limites ainsi obtenus:
$k \to +\infty$ tous les γ_n convergent vers la même valeur $\sqrt{\frac{|g|}{L_{min}}}$
$n \to +\infty$ à k fixé, γ_n tend vers 0.

Quelques résultats de théorie spectrale

Résultat 1: Titchmarsh (ne s'applique pas pour les instabilités hydrodynamiques):
Si $V(k, z, \gamma) \to +\infty$ si $|z| \to +\infty$, infinité quantifiée de valeurs propres pour $-\frac{d^2}{dz^2} + V$

Résultat 2 (simple) sur R:
$\xi^2 + V(z) = E$ est une courbe du plan (z, ξ). Si la surface de la région enclose dans cette courbe (non fermée) pour E proche du maximum de V, alors, par la formule de Weyl, le nombre de valeurs propres est $+\infty$.

Résultat 3 (L., Helffer-L.) Si $K_0(z)$ a pour propriété d'être positif, tendant vers 0 en $\pm\infty$, il y a une infinité quantifiée de valeurs de γ, notée γ_n, qui tend vers 0 avec n lorsque $g < 0$.

Quelques résultats de théorie spectrale

Résultat 1: Titchmarsh (ne s'applique pas pour les instabilités hydrodynamiques):
Si $V(k,z,\gamma) \to +\infty$ si $|z| \to +\infty$, infinité quantifiée de valeurs propres pour $-\frac{d^2}{dz^2} + V$
Résultat 2 (simple) sur R:
$\xi^2 + V(z) = E$ est une courbe du plan (z, ξ). Si la surface de la région enclose dans cette courbe (non fermée) pour E proche du maximum de V, alors, par la formule de Weyl, le nombre de valeurs propres est $+\infty$.
Résultat 3 (L., Helffer-L.) Si $K_0(z)$ a pour propriété d'être positif, tendant vers 0 en $\pm\infty$, il y a une infinité quantifiée de valeurs de γ, notée γ_n, qui tend vers 0 avec n lorsque $g < 0$.

Quelques résultats de théorie spectrale

Résultat 1: Titchmarsh (ne s'applique pas pour les instabilités hydrodynamiques):
Si $V(k, z, \gamma) \to +\infty$ si $|z| \to +\infty$, infinité quantifiée de valeurs propres pour $-\frac{d^2}{dz^2} + V$
Résultat 2 (simple) sur R:
$\xi^2 + V(z) = E$ est une courbe du plan (z, ξ). Si la surface de la région enclose dans cette courbe (non fermée) pour E proche du maximum de V, alors, par la formule de Weyl, le nombre de valeurs propres est $+\infty$.
Résultat 3 (L., Helffer-L.) Si $K_0(z)$ a pour propriété d'être positif, tendant vers 0 en $\pm\infty$, il y a une infinité quantifiée de valeurs de γ, notée γ_n, qui tend vers 0 avec n lorsque $g < 0$.

Idées de preuves

Résultat de Sturm 1836:

Si on regarde sur un intervalle (a, b) avec conditions aux limites de type mixte en a et b, $-\frac{d^2}{dz^2} + V$ sur $]a, b[$ a une infinité quantifiée de valeurs propres.

1) Si u et v sont solutions de $-u'' + g_1 u = 0$ et de $-v'' + g_2 v = 0$ sur $[a, b]$ avec $g_1 > g_2$ sur $[a, b]$ et mêmes conditions aux limites alors entre deux zéros consécutifs de u il y a au moins un zéro de v

2) si de plus $v(a) = u(a) = \sin\alpha$, $v'(a) = u'(a) = -\cos\alpha$, u a m zéros $\Rightarrow$ v a m zéros au moins, inférieurs à ceux de u

3) Le nombre de zéros de $-w'' + Vw = \lambda w$ est une fonction croissante de λ.

Idées de preuves

Résultat de Sturm 1836:
Si on regarde sur un intervalle (a, b) avec conditions aux limites de type mixte en a et b, $-\frac{d^2}{dz^2} + V$ sur $]a, b[$ a une infinité quantifiée de valeurs propres.

1) Si u et v sont solutions de $-u'' + g_1 u = 0$ et de $-v'' + g_2 v = 0$ sur $[a, b]$ avec $g_1 > g_2$ sur $[a, b]$ et mêmes conditions aux limites alors entre deux zéros consécutifs de u il y a au moins un zéro de v
2) si de plus $v(a) = u(a) = \sin\alpha$, $v'(a) = u'(a) = -\cos\alpha$, u a m zéros $\Rightarrow$ v a m zéros au moins, inférieurs à ceux de u
3) Le nombre de zéros de $-w'' + Vw = \lambda w$ est une fonction croissante de λ.

Idées de preuves

Résultat de Sturm 1836:
Si on regarde sur un intervalle (a, b) avec conditions aux limites de type mixte en a et b, $-\frac{d^2}{dz^2} + V$ sur $]a, b[$ a une infinité quantifiée de valeurs propres.
1) Si u et v sont solutions de $-u'' + g_1 u = 0$ et de $-v'' + g_2 v = 0$ sur $[a, b]$ avec $g_1 > g_2$ sur $[a, b]$ et mêmes conditions aux limites alors entre deux zéros consécutifs de u il y a au moins un zéro de v
2) si de plus $v(a) = u(a) = \sin\alpha$, $v'(a) = u'(a) = -\cos\alpha$, u a m zéros $\Rightarrow$ v a m zéros au moins, inférieurs à ceux de u
3) Le nombre de zéros de $-w'' + Vw = \lambda w$ est une fonction croissante de λ.

Idées de preuves

Résultat de Sturm 1836:

Si on regarde sur un intervalle (a, b) avec conditions aux limites de type mixte en a et b, $-\frac{d^2}{dz^2} + V$ sur $]a, b[$ a une infinité quantifiée de valeurs propres.

1) Si u et v sont solutions de $-u'' + g_1 u = 0$ et de $-v'' + g_2 v = 0$ sur $[a, b]$ avec $g_1 > g_2$ sur $[a, b]$ et mêmes conditions aux limites alors entre deux zéros consécutifs de u il y a au moins un zéro de v

2) si de plus $v(a) = u(a) = \sin\alpha$, $v'(a) = u'(a) = -\cos\alpha$, u a m zéros $\Rightarrow$ v a m zéros au moins, inférieurs à ceux de u

3) Le nombre de zéros de $-w'' + Vw = \lambda w$ est une fonction croissante de λ.

Idées de preuves

Résultat de Sturm 1836:
Si on regarde sur un intervalle (a, b) avec conditions aux limites de type mixte en a et b, $-\frac{d^2}{dz^2} + V$ sur $]a, b[$ a une infinité quantifiée de valeurs propres.
1) Si u et v sont solutions de $-u'' + g_1 u = 0$ et de $-v'' + g_2 v = 0$ sur $[a, b]$ avec $g_1 > g_2$ sur $[a, b]$ et mêmes conditions aux limites alors entre deux zéros consécutifs de u il y a au moins un zéro de v
2) si de plus $v(a) = u(a) = \sin\alpha$, $v'(a) = u'(a) = -\cos\alpha$, u a m zéros $\Rightarrow$ v a m zéros au moins, inférieurs à ceux de u
3) Le nombre de zéros de $-w'' + Vw = \lambda w$ est une fonction croissante de λ.

Application:

Si $|V| \leq K$ sur $[a, b]$, en étudiant les deux problèmes

$$-y_1'' + (-K - \lambda)y_1 = 0, y_1(a)\cos\alpha + y_1'(a)\sin\alpha = 0$$

$$-y_2'' + (K - \lambda)y_2 = 0, y_2(a)\cos\alpha + y_2'(a)\sin\alpha = 0$$

dont on connait les solutions:

i) si λ suffisament négatif y_1 n'a pas de zéro donc w n'en a pas

ii) si λ suffisament grand, $\omega^2 = \lambda - K$, le nombre de zéros de $y_2(z) = C_0(\sin\alpha\cos\omega(z-a) - \frac{\sin\omega(z-a)}{\omega}\cos\alpha)$ tend vers $+\infty$ avec λ. De plus, un zéro de w est une fonction continue de λ, décroissante.

Il en est de même pour les zéros de $\cos\beta w'(z) + \sin\beta w(z)$.

Conclusion: il existe une suite $\mu_0, ..., \mu_m$ tel que $\cos\beta w'(b) + \sin\beta w(b) = 0$ pour $\lambda = \mu_m$ et w a $m-1$ ou m zéros.

Application:

Si $|V| \leq K$ sur $[a, b]$, en étudiant les deux problèmes

$$-y_1'' + (-K - \lambda)y_1 = 0, y_1(a)\cos\alpha + y_1'(a)\sin\alpha = 0$$

$$-y_2'' + (K - \lambda)y_2 = 0, y_2(a)\cos\alpha + y_2'(a)\sin\alpha = 0$$

dont on connait les solutions:

i) si λ suffisament négatif y_1 n'a pas de zéro donc w n'en a pas

ii) si λ suffisament grand, $\omega^2 = \lambda - K$, le nombre de zéros de $y_2(z) = C_0(\sin\alpha\cos\omega(z-a) - \frac{\sin\omega(z-a)}{\omega}\cos\alpha)$ tend vers $+\infty$ avec λ. De plus, un zéro de w est une fonction continue de λ, décroissante.

Il en est de même pour les zéros de $\cos\beta w'(z) + \sin\beta w(z)$.

Conclusion: il existe une suite $\mu_0, ..., \mu_m$ tel que $\cos\beta w'(b) + \sin\beta w(b) = 0$ pour $\lambda = \mu_m$ et w a $m-1$ ou m zéros.

Application:

Si $|V| \leq K$ sur $[a, b]$, en étudiant les deux problèmes

$$-y_1'' + (-K - \lambda)y_1 = 0, y_1(a)\cos\alpha + y_1'(a)\sin\alpha = 0$$

$$-y_2'' + (K - \lambda)y_2 = 0, y_2(a)\cos\alpha + y_2'(a)\sin\alpha = 0$$

dont on connait les solutions:
i) si λ suffisament négatif y_1 n'a pas de zéro donc w n'en a pas
ii) si λ suffisament grand, $\omega^2 = \lambda - K$, le nombre de zéros de $y_2(z) = C_0(\sin\alpha\cos\omega(z-a) - \frac{\sin\omega(z-a)}{\omega}\cos\alpha)$ tend vers $+\infty$ avec λ. De plus, un zéro de w est une fonction continue de λ, décroissante.
Il en est de même pour les zéros de $\cos\beta w'(z) + \sin\beta w(z)$.
Conclusion: il existe une suite $\mu_0, ..., \mu_m$ tel que $\cos\beta w'(b) + \sin\beta w(b) = 0$ pour $\lambda = \mu_m$ et w a $m-1$ ou m zéros.

Application:

Si $|V| \leq K$ sur $[a,b]$, en étudiant les deux problèmes

$$-y_1'' + (-K-\lambda)y_1 = 0, y_1(a)\cos\alpha + y_1'(a)\sin\alpha = 0$$

$$-y_2'' + (K-\lambda)y_2 = 0, y_2(a)\cos\alpha + y_2'(a)\sin\alpha = 0$$

dont on connait les solutions:
i) si λ suffisament négatif y_1 n'a pas de zéro donc w n'en a pas
ii) si λ suffisament grand, $\omega^2 = \lambda - K$, le nombre de zéros de $y_2(z) = C_0(\sin\alpha\cos\omega(z-a) - \frac{\sin\omega(z-a)}{\omega}\cos\alpha)$ tend vers $+\infty$ avec λ. De plus, un zéro de w est une fonction continue de λ, décroissante.
Il en est de même pour les zéros de $\cos\beta w'(z) + \sin\beta w(z)$.
Conclusion: il existe une suite $\mu_0, ..., \mu_m$ tel que $\cos\beta w'(b) + \sin\beta w(b) = 0$ pour $\lambda = \mu_m$ et w a $m-1$ ou m zéros.

Application:

Si $|V| \leq K$ sur $[a, b]$, en étudiant les deux problèmes

$$-y_1'' + (-K - \lambda)y_1 = 0, y_1(a)\cos\alpha + y_1'(a)\sin\alpha = 0$$

$$-y_2'' + (K - \lambda)y_2 = 0, y_2(a)\cos\alpha + y_2'(a)\sin\alpha = 0$$

dont on connait les solutions:
i) si λ suffisament négatif y_1 n'a pas de zéro donc w n'en a pas
ii) si λ suffisament grand, $\omega^2 = \lambda - K$, le nombre de zéros de $y_2(z) = C_0(\sin\alpha\cos\omega(z-a) - \frac{\sin\omega(z-a)}{\omega}\cos\alpha)$ tend vers $+\infty$ avec λ. De plus, un zéro de w est une fonction continue de λ, décroissante.
Il en est de même pour les zéros de $\cos\beta w'(z) + \sin\beta w(z)$.
Conclusion: il existe une suite $\mu_0, ..., \mu_m$ tel que $\cos\beta w'(b) + \sin\beta w(b) = 0$ pour $\lambda = \mu_m$ et w a $m-1$ ou m zéros.

Application:

Si $|V| \leq K$ sur $[a,b]$, en étudiant les deux problèmes

$$-y_1'' + (-K-\lambda)y_1 = 0, y_1(a)\cos\alpha + y_1'(a)\sin\alpha = 0$$

$$-y_2'' + (K-\lambda)y_2 = 0, y_2(a)\cos\alpha + y_2'(a)\sin\alpha = 0$$

dont on connait les solutions:
i) si λ suffisament négatif y_1 n'a pas de zéro donc w n'en a pas
ii) si λ suffisament grand, $\omega^2 = \lambda - K$, le nombre de zéros de $y_2(z) = C_0(\sin\alpha\cos\omega(z-a) - \frac{\sin\omega(z-a)}{\omega}\cos\alpha)$ tend vers $+\infty$ avec λ. De plus, un zéro de w est une fonction continue de λ, décroissante.
Il en est de même pour les zéros de $\cos\beta w'(z) + \sin\beta w(z)$.
Conclusion: il existe une suite $\mu_0, ..., \mu_m$ tel que $\cos\beta w'(b) + \sin\beta w(b) = 0$ pour $\lambda = \mu_m$ et w a $m-1$ ou m zéros.

Instabilité de Poiseuille

Analyse de l'instabilité générée par l'écoulement stationnaire de Poiseuille dans un fluide visqueux:

$$(\vec{v}, p) = (\frac{3\Phi}{4h}(1 - \frac{y^2}{h^2}), 0, -\frac{3\Phi\nu x}{2h^3})$$

Système perturbé:

$$\partial_t \vec{w} = \nu \Delta \vec{w} - \nabla q - w_2 \partial_y \vec{u}_0(y) - u_0(y) \partial_x \vec{w}, \text{div} \vec{w} = 0$$

Modes normaux $e^{\lambda t + ikx}(-\frac{1}{ik} w_2', w_2)$.

Instabilité de Poiseuille

Analyse de l'instabilité générée par l'écoulement stationnaire de Poiseuille dans un fluide visqueux:

$$(\vec{v}, p) = (\frac{3\Phi}{4h}(1 - \frac{y^2}{h^2}), 0, -\frac{3\Phi\nu x}{2h^3})$$

Système perturbé:

$$\partial_t \vec{w} = \nu\Delta\vec{w} - \nabla q - w_2\partial_y\vec{u}_0(y) - u_0(y)\partial_x\vec{w}, \text{div}\vec{w} = 0$$

Modes normaux $e^{\lambda t + ikx}(-\frac{1}{ik}w_2', w_2)$.

Instabilité de Poiseuille

Analyse de l'instabilité générée par l'écoulement stationnaire de Poiseuille dans un fluide visqueux:

$$(\vec{v}, p) = (\frac{3\Phi}{4h}(1 - \frac{y^2}{h^2}), 0, -\frac{3\Phi\nu x}{2h^3})$$

Système perturbé:

$$\partial_t \vec{w} = \nu\Delta\vec{w} - \nabla q - w_2\partial_y \vec{u}_0(y) - u_0(y)\partial_x \vec{w}, \mathrm{div}\vec{w} = 0$$

Modes normaux $e^{\lambda t + ikx}(-\frac{1}{ik}w_2', w_2)$.

Equation de Orr-Sommerfeld

Equation de Orr-Sommerfeld, $P = -\frac{d^2}{dy^2} + k^2$:

$$\lambda P w_2 + P^2 w_2 = -iku_0''(y) w_2 - iku_0(y) P w_2.$$

Formulation variationnelle (hors C.L.)

$$\lambda \int (k^2|w_2|^2 + |w_2'|^2) dy = \int |Pw_2|^2 dy + ik[\int u_0''|w_2|^2 - \int u_0 P w_2 \bar{w}_2 dy]$$

$\Rightarrow (\Im\lambda) \int (k^2|w_2|^2 + |w_2'|^2) dy = \int \frac{3}{2} u_0''|w_2|^2 - \int u_0(|w_2'|^2 + k^2 w_2) dy.$
$\Rightarrow$ contrôle de $\Im\lambda$ grâce aux majorations de u_0 et u_0'' indépendamment de k pour k grand.

Instabilité de Kelvin-Helmholtz

On va se trouver dans le cas non autoadjoint ou encore le potentiel non réel.
Sujet de recherche 'actuel' (Zworski, Dencker, ...) Equations d'Euler avec gravité, écoulement de base $(\rho_0(z), U_0(z), 0, p_0(z))$.
Système perturbé

$$\begin{cases} \partial_x u + \partial_z w = 0 \\ \rho_0(z)(\partial_t u + U_0(z)\partial_x u) + \rho_0(z)U_0'(z)w + \partial_x p = 0 \\ \rho_0(z)(\partial_t w + U_0(z)\partial_x w) + \partial_z p = -\rho g \\ \partial_t \rho + U_0(z)\partial_x \rho + \rho_0'(z)w = 0 \end{cases}$$

Modes normaux, $L_0(z) = \lambda + ikU_0(z)$:

$$\begin{cases} iku + w' = 0 \\ \rho_0(z)L_0(z)u + \rho_0(z)U_0'(z)w + ikp = 0 \\ \rho_0(z)L_0(z)w + p' = -\rho g \\ L_0(z)\rho + \rho_0'(z)w = 0 \end{cases}$$

Instabilité de Kelvin-Helmholtz

On va se trouver dans le cas non autoadjoint ou encore le potentiel non réel.
Sujet de recherche 'actuel' (Zworski, Dencker, ...) Equations d'Euler avec gravité, écoulement de base $(\rho_0(z), U_0(z), 0, p_0(z))$.
Système perturbé

$$\begin{cases} \partial_x u + \partial_z w = 0 \\ \rho_0(z)(\partial_t u + U_0(z)\partial_x u) + \rho_0(z)U_0'(z)w + \partial_x p = 0 \\ \rho_0(z)(\partial_t w + U_0(z)\partial_x w) + \partial_z p = -\rho g \\ \partial_t \rho + U_0(z)\partial_x \rho + \rho_0'(z)w = 0 \end{cases}$$

Modes normaux, $L_0(z) = \lambda + ikU_0(z)$:

$$\begin{cases} iku + w' = 0 \\ \rho_0(z)L_0(z)u + \rho_0(z)U_0'(z)w + ikp = 0 \\ \rho_0(z)L_0(z)w + p' = -\rho g \\ L_0(z)\rho + \rho_0'(z)w = 0 \end{cases}$$

Instabilité de Kelvin-Helmholtz

On va se trouver dans le cas non autoadjoint ou encore le potentiel non réel.
Sujet de recherche 'actuel' (Zworski, Dencker, ...) Equations d'Euler avec gravité, écoulement de base $(\rho_0(z), U_0(z), 0, p_0(z))$.
Système perturbé

$$\begin{cases} \partial_x u + \partial_z w = 0 \\ \rho_0(z)(\partial_t u + U_0(z)\partial_x u) + \rho_0(z)U_0'(z)w + \partial_x p = 0 \\ \rho_0(z)(\partial_t w + U_0(z)\partial_x w) + \partial_z p = -\rho g \\ \partial_t \rho + U_0(z)\partial_x \rho + \rho_0'(z)w = 0 \end{cases}$$

Modes normaux, $L_0(z) = \lambda + ikU_0(z)$:

$$\begin{cases} iku + w' = 0 \\ \rho_0(z)L_0(z)u + \rho_0(z)U_0'(z)w + ikp = 0 \\ \rho_0(z)L_0(z)w + p' = -\rho g \\ L_0(z)\rho + \rho_0'(z)w = 0 \end{cases}$$

Instabilité de Kelvin-Helmholtz

On va se trouver dans le cas non autoadjoint ou encore le potentiel non réel.
Sujet de recherche 'actuel' (Zworski, Dencker, ...) Equations d'Euler avec gravité, écoulement de base $(\rho_0(z), U_0(z), 0, p_0(z))$.
Système perturbé

$$\begin{cases} \partial_x u + \partial_z w = 0 \\ \rho_0(z)(\partial_t u + U_0(z)\partial_x u) + \rho_0(z)U_0'(z)w + \partial_x p = 0 \\ \rho_0(z)(\partial_t w + U_0(z)\partial_x w) + \partial_z p = -\rho g \\ \partial_t \rho + U_0(z)\partial_x \rho + \rho_0'(z) w = 0 \end{cases}$$

Modes normaux, $L_0(z) = \lambda + ikU_0(z)$:

$$\begin{cases} iku + w' = 0 \\ \rho_0(z)L_0(z)u + \rho_0(z)U_0'(z)w + ikp = 0 \\ \rho_0(z)L_0(z)w + p' = -\rho g \\ L_0(z)\rho + \rho_0'(z)w = 0 \end{cases}$$

Instabilité de Kelvin-Helmholtz

On tire $p = k^{-2}(\rho_0 L_0' w - \rho_0 L_0 w')$ et on remplace pour obtenir

$$-k^{-2}w'' + w + k^{-2}(\frac{L_0'}{L_0} - \frac{(\rho_0 L_0)'}{\rho_0 L_0})w' + k^{-2}\frac{(\rho_0 L_0')'}{\rho_0 L_0})w = -\frac{\rho g}{\rho_0 L_0}.$$

Avec $\varphi = \rho_0^{\frac{1}{2}} w$, on trouve

$$-k^{-2}\varphi'' + (1 - \frac{g\rho_0'}{\rho_0 L_0^2} + k^{-2}s(z))\varphi = 0,$$

$s = \frac{(\rho_0^{\frac{1}{2}})''}{(\rho_0)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(\rho_0 L_0)'}{\rho_0 L_0}$, et $1 - \frac{g\rho_0'}{\rho_0 L_0^2}$ complexe.

il peut ne pas y avoir de valeur propre (Helffer)

Instabilité de Kelvin-Helmholtz

On tire $p = k^{-2}(\rho_0 L_0' w - \rho_0 L_0 w')$ et on remplace pour obtenir

$$-k^{-2}w'' + w + k^{-2}(\frac{L_0'}{L_0} - \frac{(\rho_0 L_0)'}{\rho_0 L_0})w' + k^{-2}\frac{(\rho_0 L_0')'}{\rho_0 L_0})w = -\frac{\rho g}{\rho_0 L_0}.$$

Avec $\varphi = \rho_0^{\frac{1}{2}} w$, on trouve

$$-k^{-2}\varphi'' + (1 - \frac{g\rho_0'}{\rho_0 L_0^2} + k^{-2}s(z))\varphi = 0,$$

$s = \frac{(\rho_0^{\frac{1}{2}})''}{(\rho_0)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(\rho_0 L_0)'}{\rho_0 L_0}$, et $1 - \frac{g\rho_0'}{\rho_0 L_0^2}$ complexe.

il peut ne pas y avoir de valeur propre (Helffer)

Instabilité de Kelvin-Helmholtz

On tire $p = k^{-2}(\rho_0 L_0' w - \rho_0 L_0 w')$ et on remplace pour obtenir

$$-k^{-2}w'' + w + k^{-2}\left(\frac{L_0'}{L_0} - \frac{(\rho_0 L_0)'}{\rho_0 L_0}\right)w' + k^{-2}\frac{(\rho_0 L_0')'}{\rho_0 L_0})w = -\frac{\rho g}{\rho_0 L_0}.$$

Avec $\varphi = \rho_0^{\frac{1}{2}} w$, on trouve

$$-k^{-2}\varphi'' + (1 - \frac{g\rho_0'}{\rho_0 L_0^2} + k^{-2}s(z))\varphi = 0,$$

$s = \frac{(\rho_0^{\frac{1}{2}})''}{(\rho_0)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(\rho_0 L_0)'}{\rho_0 L_0}$, et $1 - \frac{g\rho_0'}{\rho_0 L_0^2}$ complexe.

il peut ne pas y avoir de valeur propre (Helffer)

Conclusion

• Avec une zone de mélange séparant deux fluides ou gaz purs (instabilité de Rayleigh-Taylor), il y a une infinité de modes propres dont exponentiellement croissants en temps.
Les taux de croissance, dans ce cas, tendent tous (sauf celui du mode principal) vers 0 lorsque la largeur de cette zone de mélange tend vers 0.

• On retrouve le même phénomène en étudiant l'expansion d'un plasma dans le vide, cas physique étudié dans le cadre de la FCI (Fusion par Confinement Inertiel).

• On peut aussi obtenir un résultat d'instabilité pour le système complet (non linéaire). Il peut s'exprimer sous la forme 'toute perturbation, aussi faible soit-elle, conduit à une solution nettement distincte en temps fini'.

• Dans d'autres modèles (Poiseuille, Kelvin-Helmholtz, Rayleigh-Benard) existence d'un mode propre inconnue (problème non auto adjoint).