

Calcul des boucles dans les théories de jauge

Mohamed Sadek ZIDI

Laboratoire de Physique Théorique
LAPTH
Université de Savoie

9 décembre 2011

JRJC

- 1 Introduction
- 2 QCD, théorie de Jauge
- 3 Calcul de précision
- 4 Projet Golem
- 5 Conclusion

Introduction

Dans cette présentation, je mettrai l'accent sur le projet Golem

"General One-Loop Evaluator for Matrix éléments".

Golem est un programme numérique écrit en Fortran95 qui vise à automatiser le calcul des amplitudes de diffusion à une boucle avec jusqu'à six pattes externes et à fournir des prédictions précises pour les observables du LHC.

QCD, Théorie de jauge

QCD est la théorie des quarks et gluons et leurs interactions dans les hadrons

- La densité lagrangienne :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \sum_{a=1}^8 F^{a\mu\nu} F_{\mu\nu}^a + \sum_{f=1}^{n_f} \bar{\Psi}_i^f (i\gamma^\mu D_\mu \delta_{ij} - m_f \delta_{ij}) \Psi_j^f + \mathcal{L}_{F.jauge} + \mathcal{L}_{ghost}$$

- $\Psi_i^f(x)$: Champ de quark Fermion de Dirac de spin 1/2
 Triplet de couleur $i = 1, 2, 3 = N_c$
 Saveur $f = u, d, s, c, b, t$
- $\mathcal{A}_\mu^a$: Champ de gluon Champ vecteur de spin 1
 Octet de couleur $a = 1, 2, \dots, 8 = N_c^2 - 1$
- les 2 premiers termes de $\mathcal{L}$: sont invariants sous la transformation de jauge locale de $SU(3)$: $\longrightarrow U(x) = \exp\{i\sum_{a=1}^8 \beta^a(x) T^a\}$
- Matrices de couleur : $[T_a, T_b] = if_{abc} T_c$ Générateurs de $SU(3)$

QCD, Théorie de jauge

QCD est la théorie des quarks et gluons et leurs interactions dans les hadrons

- La densité lagrangienne :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \sum_{a=1}^8 F^{a\mu\nu} F_{\mu\nu}^a + \sum_{f=1}^{n_f} \bar{\Psi}_i^f (i\gamma^\mu D_\mu \delta_{ij} - m_f \delta_{ij}) \Psi_j^f + \mathcal{L}_{F,jauge} + \mathcal{L}_{ghost}$$

Champ de quark

Fermion de Dirac de spin 1/2

- $\Psi_i^f(x)$: Triplet de couleur
Saveur

$$i = 1, 2, 3 = N_c$$

$$f = u, d, s, c, b, t$$

- $\mathcal{A}_\mu^a$: Champ de gluon
Octet de couleur

Champ vecteur de spin 1

$$a = 1, 2, \dots, 8 = N_c^2 - 1$$

- les 2 premiers termes de $\mathcal{L}$: sont invariants sous la transformation de jauge locale de $SU(3)$: $\longrightarrow U(x) = \exp\{i \sum_{a=1}^8 \beta^a(x) T^a\}$
- Matrices de couleur : $[T_a, T_b] = if_{abc} T_c$ Générateurs de $SU(3)$

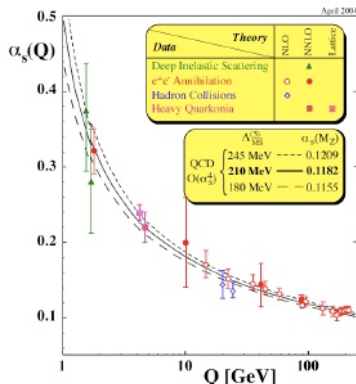
Liberté asymptotique

- **Liberté asymptotique** : A haute énergie quarks/gluons se comportent comme des particules quasi-libres

- Donc, le couplage α_s devient faible

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha(\mu^2)}{1 + \alpha(\mu^2) \underbrace{b}_{\frac{33-2n_f}{12\pi}} \ln(Q^2/\mu^2)}$$

- $\Rightarrow$ le calcul perturbatif est justifié.
- Théorie de Yang-Mills $\Rightarrow$ Self-interaction $\Rightarrow$ Liberté asymptotique
- En QCD, $n_f < 17 \Rightarrow$ Liberté asymptotique
- Confinement : aucune charge de couleur isolée ne peut exister, seules les particules singlets de couleurs sont observables.



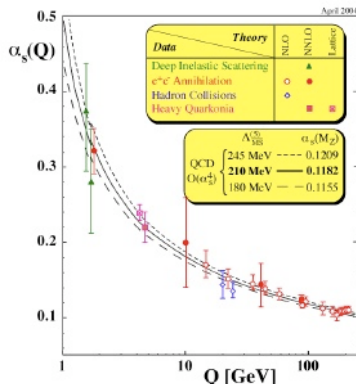
Liberté asymptotique

- **Liberté asymptotique** : A haute énergie quarks/gluons se comportent comme des particules quasi-libres

- Donc, le couplage α_s devient faible

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha(\mu^2)}{1 + \alpha(\mu^2) \underbrace{b}_{\frac{33-2n_f}{12\pi}} \ln(Q^2/\mu^2)}$$

- $\Rightarrow$ le calcul perturbatif est justifié.
- Théorie de Yang-Mills $\Rightarrow$ Self-interaction
 $\Rightarrow$ Liberté asymptotique
- En QCD, $n_f < 17 \Rightarrow$ Liberté asymptotique
- Confinement : aucune charge de couleur isolée ne peut exister, seules les particules singlets de couleurs sont observables.



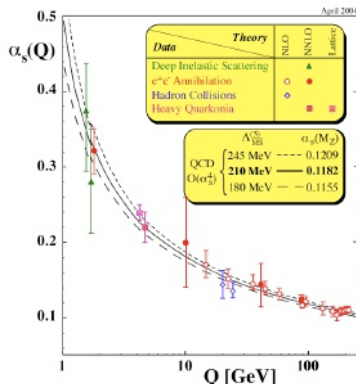
Liberté asymptotique

- **Liberté asymptotique** : A haute énergie quarks/gluons se comportent comme des particules quasi-libres

- Donc, le couplage α_s devient faible

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha(\mu^2)}{1 + \alpha(\mu^2) \underbrace{b}_{\frac{33-2n_f}{12\pi}} \ln(Q^2/\mu^2)}$$

- $\Rightarrow$ le calcul perturbatif est justifié.
- Théorie de Yang-Mills $\Rightarrow$ Self-interaction
 $\Rightarrow$ **Liberté asymptotique**
- En QCD, $n_f < 17 \Rightarrow$ **Liberté asymptotique**
- **Confinement** : aucune charge de couleur isolée ne peut exister, seules les particules singlets de couleurs sont observables.

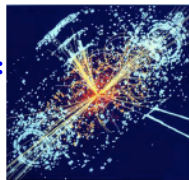
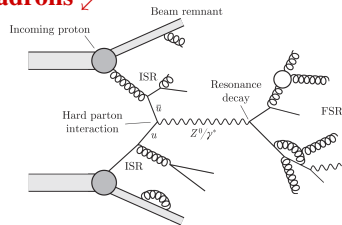


QCD pour le LHC et LHC pour la QCD

QCD décrit la physique entre **gluons** and **quarks** → **Objets en collision sont des hadrons**

↖ **Objets détectés sont aussi des hadrons** ↗

$$\sigma_{the}^{pp} = \sum_{i,j=q\bar{q},gg,qg} \int dx_1 dx_2 F_i^p(x_i, \mu_f) F_j^p(x_j, \mu_f) \times \int [|M_{Born}|^2 + \alpha_s(\mu) |M_{HO}|^2 + \dots] \times dPs$$



LHC requires from QCD :

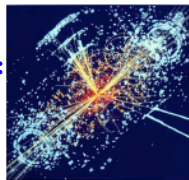
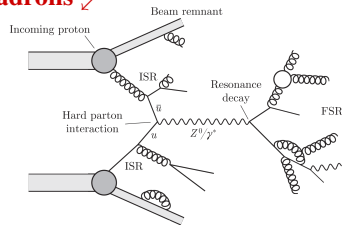
- **Precise inputs : the " α_s "**
- **Precise inputs : the "Pdfs".**
- **Calcul précis : "NLO", "NNLO" et re-summation des logarithmes.**

QCD pour le LHC et LHC pour la QCD

QCD décrit la physique entre **gluons** and **quarks** → **Objets en collision sont des hadrons**

↖ **Objets détectés sont aussi des hadrons** ↗

$$\sigma_{the}^{pp} = \sum_{i,j=q\bar{q},gg,qg} \int dx_1 dx_2 F_i^p(x_i, \mu_f) F_j^p(x_j, \mu_f) \times \int [|M_{Born}|^2 + \alpha_s(\mu) |M_{HO}|^2 + \dots] \times dPs$$

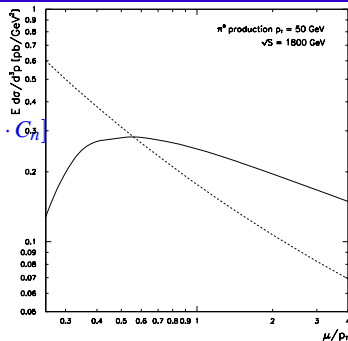


LHC requires from QCD :

- **Precise inputs : the " α_s "**
- **Precise inputs : the "Pdfs".**
- **Calcul précis : "NLO", "NNLO" et re-summation des logarithmes.**

Calcul de précision

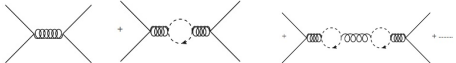
$$|M|^2 = |M_0|^2 \times \left[\overbrace{1}^{LO} + \overbrace{\alpha_s(\mu_R) \cdot C_1 + \alpha_s^2(\mu_R) \cdot C_2 + \dots + \alpha_s^n(\mu_R) \cdot C_n}^{NLO} \right]$$

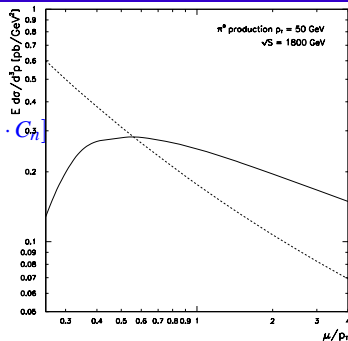


- Tester la QCD, Nouvelle physique $\Rightarrow$ Prédiction précise de bruit de fond
- Pourquoi NLO (LO+HO) ? :
 - ▶ Réduire la dépendance d'échelle
 - ▶ Tester la convergences de la series perturbative

Calcul de précision

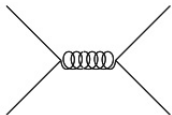
$$|M|^2 = |M_0|^2 \times \left[\overbrace{1}^{LO} + \overbrace{\alpha_s(\mu_R) \cdot C_1 + \alpha_s^2(\mu_R) \cdot C_2 + \dots + \alpha_s^n(\mu_R) \cdot C_n}^{NLO} \right]$$





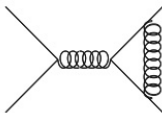
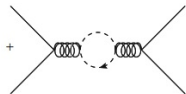
- Tester la QCD, Nouvelle physique $\Rightarrow$ Prédiction précise de bruit de fond
- Pourquoi NLO (LO+HO) ? :
 - ▶ Réduire la dépendance d'échelle
 - ▶ Tester la convergences de la series perturbative

Calcul NLO

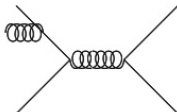
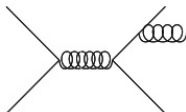


$$\sigma_{tot}^{2 \rightarrow 2} =$$

$$\sigma_{Born}^{2 \rightarrow 2} \longrightarrow \textit{finie}$$



$$+ \sigma_{virt}^{2 \rightarrow 2} \longrightarrow \textit{divergente}$$



$$+ \sigma_{reel}^{2 \rightarrow 3} \longrightarrow \textit{divergente}$$

Divergences UV et renormalisation

Les divergences UV apparaissent dans les diagrammes où il y a des boucles lorsque le 4-impulsions tournant dans la boucle tend vers l'infini (grande fluctuation à courte distance).

- Régularisation : Régulariser les termes div à n dim $\rightarrow$ Régularisation dimensionnelle
- Renormalisation : La redéfinition, à des échelles arbitraire μ , de la constante de couplage, masse et fonction d'onde pour éliminer les infinies possibles.
- En QCD, réexprimer les quantités renormalisées en fonction des quantités nues :

$$\Psi = \sqrt{Z_2} \Psi_R$$

$$A^\mu = \sqrt{Z_3} A_R^\mu$$

$$c = \sqrt{\tilde{Z}_3} c_R$$

$$g_s = Z_g g_{sR}$$

$$m = Z_m m_R$$

- Le lagrangien devient $\longrightarrow \mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_{QCD}^R + \delta \mathcal{L}$
- Schéma de renormalisation : choix de soustraire les infinies
- La physique est indépendante de $\mu \longrightarrow$ Groupe de renormalisation

Divergences IR

Les divergences IR, molles et colinéaires, apparaissent dans les théories de jauge qui mettent en jeu des champs associés à des masses nulles (photon, gluon)

- **Les divergences molles** sont associées à l'émission d'une particule non massive d'énergie-impulsion arbitrairement faible.
- **Les divergences colinéaires** sont associées à des configurations où deux particules non massives ont des quadri-impulsions l'une parallèle à l'autre.

Suppression des divergences IR :

- Les divs molles se compensent entre contribution réelle et virtuelle :
↔ "Théorème de Lee-Kinoshita-Nauenberg "
- Les divs cols de l'état initial → **fonction de distribution partonique**
- Les divs cols de l'état final :
 - ▶ **Hadrons** → **fonctions de fragmentation** → " état final non-dégénéré".
 - ▶ **Jets** → "Théorème de Lee-Kinoshita-Nauenberg" → " état final dégénéré".

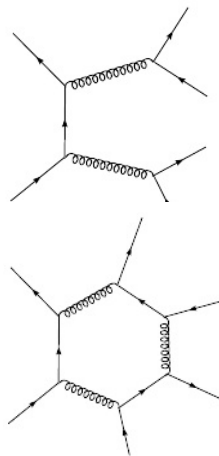
Processus à multiparticules

Multiparticules :

- Production des particules lourdes (W, Z, t, b).
- Particules lourdes avec des jets.

NLO Status :

$2 \rightarrow 2$	Evident	Littérature
$2 \rightarrow 3$	Standard	De nombreux groupes
$2 \rightarrow 4$	State of the art	Plusieurs groupes
$2 \rightarrow 5$	Très peu	Un group



Avec des pattes coupées !!!



Difficultés

- Complexité et croissance des diagrammes !
 - ▶ $gg \longrightarrow t\bar{t}b\bar{b}$: 36 diags de Born + 1003 diags 1 boucle + 341 diags réels
 - ▶ $\hookrightarrow$ Automatisation : GOLEM-2.0)
- Des boucles à multi-pattes externes !
 - ▶ $\hookrightarrow$ Automatisation : golem95
- Stabilité numérique !
 - ▶ Déterminant de Gram
 - ▶ $\hookrightarrow$ Réduction tensoriel, la méthode Golem
- Masses complexes !
 - ▶ Particules instables dans les propagateur (Z, W)
 - ▶ $\hookrightarrow$ la méthode Golem
- Intégration multidimensionnelle !
- Structure compliquée des singularités IR !

Golem Project

GOLEM : General One-Loop Evaluator for Matrix Elements

- **GOLEM** : Une "méthode" pour évaluer les diagramme de Feynman à une boucle.
- **GOLEM** : Une "library" des diagramme de Feynman à une boucle (golem95).
- **GOLEM** : Un "générateur" des diagramme de Feynman (GOLEM-2.0).

GOLEM se base sur :

- Les diagrammes de Feynman.
- La reduction tensorielle et la régularisation dimensionnelle.

Golem vise à :

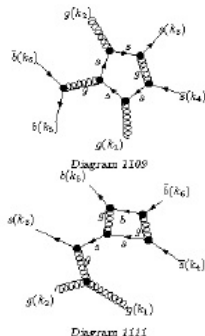
- Boucles avec jusqu'à 6 pattes externes.
- Des particules massives ou non massives.
- Correction de la QCD et EW.
- Physique du Modèle standard et au-dela.

Le générateur Golem : "GOLEM-2.0"

- Bases : Form et QGraf
- $gg \longrightarrow s\bar{s}b\bar{b}$

shell

```
$ golem-main.py --template process.in
$ edit process.in
$ golem-main.py process.in
$ make dist # -> matrix.tar.gz
$ make doc # -> process.ps
$
```



GOLEM library : golem95

Version actuelle : "Propagateur de masse nulle" $\Leftrightarrow$ QCD au LHC et Tevatron

- [http ://lappweb.in2p3.fr/lapth/Golem/golem95.html](http://lappweb.in2p3.fr/lapth/Golem/golem95.html)
- Séparation algébrique des singularité IR.
- Eviter l'évaluation multiple.
- Tous les intégrales de base pour $N \leq 6$.
- Documentation et exemple sont valable .

Sous-développement :

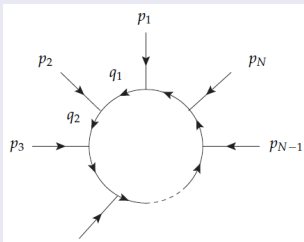
- Avec propagateurs massifs (des masses réelles et complexes)

Méthode de réduction par soustraction

L'idée principale de la méthode des réductions est de séparer l'intégrale en deux parties :

- Une partie libre de divergence, elle est calculable à 4 dimensions
- Une autre contient toutes les divergences infrarouges mais le nombre de propagateurs est réduit

$$\begin{aligned}
 I_N^{n,\mu_1 \dots \mu_r}(a_1, \dots, a_r; S) &= \int d\bar{k} \frac{q_{a_1}^{\mu_1} \dots q_{a_r}^{\mu_r}}{\prod_{i \in S} (q_i^2 - m_i^2 + i\delta)} \\
 &= \int d\bar{k} \frac{[q_{a_1}^{\mu_1} + \sum_{j \in S} C_{ja_1}^{\mu_1} (q_j^2 - m_j^2)] q_{a_1}^{\mu_1} \dots q_{a_r}^{\mu_r}}{\prod_{i \in S} (q_i^2 - m_i^2 + i\delta)} \\
 &\quad - \sum_{j \in S} C_{ja_1}^{\mu_1} \int d\bar{k} \frac{(q_j^2 - m_j^2) q_{a_1}^{\mu_1} \dots q_{a_r}^{\mu_r}}{\prod_{i \in S} (q_i^2 - m_i^2 + i\delta)} \\
 &= \underbrace{I_{N-1}^n}_{\text{div-IR}} + \underbrace{I_N^{n+2}}_{\text{fin}}
 \end{aligned}$$



Exemple : fonction à six points

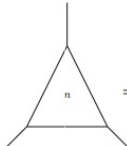
- A_i, B_i et C_i

ces facteurs sont définis dans
arXiv :hep-ph/0504267v2
T. Binoth, J-Ph. Guillet

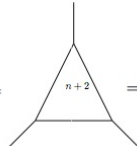
$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram } n = \text{Diagram } n+2 \text{ (with a red line labeled 0)} + \sum_{i=1}^6 A_i \times \text{Diagram } n \\
 & = \sum_{i=1}^6 A_i \text{ (with a red line labeled 0)} + \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^5 B_j A_i \times \text{Diagram } n \\
 & = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^5 B_j A_i \text{ (with a red line labeled 0)} + \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^4 C_k B_j A_i \times \text{Diagram } n
 \end{aligned}$$

Diagrammes de Base

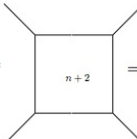
- Triangle à "n" dimension (**divergeant**) :

$$I_3^4 = \text{Triangle}(n) = \int_0^1 \Pi_{i=1}^4 \delta(1 - \Sigma_{i=1}^3 z) \left[-\frac{1}{2} \vec{z}^* S \vec{z} - i\lambda \right]$$


- Triangle à "n+2" dimension (**fini**) :

$$I_3^6 = \text{Triangle}(n+2) = \int_0^1 \Pi_{i=1}^3 \delta(1 - \Sigma_{i=1}^3 z) \left[-\frac{1}{2} \vec{z}^* S \vec{z} - i\lambda \right]^{-1}$$


- Boite à "n+2" dimension (**finie**) :

$$I_4^6 = \text{Box}(n+2) = \int_0^1 \Pi_{i=1}^4 \delta(1 - \Sigma_{i=1}^4 z) \left[-\frac{1}{2} \vec{z}^* S \vec{z} - i\lambda \right]^{-1}$$


Fonctions à trois points à "n" dim

- Intégrale unidimensionnelle :

$$I_3^4 = \sum_{i=1}^3 B_i \int_0^1 dz \cdot \frac{\ln[g_i(z)] - \ln\left[-\frac{\text{Det}[S]}{2 \cdot \text{Det}[G]}\right]}{2 \cdot \text{Det}[G]g_i(z) + \text{Det}[S]}$$

avec :

$$B_i = b_i \cdot \text{Det}[S]$$

et

$$\sum_{i=1}^3 b_i S_{ij} = 1$$

- Formule analytique :

$$I_3^4 = f_3^4(z_1, z_2, z_0, \ln, \eta)$$

Fonctions à trois points à "n+2" dim

- Intégrale unidimensionnelle :

$$I_3^6 = \sum_{i=1}^3 B_i \int_0^1 dz \cdot \frac{g_i(z) \cdot \ln[g_i(z)] - \frac{Det[S]}{2 \cdot Det[G]} \cdot \ln \left[-\frac{Det[S]}{2 \cdot Det[G]} \right]}{2 \cdot Det[G] g_i(z) + Det[S]} - \frac{1}{2}$$

avec :

$$B_i = b_i \cdot Det[S]$$

et

$$\sum_{i=1}^3 b_i S_{ij} = 1$$

- Formule analytique :

$$I_3^6 = f_3^6(z_1, z_2, z_0, \ln, \eta)$$

Fonction à quatre points à "n+2" dim

- **Intégrale unidimensionnelle :**
une somme de 7 terme comme ceci :

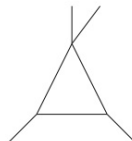
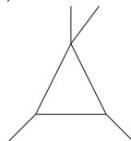
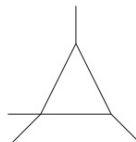
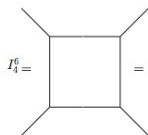
$$\begin{pmatrix} -2m_1^2 & s_2 - m_1^2 - m_2^2 & s_{23} - m_1^2 - m_3^2 & s_1 - m_1^2 - m_4^2 \\ s_2 - m_1^2 - m_2^2 & -2m_2^2 & s_3 - m_2^2 - m_3^2 & s_{12} - m_2^2 - m_4^2 \\ s_{23} - m_1^2 - m_3^2 & s_3 - m_2^2 - m_3^2 & -2m_3^2 & s_4 - m_2^2 - m_4^2 \\ s_1 - m_1^2 - m_4^2 & s_{12} - m_2^2 - m_4^2 & s_4 - m_3^2 - m_4^2 & -2m_4^2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{A_i(b_i, \det S)}{\det G} \times \int_0^1 dz \sum_{i=1}^3 \frac{1}{z - z_{pi}} \left[\begin{aligned} & \ln[az^2 + bz + c] - \ln[az_{pi}^2 + bz_{pi} + c] \\ & - \ln[z - (1, \gamma, \gamma)] - \ln[z_{pi} - (1, \gamma, \gamma)] \\ & + \eta[az^2 + bz + c, \frac{1}{z - (1, \gamma, \gamma)}] - \eta[az_{pi}^2 + bz_{pi} + c, \frac{1}{z_{pi} - (1, \gamma, \gamma)}] \end{aligned} \right]$$

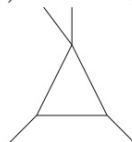
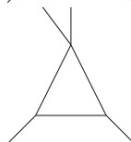
- **Formule analytique :**

$$I_4^6 = f_4^6(z_1, z_2, z_0, \ln, \eta)$$

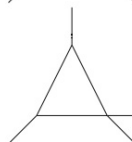
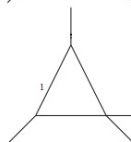
- I_4^6 est la somme de ces 7 triangles plus des termes finis (des fonctions η , L_{i2} et des logarithmes)



+



+



+

Le déterminant de Gram

$$S_{ij} = (r_i - r_j)^2 - m_i^2 - m_j^2$$

$$= -G_{ij}^a + V_i^a + V_j^a$$

$$G_{ij}^a = -(S_{ij} - S_{aj} - S_{ia} + S_{aa})$$

$$V_j^a = S_{aj} - \frac{1}{2}S_{aa}$$

- Certains coefficients (A_i, B_i et C_i) sont proportionnelles à $\frac{1}{\text{Det}[G]}$.
- La fonction I_4^6 est proportionnelle à $\frac{1}{\text{Det}[G]}$.
- $\text{Det}[G]$ prend des valeurs arbitraires.
- Si $\text{Det}[G] \rightarrow 0$, il gêne la "stabilité numérique".

Golem challenges

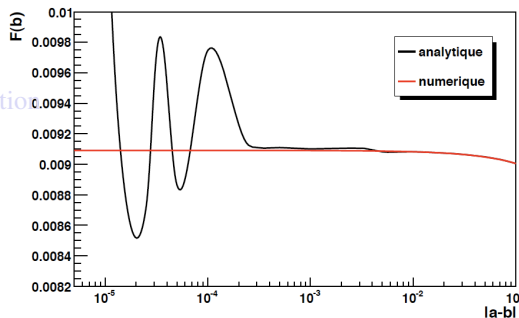
- Avoid gram determinant.
- Numerical stable evaluation of the loop integrals.

$$F(b) = \int_0^1 \frac{dx}{(x-a)(x-b)} \quad (1)$$

$$= \frac{1}{a-b} \left[\ln\left(\frac{1-a}{-a}\right) - \ln\left(\frac{1-b}{-b}\right) \right] \quad (2)$$

Solutions :

- if $\text{deG} \approx 0$ use analytical formulae
- else $\text{deG} \sim 0$ use numerical integration



Golem challenges

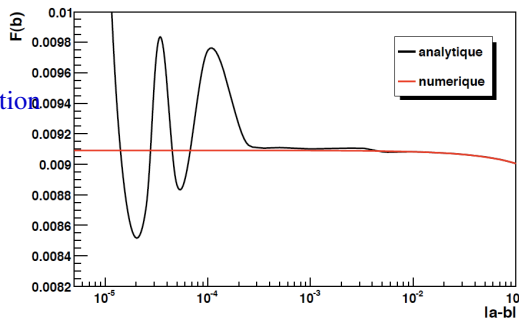
- Avoid gram determinant.
- Numerical stable evaluation of the loop integrals.

$$F(b) = \int_0^1 \frac{dx}{(x-a)(x-b)} \quad (1)$$

$$= \frac{1}{a-b} \left[\ln\left(\frac{1-a}{-a}\right) - \ln\left(\frac{1-b}{-b}\right) \right] \quad (2)$$

Solutions :

- if $\text{deG} \approx 0$ use analytical formulae
- else $\text{deG} \sim 0$ use numerical integration



Golem for massive particles

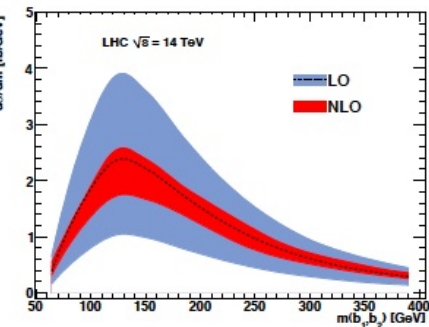
- **Massive three points functions :**

- ▶ Analytical formulae and One dimensional representation : "Done".
- ▶ Implemented in the library : "Done".

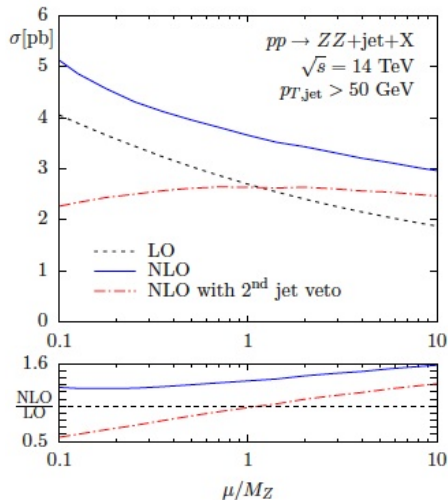
- **Massive four points functions I_4^6 :**

- ▶ Analytical formulae and One dimensional representation : "Done".
- ▶ Verification and implementation : "Not yet ".

Quelques plots !



- $pp \rightarrow b\bar{b}b\bar{b}$
- $pp \rightarrow ZZ + \text{jet} + X$
- Voir arXiv :1007.3580v1 Gavin Cullen et al



"Graviton" et LHC!!!

- Modèle "ADD" : " $D = 4 + \delta$ "
(Arkani-Hamed,
Dimopoulos et Dvali)

- $pp \longrightarrow G + jet$

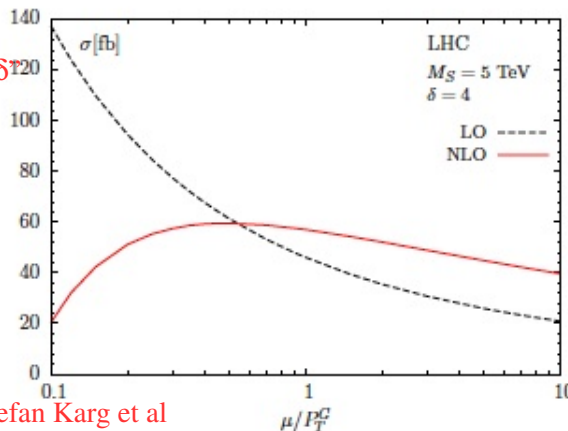
- LO :

$$q\bar{q} \longrightarrow gG$$

$$qg \longrightarrow qG$$

$$gg \longrightarrow gG$$

- Voir arXiv :1001.2537v1 Stefan Karg et al



Conclusion : Statut de Golem

- Version sans masse (QCD)



- Version avec des masses réelles



- Version avec des masses complexes



Merci — dankie — faleminderit — amesezenallo
 — danke — thank you — شكراً — eskerrik — asko
 — благодаря — 謝謝 — 고맙습니다 — hvala —
 tak gracias — tøkk vinaka — kiitos — tank —
 ευχαριστώ — aguyjé — mahalo — תודה —
 köszönöm — terima kasih — grazie —
 ありがとう — akun — khob chai — weebale —
 баярлалаа — фала — misoatra — dank — dżekuje
 — obrigado — mulțumesc — спасибо — хвала —
 vd'aka — tangi — tack asante — salámat — khob
 khun — teşekkür — ederim — дякую — cám —
 jëre-jëf — ngiyabonga...