

La Cosmologie de Rastall et le Modèle Λ CDM

Júlio C. Fabris

Departamento de Física - Universidade Federal do Espírito Santo

Annecy, 3 Mai 2012

La Relativité Générale

Les équations

- La description de l'univers en grande échelle a pour base la théorie de la Relativité Générale :

$$\begin{aligned}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R &= 8\pi GT_{\mu\nu}, \\ T^{\mu\nu}{}_{;\mu} &= 0.\end{aligned}$$

- Puisque l'univers est homogène et isotrope à grandes échelles, la géométrie est décrite par,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right].$$

- $a(t)$ est le facteur d'échelle et k est la courbure de la section spatiale qu'on peut fixer comme nulle.

La Relativité Générale

Les équations

- Les équations du mouvement deviennent :

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_{i=0}^n \rho_i.$$

- En définissant,

$$\Omega_i = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_i,$$

nous avons,

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \sum_{i=0}^n \Omega_i.$$

Matière et énergie noires

La cosmologie aujourd'hui

- Le modèle cosmologique standard est le modèle Λ CDM.
- Ce modèle prévoit l'existence de quatre phases principales dans l'évolution de l'univers:
 - Une phase primordiale où le phénomène de l'inflation a eu lieu.
 - Une phase dominée par un fluide de rayonnement, dite *radioactif*.
 - Une phase dominée par la matière sans pression (y compris la matière baryonique).
 - Une phase dominée par un fluide de pression négative (la constante cosmologique), conduisant à l'accélération cosmique.

Matière et énergie noires

La cosmologie aujourd'hui

- Strictement parlant, le modèle Λ CDM concerne les deux dernières périodes cosmiques, la phase de matière et la phase d'expansion accélérée de l'univers.
- Néanmoins, les deux premières phases sont cruciales pour établir les conditions initiales du modèle Λ CDM.
- En particulier, les deux phases primordiales sont censés fournir les données suivantes:
 - Les quantités fractionnelles de baryons et de rayonnement par rapport à la densité critique;
 - Les abondances des éléments chimiques légers;
 - Le spectre primordiale des perturbations scalaires;
 - Les conditions pour avoir un univers homogène et isotrope.

Le modèle Λ CDM

Le contenu

- Le modèle Λ CDM contient les baryons, la radiation, le neutrino, la matière noire et l'énergie noire.
 - La matière noire est représentée par un fluide sans pression: nécessaire pour rendre compte le processus de formation de galaxies.
 - L'énergie noire est représentée par la constante cosmologique: le choix plus simple et "plus naturel".

$$H^2 = \Omega_{b0}(1+z)^3 + \Omega_{\gamma0}(1+z)^4 + \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda0}.$$

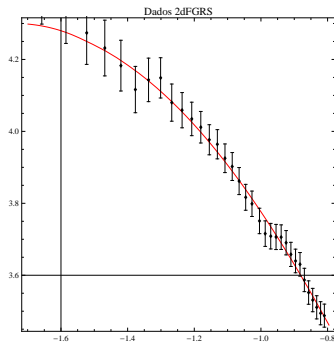
Matière et énergie noires

Les testes de la base

- Le modèle Λ CDM s'accorde très bien aux testes cinématiques, correspondent au comportement de l'univers non perturbée:
 - 1 Les supernovae type Ia;
 - 2 Les oscillations acoustiques baryoniques;
 - 3 L'age (différentiel) des objets astronomiques (galaxies);
 - 4 La position du premier pic acoustique de l'espectre du rayonnement cosmique de fond.

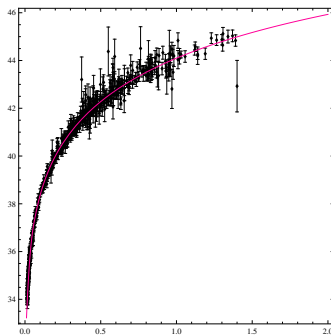
Testes observationnels

Espectre de puissance de la matière

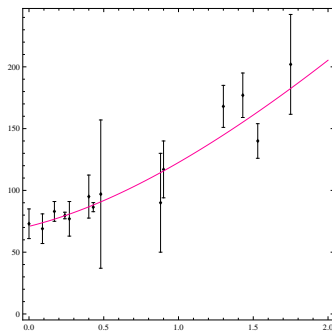


Testes observationnels

Supernovae type Ia

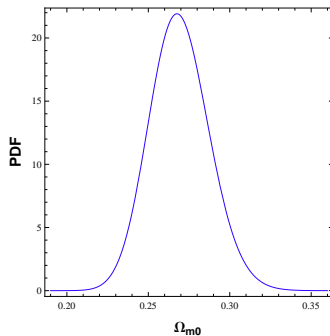


Testes observationnels

 $H(z)$ 

Testes observationnels

Estimatives pour Ω_{m0}



Le modèle Λ CDM

La composition

$$\Omega_{b0} \sim 0.04,$$

$$\Omega_{\gamma 0} \sim 5 \times 10^{-5},$$

$$\Omega_{m0} \sim 0.23,$$

$$\Omega_{\Lambda 0} \sim 0.73.$$

Le modèle Λ CDM

Problèmes théoriques

- Les candidats pour la matière noire (axions, neutralinos, etc.) restent des objets hypothétiques, sans support expérimental.
- L'énergie noire peut être interprétée comme énergie du vide quantique. Mais, la valeur prévue est différente de la valeur observée par plusieurs dizaines d'ordre de magnitude.
- Pourquoi juste aujourd'hui la densité d'énergie noire est comparable à la densité de la matière noire, malgré leur évolution temporelle complètement différente? C'est le problème de la *Coincidence cosmique*.

Le modèle Λ CDM

Problèmes observationnels

- Le modèle Λ CDM prévoit un excès de satellites galactiques par rapport à l'observation.
- Il ne peut pas rendre compte de la loi de Tully-Fisher.
- Les supernovae peuvent être considérés comme un test solide? Tensions de plusieurs types.

Le modèle Λ CDM

Les alternatives

- Les difficultés du modèle Λ CDM ont donnée naissance à plusieurs alternatives:
 - Quintessence - l'énergie noire est représentée par un champ scalaire avec auto-interaction.
 - *K*-essence - Le terme cinétique d'un champ scalaire est généralisé.
 - Modèles d'interaction du secteur noire - il y une désintégration de la matière noire en énergie noire, ou vice-versa.

Le modèle Λ CDM

Difficultés avec les alternatives

- Les problèmes avec les alternatives:
 - Quintessence: la masse requise pour le champ scalaire est de l'ordre de $m_\phi = 10^{-33} \text{ eV}$.
 - K -essence: la stabilité n'est pas toujours assurée.
 - Modèles d'interaction du secteur noire: les *dictées* thermodynamiques ne sont pas toujours satisfaites.

Unifiant la matière et l'énergie noires

Le gas de Chaplygin

- Dans ce contexte, il y a une intéressante proposition d'unification de la matière et énergie noire: le gas de Chaplygin.
- Equation d'état:

$$p = -\frac{A}{\rho}.$$

- Pression negative: il peut accélérer l'univers.
- Vitesse du son positive: il peut avoir un comportement perturbatif bien défini.
- A.Y. Kamenshchik, U. Moschella and V. Pasquier, Phys. Lett. **B511**, 265(2001).

- L'équation de conservation:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0.$$

- Solution pour le gas de Chaplygin

$$\rho(a) = \sqrt{A + \frac{B}{a^6}}.$$

- Comportement asymptotic:

$$a \rightarrow 0 \Rightarrow \rho \propto a^{-3} \quad \text{Matière sans pression.}$$

$$a \rightarrow \infty \Rightarrow \rho \propto \text{cte} \quad \text{Constante cosmologique.}$$

- L'équation d'état du gas de Chaplygin peut être obtenue à partir de l'action de Nambu-Goto:

$$S_c = \int d^2x \sqrt{G} G^{ab} \eta_{\mu\nu} X_{;a}^{\mu} X_{;b}^{\nu}.$$

- Sur certaines conditions, cette action peut être réécrite sous la forme de l'action *DBI*:

$$S_{DBI} = \int d^4x \sqrt{-g} V(T) \sqrt{1 - T_{;\rho} T^{;\rho}}.$$

- Cette action implique l'équation d'état du gas de Chaplygin.

- La confrontation du modèle de gas de Chaplygin avec les observations indiquent qu'il ne peut pas competir avec le modèle Λ CDM: χ^2 beaucoup plus élevé.
- Nouvelle proposition: le gas de Chaplygin généralisé.

$$p = -\frac{A}{\rho^\alpha}.$$

- Prix à payer: il n'existe plus une connection directe avec les théories de cordes, même si l'action *DBI* peut être réécrite pour cette expression plus générale.

- Il y a un paramètre de plus - c'est naturel que la confrontation avec les données observationnelles donne des bons résultats.
- Par contre, il y a une tension entre les tests de la base et les tests perturbatifs, à cause de la vitesse du son.

Tension observationnelle

La vitesse du son

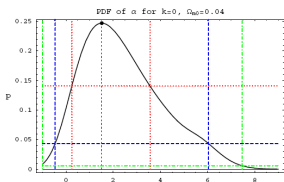
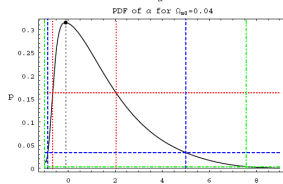
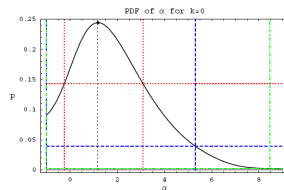
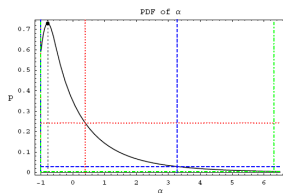
- Les contraintes de la base prévoient que α peut être négatif.
- Mais, si α est négatif, la vitesse du son est imaginaire:

$$v_s^2 = \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} = \frac{\alpha A}{\rho^{\alpha+1}}.$$

- $\alpha < 0$ implique $v_s^2 < 0$.
- Le modèle devient complètement instable.

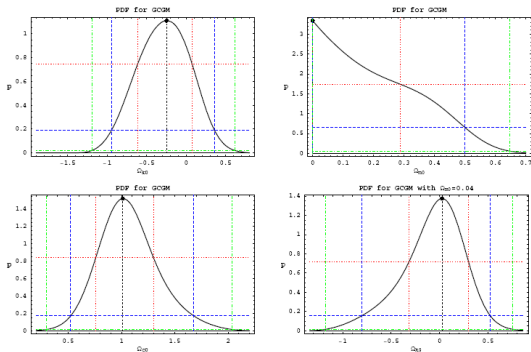
Tension observationnel

Estimatives pour α - R. Colistete et J.C. Fabris, Class.Quant.Grav. 22,2813(2005)



Estimatives observationnelles

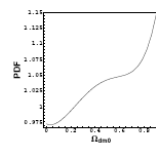
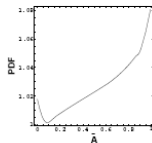
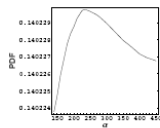
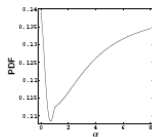
Estimatives pour Ω_{m0}



Tension observationnelle

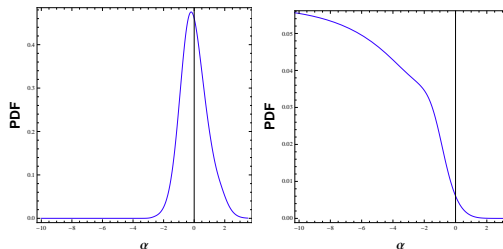
Espectre de puissance - J.C. Fabris, H.E.S. Velten e W. Zimdahl, Phys.Rev.

D81,087303(2010)



Tension observationnel

$H(z)$, J.C. Fabris, P.L.C. de Oliveira et H.E.S. Velten, European Physical Journal C **71**, 1773(2011).



Unification de la matière et énergie noire

Modèle scalaire.

- Considérons un champ scalaire avec auto-interaction:

$$T_{\mu\nu} = \phi_{;\mu}\phi_{;\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi_{;\rho}\phi^{;\rho} + g_{\mu\nu}V(\phi).$$

- L'énergie et la pression associées à ce champ scalaire sont données par,

$$\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi),$$

$$p_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi).$$

Unification de la matière et énergie noire

Modèle scalaire

- La vitesse du son peut être écrite comme:

$$v_s^2 = \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} = \frac{\partial_\chi p}{\partial_\chi \rho} = 1 \quad , \quad \chi = \frac{\dot{\phi}^2}{2}.$$

- Pas de problème d'instabilité.
- Mais, il n'est pas possible de former des structures de cette manière.
- La formation des structures requiert une phase avec vitesse du son nulle.

La théorie de Rastall

Les lois de conservation

- Les théories relativistes de la gravitation sont basées sur la divergence nulle du tenseur d'impulsion-énergie:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0.$$

- Jusqu'à quel point cela signifie la conservation de la matière?
- Dans le cadre cosmologique,

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0.$$

- Il y a un échange d'énergie entre la matière et le champ de gravitation.

La théorie de Rastall

Les lois de conservation - P. Rastall, PRD **6**, 3357(1972).

- La théorie de Rastall est basée sur l'idée que la conservation du tenseur d'impulsion-énergie est vérifié uniquement dans l'espace-temps de Minkowski.
- Il peut en avoir une violation de la loi de conservation usuelle dans d'espaces-temps courbes. Donc,

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \kappa R^{i\nu}.$$

- Cela rappelle fortement le changement de la loi de conservation usuelle dû aux effets quantiques.
- Dans le cas d'un champ scalaire quantique dans l'espace-temps de de Sitter, par exemple, nous avons

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \frac{1}{48\pi} R^{i\nu}.$$

La théorie de Rastall

Les équations du champ

- Les équations du champ prennent la forme,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G \left\{ T_{\mu\nu} - \frac{\gamma - 1}{2}g_{\mu\nu}T \right\},$$
$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \frac{\gamma - 1}{2}T^{;\nu}.$$

- Le paramètre γ est à déterminer.
- Lorsque $\gamma = 1$ on recouvre la Relativité Générale.

La théorie de Rastall

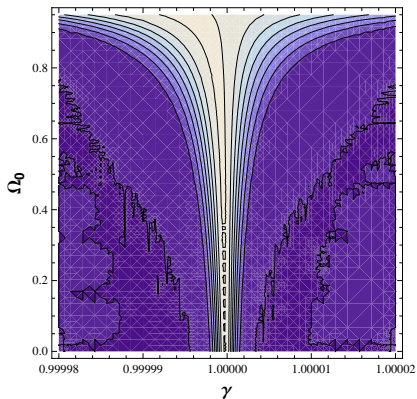
Le couplage de la matière

- Dans l'univers nous avons plusieurs composantes de matière et énergie.
- Pour avoir la formation des structures, il faut qu'une composante au moins ait la pression effective nulle.
- Considérons deux fluides, tels que,

$$T_x^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \frac{\gamma - 1}{2} T_x^{;\nu},$$
$$T_m^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0.$$

La théorie de Rastall

Estimatives pour γ



La théorie de Rastall

Le champ scalaire

- Une possibilité serait de décrire la *composante de Rastall* par un champ scalaire avec auto-interaction.
- La loi de conservation implique que ce champ doit obéir à une équation de Klein-Gordon modifié :

$$\begin{aligned}
 R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R &= \phi_{;\mu}\phi_{;\nu} - \frac{2-\gamma}{2}g_{\mu\nu}\phi_{;\rho}\phi^{;\rho} \\
 &+ g_{\mu\nu}(3-2\gamma)V(\phi), \\
 \square\phi + (3-2\gamma)V_{\phi} &= (1-\gamma)\frac{\phi^{;\rho}\phi^{;\sigma}\phi_{;\rho;\sigma}}{\phi_{;\alpha}\phi^{;\alpha}}.
 \end{aligned}$$

La théorie de Rastall

Le champ scalaire - vitesse du son

- La vitesse du son associé à ce champ scalaire prend la forme,

$$v_s^2 = \frac{2 - \gamma}{\gamma}.$$

- Pour $\gamma = 2$, la vitesse du son est nulle.
- Un bon modèle scalaire d'unification de la matière et de l'énergie noires?
- C. Gao, M. Kunz, A.R. Liddle et D. Parkinson, PRD **81**, 043520(2010).

La théorie de Rastall

Gas de Chaplygin - modèle scalaire

- Pour $\gamma = 2$, nous avons,

$$T_{\mu\nu}^{\phi} = \phi_{;\mu}\phi_{;\nu} + g_{\mu\nu}V(\phi).$$

- L'énergie et la pression associés au champ scalaire sont données par,

$$\rho_{\phi} = \dot{\phi}^2 + V(\phi),$$

$$p_{\phi} = -V(\phi).$$

La théorie de Rastall

Gas de Chaplygin - modèle scalaire

- Si l'on veut que le modèle du gas de Chaplygin (généralisé) soit reproduit, donc,

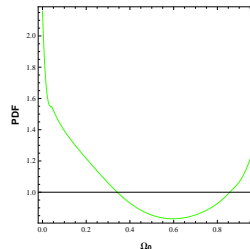
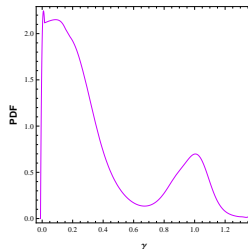
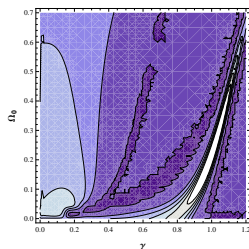
$$\dot{\phi}(a) = \sqrt{3\Omega_{c0}} \sqrt{g(a)^{1/(1+\alpha)} - \bar{A}g(a)^{-\alpha/(1+\alpha)}},$$

$$V(a) = 3\Omega_{c0}\bar{A}g(a)^{-\alpha/(1+\alpha)},$$

$$g(a) = \bar{A} + \frac{(1 - \bar{A})}{a^{3(1+\alpha)}}.$$

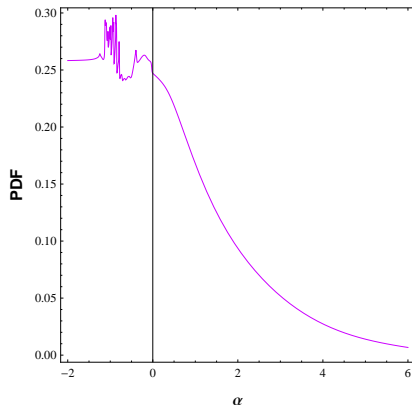
Formulation scalaire du gas de Chaplygin généralisé

Results - J.C. Fabris, T.C.C. Guio, M. Hamani Daouda et O.F. Piattella,
Gravitation&Cosmology, **17**, 259(2011)



Formulation scalaire du gas de Chaplygin généralisé

Results - J.C. Fabris, T.C.C. Guio, M. Hamani Daouda et O.F. Piattella,
Gravitation&Cosmology, **17**, 259(2011)



Problèmes avec la formulation scalaire

Equations perturbées dans la jauge Newtonienne

- Considérons les perturbations dans la jauge Newtonienne

$$ds^2 = a^2(1 - 2\Phi)d\eta^2 - a^2(1 + 2\Phi)\gamma_{ij}dx^i dx^j,$$

Les équations perturbées dans la formulation scalaire s'écrivent :

$$\begin{aligned} \nabla^2\Phi - 3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Phi + \Phi') + \gamma(\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}')\Phi &= \\ 4\pi G[\gamma\phi'_0\delta\phi' + (3 - 2\gamma)a^2V_{,\phi}\delta\phi] , & \\ \mathcal{H}\Phi_{,i} + \Phi'_{,i} &= 4\pi G\phi'_0\delta\phi_{,i} , \\ \Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi + (2 - \gamma)(\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}')\Phi &= \\ 4\pi G[(2 - \gamma)\phi'_0\delta\phi' - (3 - 2\gamma)a^2V_{,\phi}\delta\phi] . & \end{aligned}$$

Problèmes avec la formulation scalaire

Equations perturbées dans la jauge Newtonienne

- Une combinaison de les équations perturbées conduit aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} \Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) \Phi &= \\ \frac{2-\gamma}{\gamma} [-k^2\Phi - 3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Phi + \Phi')] - \frac{2V_{,\phi}a^2}{\gamma\phi'_0} (3-2\gamma)(\mathcal{H}\Phi + \Phi') , & \\ \Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) \Phi &= \\ -k^2\Phi - 3\mathcal{H}\frac{2-\gamma}{\gamma} (\mathcal{H}\Phi + \Phi') - \frac{2V_{,\phi}a^2}{\gamma\phi'_0} (3-2\gamma)(\mathcal{H}\Phi + \Phi') . & \end{aligned}$$

- Ces équations sont identiques uniquement si $\gamma = 1$, c'est-à-dire, la limite de la Relativité Générale.

Problèmes avec la formulation scalaire

Equations perturbées dans la jauge Newtonienne

- Possible solution : ajouter de la matière. Dans ce cas, les équations sont compatibles pour n'importe quel γ .
- J.C. Fabris, M. Hamani Daouda et O.F. Piattella, Physics Letters B, à paraître.

Le modèle Λ CDM retrouvé

Un autre couplage pour la matière

- Considérons de nouveau deux fluides mais avec un couplage différent du choix précédent :

$$T_x^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \frac{\gamma - 1}{2} T^{;\nu},$$
$$T_m^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0.$$

- T contient les deux composants.

Le modèle Λ CDM retrouvé

Un autre couplage pour la matière

- Choisissons $p_m = 0$ et $p_x = -\rho_x$.
- Sur une base *FLRW*, les équations du mouvement deviennent,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left\{ (3 - 2\gamma)\rho_x + \frac{-\gamma + 3}{2}\rho_m \right\},$$

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = 0,$$

$$(3 - 2\gamma)\dot{\rho}_x = \frac{\gamma - 1}{2}\dot{\rho}_m.$$

- Pour les densités on obtient :

$$\rho_m = \frac{\rho_{m0}}{a^3},$$

$$\rho_x = \frac{\rho_{x0}}{3 - 2\gamma} + \frac{\gamma - 1}{2(3 - 2\gamma)}\rho_m.$$

Le modèle Λ CDM retrouvé

Un autre couplage pour la matière

- Les équations finales sont :

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_{x0} + \rho_m),$$
$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = 8\pi G\rho_{x0}.$$

- Ce sont les mêmes équations que celles du modèle Λ CDM model.
- Mais, nous avons maintenant,

$$\rho_x = \frac{\rho_{x0}}{3 - 2\gamma} + \frac{\gamma - 1}{2(3 - 2\gamma)}\rho_m.$$

Le modèle Λ CDM retrouvé

Un autre couplage pour la matière

- Au niveau perturbative (jauge synchrone), on trouve :

$$\ddot{\delta}_m + 2\frac{\dot{a}}{a}\delta_m - 4\pi G\rho_m\delta_m = 0.$$

- De nouveau, la même équation que le modèle Λ CDM.
- Mais, maintenant,

$$\delta\rho_x = \frac{\gamma - 1}{2(3 - 2\gamma)}\delta\rho_m.$$

- La constant cosmologique s'agglomère.

Le modèle Λ CDM retrouvé

L'effondrement gravitationnel sphérique

- Utilisons le modèle sphérique pour l'agglomération de la matière:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_i^2 \left(\Omega_p(t_i) \frac{a_i}{a} + 1 - \Omega_p(t_i) \right),$$
$$\Omega_p = 1 + \frac{2(3 - 2\gamma)}{5 - 3\gamma} \delta_m + \frac{\gamma - 1}{5 - 3\gamma} \delta_x.$$

- Au niveau non-linéaire, le processus d'agglomération de la matière se passe de manière différente que dans le modèle Λ CDM.

Conclusions

- Pour l'instant, le modèle Λ CDM est celui que mieux reproduit les observations avec le plus petit nombre de paramètres libres.
- Il doit faire face, néanmoins, à des difficultés théoriques et observationnelles, surtout au niveau non-linéaire.
- Les modèles d'unification du secteur noir sont très attirant, mais ils doivent faire face à d'autres difficultés, très sérieuses.
- Ces difficultés peuvent être éliminées - en partie - si les lois de conservations sont modifiées dans l'esprit de la théorie de Rastall.
- La théorie de Rastall peut aussi reproduire les succès du modèle Λ CDM tout en apportant des nouveaux éléments au niveau non-linéaire.
- Rastall est une alternative viable? À vérifier.