

Chapitre 5

Ondes acoustiques

Un deuxième exemple important d'ondes mécaniques est donné par les *ondes acoustiques*, correspondant à la propagation de petites perturbations dans un fluide. L'onde sera alors caractérisée indifféremment par le déplacement des éléments de fluide ou par la variation de pression autour de la pression moyenne. Cet exemple permettra aussi d'aborder la propagation des ondes à trois dimensions, ce qui n'est évidemment pas possible sur une corde vibrante.

5.1 Description d'un fluide

On considère que les propriétés d'un fluide considéré varient continuellement d'un point à l'autre de son volume ; on se place ainsi dans l'approximation des *milieux continus*. Cette approximation sera correcte lorsque les phénomènes décrits auront des échelles caractéristiques très grandes devant le libre parcours moyen des particules constituant le fluide.

Les différentes quantités physiques caractérisant le fluide sont donc des *champs*, c.-à.-d. des fonctions de la position \vec{x} et du temps t (description dite *eulérienne*). Les différents champs à considérer par la suite sont

- le champ de densité $\rho(\vec{x},t)$ qui donne la masse volumique locale du fluide dans un volume infinitésimal centré au point \vec{x} , à l'instant t
- le champ de température $T(\vec{x},t)$
- le champ de pression $P(\vec{x},t)$, qui sera défini plus en détail dans la suite du texte
- le champ de vitesse $\vec{v}(\vec{x},t)$ qui donne la vitesse moyenne de l'écoulement pour volume infinitésimal de fluide centré au point \vec{x} , à l'instant t

toutes ces quantités sont des moyennes statistiques effectuées à l'instant t sur les particules présentes dans un volume infinitésimal centré autour du point \vec{x} .

Pour écrire le principe fondamental de la dynamique, on considèrera plutôt le système constitué d'un petit volume de fluide, dont on va suivre les déplacements et déformations au cours du temps (description dite *lagrangienne*). Cet élément de fluide, qui se trouvait à une position moyenne $\vec{x} \equiv \vec{x}(0)$ à l'instant initial $t = 0$, se trouve à la position $\vec{x}(t)$ à un instant ultérieur. Cette dernière est donc une fonction

du temps, correspondant à la position moyenne des particules de l'élément de fluide considéré, à l'instant t .

On peut alors définir le *déplacement* de cet élément de fluide comme

$$\vec{\psi}(\vec{x}, t) = \vec{x}(t) - \vec{x}(0), \quad (5.1.1)$$

qui donne le déplacement du petit volume de fluide qui se trouvait au point \vec{x} à $t = 0$ (c.-à.-d. que $\vec{\psi}(\vec{x}, 0) = 0$).

5.1.1 Ondes acoustiques à une dimension

Dans la suite de cette partie, pour simplifier mathématiquement l'étude des ondes acoustiques, nous supposons que tous les champs caractérisant l'onde ne dépendent que d'une seule coordonnée x . Dans le cas où le milieu de propagation est infini, cela s'applique naturellement dans le cas où nous considérons uniquement une onde plane ; il suffit alors de prendre l'axe Ox parallèle au vecteur d'onde \vec{k} .

Cette hypothèse est aussi valable si nous considérons la propagation des ondes acoustiques dans un tuyau de section petite devant sa longueur, en négligeant les effets de bord provenant de la viscosité du fluide. Il suffit là encore de prendre l'axe Ox parallèle à l'axe du tuyau.

5.1.2 Forces de pression

Négligeant l'influence des forces visqueuses (frottements fluides) et de la gravitation, les forces s'exerçant sur un élément de fluide infinitésimal sont uniquement des forces de pression. Comme expliqué précédemment, on considère un tuyau, rempli de fluide, tel que l'aire de sa section est donnée par s . À une dimension, toutes les quantités vectorielles, comme les forces, deviennent des quantités *algébriques*, c.-à.-d. des nombres positifs ou négatifs.

En tout point du fluide on définit le champ de pression $P(x, t)$ de la manière habituelle. On note $F(x, t)$ la force (algébrique) au point x et à l'instant t exercée par la partie du fluide située dans la région $y < x$ sur le fluide dans la région $y > x$. Le champ de pression est alors défini par $F(x, t) = s \times P(x, t)$.

Force nette appliquée à un élément de fluide

Considérons un élément de volume de fluide d'épaisseur infinitésimale dx , délimité par deux faces d'aire s , situées en $x - \frac{dx}{2}$ et $x + \frac{dx}{2}$.

La somme des forces appliquées au système sera alors donnée par la somme des forces de pression sur les deux faces, voir figure 5.1. Ces forces appliquées au fluide seront dirigées vers l'intérieur de l'élément de fluide. La force de pression sur la face située en $x - \frac{dx}{2}$ est donnée en termes du champ de pression par

$$F|_{x-\frac{dx}{2}} = P(x - \frac{dx}{2}, t) s \quad (5.1.2)$$

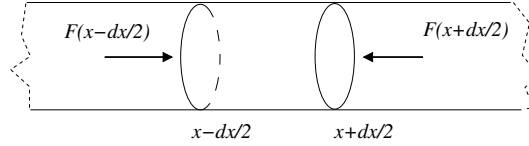


FIG. 5.1 – Forces pressantes appliquées à l'élément de fluide.

La force de pression sur la face opposée, située en $x + \frac{dx}{2}$, est orientée vers les x décroissants (car vers l'intérieur de l'élément de fluide) :

$$F|_{x+\frac{dx}{2}} = -P(x + \frac{dx}{2}, t) s \quad (5.1.3)$$

Additionnant les deux contributions des deux faces nous obtenons

$$F|_{x-\frac{dx}{2}} + F|_{x+\frac{dx}{2}} = [P(x - \frac{dx}{2}, t) - P(x + \frac{dx}{2}, t)]s \simeq -\frac{\partial P(x, t)}{\partial x} dx s \quad (5.1.4)$$

où nous avons supposé l'épaisseur de la tranche de fluide infinitésimale.

5.1.3 Principe fondamental de la dynamique

Le principe fondamental de la dynamique, à une dimension, pour l'élément de fluide soumis à des forces (algébriques) F_i s'écrit donc, dans le cas où les perturbations ne dépendent que d'une dimension:¹

$$m \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \sum_i F_i \quad (5.1.5)$$

La masse du système, constante par définition, est donnée par

$$m = \rho(x, t) \delta V = \rho s dx \quad (5.1.6)$$

en fonction de la masse volumique du fluide $\rho(x, t)$. En utilisant l'expression (5.1.4) pour les forces de pression s'exerçant sur l'élément de fluide, le principe fondamental de la dynamique donne l'équation suivante d'évolution :

$$\rho(x, t) \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \quad (5.1.7)$$

1. En toute rigueur, le terme de gauche contient une dérivée *particulière* par rapport au temps, qui comporte un terme supplémentaire dit d'*advection*: $dv/dt = \partial v/\partial t + (\partial v/\partial x)v$. En effet pour appliquer le PFD il est naturel de suivre l'évolution d'un élément de fluide, de contenu en particules et masse constantes, donc d'adopter la description lagrangienne. La dérivée particulière correspond à la dérivée d'un champ lié à la description eulérienne (champ de vitesse) en description lagrangienne. Notons que, pour une onde se propageant dans un fluide statique dans l'approximation linéaire, ce terme supplémentaire ne joue pas de rôle.

5.1.4 Équation de conservation de la masse

Naturellement, l'écoulement du fluide doit être tel qu'il conserve le nombre de particules, c.-à.-d. qu'il conserve la masse. On peut considérer alors l'évolution de la masse de fluide contenue dans un élément de volume fixe infinitésimal, pendant un intervalle de temps infinitésimal. Par un raisonnement analogue à celui de la sous-section 5.1.2, on obtient l'équation locale de la conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [\rho(x,t)v(x,t)] = 0 \quad (5.1.8)$$

Cette équation stipule que la variation de la masse dans l'élément infinitésimal est égale à la différence entre la masse entrante et la masse sortante.

La quantité $\rho(x,t)v(x,t)$, qui a la dimension d'une masse par unité de surface et par unité de temps, est identifiée avec le *flux de masse* de fluide à travers une section transverse du tuyau sonore.

Les équations fondamentales de la dynamique du fluide, éq. (5.1.7) et éq. (5.1.8), ne sont pas suffisantes pour caractériser complètement le fluide. Si toutes deux font intervenir le champ de vitesse, la première fait intervenir le champ de pression et la seconde le champ de densité. Pour obtenir une caractérisation complète du système il faut introduire une *équation d'état* liant la pression, la densité et la température du fluide.

La variation de masse pendant dt due à l'écoulement est donnée par la somme des flux de masse *entrants* à travers les deux faces pendant cet intervalle de temps. La masse proprement dite est donnée par (5.1.6). Considérons la face située en $x - \frac{dx}{2}$. Pendant un intervalle de temps dt la masse de fluide *entrant* par cette face est donnée par

$$\delta m \Big|_{x-\frac{dx}{2}} = \rho(x - \frac{dx}{2}, t) \times \underbrace{s v(x - \frac{dx}{2}, t) dt}_{\text{volume de fluide entrant pendant } dt} \quad (5.1.9)$$

en termes du champ de vitesse v , qui est orthogonal à la face considérée. De même la masse entrant par la face située en $x + \frac{dx}{2}$ est donnée par^a

$$\delta m \Big|_{x+\frac{dx}{2}} = -\rho(x + \frac{dx}{2}, t) s v(x + \frac{dx}{2}, t) dt \quad (5.1.10)$$

Additionnant également les contributions des autres faces nous obtenons pour la variation de la masse pendant dt :

$$\begin{aligned} \frac{s \partial \rho(x,t) dx}{\partial t} dt &= [\rho(x - \frac{dx}{2}, t) v(x - \frac{dx}{2}, t) - \rho(x + \frac{dx}{2}, t) v(x + \frac{dx}{2}, t)] s dt \\ &\simeq -\frac{\partial [\rho(x,t)v(x,t)]}{\partial x} s dx dt \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement l'équation locale de la conservation de la masse (5.1.8).

^aLe signe négatif est nécessaire pour prendre en compte le fluide entrant par cette face qui se déplace vers les x décroissants.

5.1.5 Perturbations linéaires d'un fluide au repos

Pour établir l'équation d'onde, considérons un fluide initialement au repos, c'est à dire tel que les champs de vitesse, pression et densité sont donnés en l'absence de perturbation par

$$\vec{v}_0(\vec{x},t) = \vec{0} \quad , \quad P(\vec{x},t) = P_0 \quad , \quad \rho(\vec{x},t) = \rho_0 \quad (5.1.11)$$

parcouru par une petite perturbation correspondant à un déplacement de fluide longitudinal à cette perturbation. Les champs de pression et densité sont alors paramétrés comme

$$P(\vec{x},t) = P_0 + p(\vec{x},t) \quad , \quad \rho(\vec{x},t) = \rho_0 + \delta\rho(\vec{x},t) \quad (5.1.12)$$

où nous supposons que $|p/P| \ll 1$, $|\delta\rho/\rho_0| \ll 1$.

Revenons maintenant à la propagation à une dimension. L'équation du mouvement (5.1.7) pour le champ de vitesse donne :

$$\left(\rho_0 + \delta\rho(x,t)\right) \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \quad (5.1.13)$$

En linéarisant au premier ordre dans le champ de vitesse $v(x,t)$ et la surdensité $\delta\rho(x,t)$ on obtient simplement

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}} \quad (5.1.14)$$

et la conservation de la masse donne

$$\boxed{\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = 0} \quad (5.1.15)$$

Ces relations ne sont plus valables lorsque le fluide s'écoule (par exemple en présence de vent).

5.2 Compressibilité et équation d'onde

Les équations fondamentales de la dynamique du fluide, éq. (5.1.14) et éq. (5.1.15), ne sont pas suffisantes pour caractériser complètement le fluide. Si toutes deux font intervenir le champ de vitesse, la première fait intervenir le champ de pression et la seconde le champ de densité. Pour obtenir une caractérisation complète du système il faut introduire une *équation d'état* liant la pression et la masse volumique du fluide.

5.2.1 Thermodynamique du fluide

Nous devons utiliser des relations thermodynamiques pour relier la surpression, les variations de densité et de température, et caractériser ainsi complètement le système.

On considère comme système un élément infinitésimal de fluide (description lagrangienne). Comme tout système thermodynamique, il est caractérisé par son énergie interne U . Sa variation infinitésimale est liée à la quantité de chaleur reçue et au travail exercé par les forces de pression appliquées au fluide :

$$dU = \delta Q - PdV \quad (5.2.1)$$

Si de plus la transformation est *réversible* la variation infinitésimale de son entropie est à la chaleur reçue par le système selon

$$dS = \frac{\delta Q}{T}. \quad (5.2.2)$$

Cette hypothèse est raisonnable pour les ondes sonores qui n'impliquent pas de changement extrêmement brutaux dans le fluide. Nous pouvons faire aussi l'hypothèse que la faible perturbation induite par l'onde sonore n'induit pas de transfert de chaleur dans le fluide, c.-à.-d. que la transformation thermodynamique associée est adiabatique. Comme elle est en plus réversible, nous avons une transformation à entropie constante, ou *isentropique*. En effet

$$\delta Q = 0 \Leftrightarrow dS = 0 \quad (5.2.3)$$

dans ce cas. Pour une telle transformation nous avons alors $dU + PdV = 0$.

5.2.2 Compressibilité

Il nous reste maintenant à introduire une relation entre les variables d'état du système, ou en d'autres termes une *équation d'état*. Nous choisissons comme variable d'état du système la pression P , le volume V et l'entropie S . Nous pouvons alors exprimer par exemple le volume en fonction de la pression et de l'entropie:

$$V = V(P, S) \implies dV = \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_S dP + \left. \frac{\partial V}{\partial S} \right|_P dS \quad (5.2.4)$$

Lors d'une transformation isentropique, tel que nous l'avons supposé, nous avons $dS = 0$, ce qui implique que la variation infinitésimale de volume est simplement

$$dV = \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_S dP \quad (5.2.5)$$

Nous pouvons alors introduire le coefficient de *compressibilité isentropique*², ou en d'autres termes la variation du volume du fluide en réponse à une variation de pression, par

$$\chi_s = -\frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_S \quad (5.2.6)$$

On suppose que ce coefficient est une constante, ce qui est raisonnable pour les petites perturbations du fluides considérées ici.

2. Pour une transformation à température fixée, on peut aussi définir une compressibilité isotherme.

Pour le petit élément de fluide la variation de pression correspond à la surpression $p(x,t)$. Le volume initial de fluide est donné par $\delta V_0 = s dx$. En présence d'un champ de déplacement $\psi(x,t)$ le volume devient

$$\begin{aligned} \delta V(x,t) &= s \left[x + \frac{dx}{2} + \psi\left(x + \frac{dx}{2}, t\right) - \left(x - \frac{dx}{2} + \psi\left(x - \frac{dx}{2}, t\right)\right) \right] \\ &\simeq \delta V_0 \left[1 + \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

La variation relative de volume est donc donnée au premier ordre par

$$\frac{\delta V(x,t) - \delta V_0}{\delta V_0} = \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \quad (5.2.8)$$

On obtient donc d'après la définition de la compressibilité isentropique que, pour les petites perturbations, la quantité suivante est constante

$$\chi_s = - \frac{1}{p(x,t)} \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \quad (5.2.9)$$

Cela implique en particulier, en dérivant une fois par rapport au temps, que

$$\boxed{\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = - \frac{1}{\chi_s} \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}} \quad (5.2.10)$$

5.2.3 Équation d'onde

Nous avons appris dans les pages précédentes qu'une onde sonore *de faible amplitude* à une dimension, dans un fluide au repos, est caractérisée par les trois équations fondamentales (PFD, conservation de la masse, compressibilité):

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5.2.11a)$$

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} = - \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} \quad (5.2.11b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{1}{\chi_s} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (5.2.11c)$$

Dérivons une fois par rapport au temps l'équation (5.2.11c). Au premier ordre dans le champ de vitesse nous obtenons la relation

$$\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} = - \frac{1}{\chi_s} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \right) \quad (5.2.12)$$

En utilisant l'équation du mouvement (5.2.11a), on obtient alors

$$\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} = - \frac{1}{\chi_s} \frac{\partial}{\partial x} \left[- \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \right] \quad (5.2.13)$$

Soit finalement

$$\boxed{\rho_0 \chi_s \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} = 0} \quad (5.2.14)$$

Cette équation est identique à l'équation d'onde (ou de d'Alembert) à une dimension, pour la surpression. La célérité des ondes sonores, ou vitesse du son, est alors identifiée comme

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}} \quad (5.2.15)$$

Nous pouvons donc réécrire l'équation précédente comme:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (5.2.16)$$

Remarquons que la perturbation correspondant à une onde sonore est liée au déplacement $\vec{\psi}(\vec{x},t)$ des éléments de fluide. Ce déplacement est parallèle à la direction de propagation de l'onde. Il s'agit donc d'un exemple d'*onde longitudinale*.

Contrairement aux ondes se propageant sur une corde, les ondes sonores sont de nature tridimensionnelle. En considérant des perturbations qui dépendent des trois coordonnées spatiales, on obtient naturellement l'équation de d'Alembert à trois dimensions :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(\vec{x},t)}{\partial t^2} - \Delta p(\vec{x},t) = 0 \quad (5.2.17)$$

La forme de la solution générale dépend des symétries du problème, liées à la forme de la source émettrice de l'onde.

Considérons maintenant la dérivée par rapport au temps de l'équation (5.2.11a) et utilisons ensuite (5.2.11b) :

$$\partial_t^2 v = -\frac{1}{\rho_0} \partial_x (\partial_t p) = -\frac{1}{\rho_0} \partial_x \left(-\frac{1}{\chi_s} \partial_x v \right) = c^2 \partial_x^2 v \quad (5.2.18)$$

Ainsi nous observons que $v(x,t)$ satisfait également l'équation d'onde :

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = 0} \quad (5.2.19)$$

Remarquons cependant que cela n'est pas valable pour les ondes à trois dimensions comme les ondes sphériques.

Une autre conséquence importante des équations (5.2.11) est la relation suivante :

$$\partial_x v = -\chi_s \partial_t p = -\frac{1}{\rho_0} \partial_t \delta \rho \implies \partial_t \delta \rho = \rho_0 \chi_s \partial_t p \quad (5.2.20)$$

On obtient donc la relation $p(x,t) = c^2 \delta \rho(x,t) + \alpha(x)$. En imposant que l'onde s'annule pour $t \rightarrow \pm\infty$ (c.-à.-d. qu'elle n'existe que durant un intervalle fini de temps), on a $\alpha(x) = 0$. La relation obtenue

$$\boxed{p(x,t) = c^2 \delta \rho(x,t)} \quad (5.2.21)$$

est une manière de définir la vitesse du son.

5.2.4 Gaz parfait

Considérons maintenant le cas particulier d'un gaz parfait. Il satisfait l'équation d'état bien connue:

$$PV = Nk_B T \quad (5.2.22)$$

en fonction de la constante de Boltzmann k_B , et pour N particules. De plus, on peut montrer que lors d'une transformation à entropie constante, le gaz parfait vérifie la *loi de Laplace*:

$$PV^\gamma = \text{constante} \quad (5.2.23)$$

Nous pouvons aisément calculer le coefficient de compressibilité isentropique. Nous avons

$$\chi_s = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} = \frac{1}{\gamma P} \quad (5.2.24)$$

Pour une onde sonore, la surpression p est faible devant la pression au repos P_0 . Nous avons donc

$$\chi_s \simeq \frac{1}{\gamma P_0} = \frac{1}{\gamma} \frac{V}{Nk_B T} \quad (5.2.25)$$

La célérité des ondes sonores est alors donnée par :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}} = \sqrt{\gamma k_B T \frac{N}{\rho_0 V}} \quad (5.2.26)$$

Cette expression fait apparaître la masse au repos $\rho_0 V$ de l'élément de fluide. En introduisant la masse molaire M des particules constituant le fluide, ainsi que la constante des gaz parfaits

$$R = N_A k_B \quad (5.2.27)$$

nous avons finalement

$$c = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}} \quad (5.2.28)$$

Nous voyons que plus la température est basse, plus la célérité du son est faible. C'est pour cela qu'il est plus facile pour les avions de passer les murs du son à haute altitude!

Donnons un ordre de grandeur de cette quantité. L'air est constitué d'un mélange de plusieurs gaz différents mais peut être modélisé comme un gaz parfait avec $\gamma = 1,4$ et de masse molaire $M = 28,95 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. À la température de $T = 293 \text{ Kelvins}$, on trouve une célérité de $c = 343 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Loi de Laplace pour un gaz parfait Lors d'une transformation isentropique, nous avons

$$dU = -PdV = C_v dT \quad (5.2.29)$$

On considère aussi un deuxième potentiel thermodynamique, l'enthalpie H , approprié pour décrire les transformations à pression constante (plutôt qu'à volume constant) défini par $H = U + PV$. Il vérifie donc

$$dH = TdS + VdP \quad (5.2.30)$$

Pour une transformation isentropique nous avons simplement:

$$dH = VdP = C_p dT. \quad (5.2.31)$$

Nous avons introduit les capacités thermiques à volume constant et à pression constante définies par

$$C_v = T\partial S/\partial T|_V \quad \text{et} \quad C_p = T\partial S/\partial T|_P \quad (5.2.32)$$

En introduisant le coefficient

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}, \quad (5.2.33)$$

qui est constant pour un gaz parfait, on déduit de ces relations l'équation suivante

$$\gamma = -\frac{dP/P}{dV/V} \quad (5.2.34)$$

Ce qui implique $C_v(\gamma - 1)dT = d(PV) = Nk_B T$. Donc nous trouvons la relation

$$C_v(\gamma - 1) = Nk_B \quad (5.2.35)$$

On peut montrer que pour un gaz parfait monoatomique nous avons $C_v = \frac{3}{2}Nk_B$, alors que pour un gaz diatomique, $C_v = \frac{5}{2}Nk_B$. Dans les deux cas, le coefficient est égal à la moitié du nombre de degrés de liberté des constituants du gaz. Il s'en suit que γ est une constante, donc en intégrant (5.2.34) on trouve qu'une transformation isentropique d'un gaz parfait est telle que

$$PV^\gamma = \text{constante} \quad (5.2.36)$$

le long de la transformation.

5.3 Tuyaux sonores

Nous abordons maintenant le problème des conditions aux limites pour les ondes acoustiques. Nous avons déjà fait cette étude pour la corde vibrante, mais dans le présent contexte on peut s'autoriser des conditions aux limites différentes. Dans toute la suite, on considèrera un écoulement à une dimension, dans un tuyau sonore de section d'aire s , voir fig. 5.2.

Si on considère que le tuyau est orienté selon l'axe Ox , et que la propagation s'effectue selon le même axe, la surpression $p(x,t)$ satisfait l'équation d'onde (2.1.1) à une dimension. L'onde est également caractérisée par le champ de déplacement $\psi(x,t)$ et le champ de vitesse $v(x,t)$. Toutes ces quantités ne dépendent pas des coordonnées y et z transverses à l'onde. Le champ de vitesse satisfait alors également l'équation d'onde

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad (5.3.1)$$

où la célérité c de l'onde sonore est donnée par l'éq. (5.2.15), comme nous l'avons démontré plus haut.

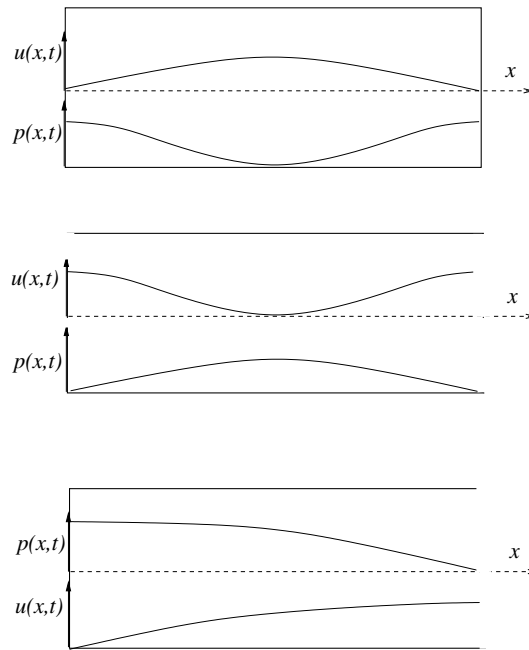


FIG. 5.2 – Tuyau fermé (haut), ouvert (milieu) et semi-ouvert (bas).

La présence des parois latérales du tube n'impose pas de conditions sur l'onde qui se propage selon Ox , mais nous avons évidemment une discontinuité de l'écoulement car l'onde ne se propage pas en dehors du tube.³ Nous pouvons distinguer alors trois types de tuyaux sonores possibles :

3. Nous avons en effet négligé les effets des frottements, qui dans la pratique vont coupler l'onde sonore aux parois du tube.

5.3.1 Tuyau fermé

On considère un tuyau dont les deux extrémités, en $x = 0$ et $x = L$, sont fermées par une paroi rigide. Comme celle-ci ne peut être mise en mouvement, le champ de déplacement est naturellement nul :

$$\psi(x = 0, t) = 0, \quad \psi(x = L, t) = 0 \quad \forall t \quad (5.3.2)$$

Ces relations étant vérifiées à tout instant, nous avons également pour le champ de vitesse

$$v(x = 0, t) = 0, \quad v(x = L, t) = 0 \quad \forall t \quad (5.3.3)$$

Nous avons donc obtenu des *nœuds* aux deux extrémités de la corde. Partant d'une solution générale de l'équation d'onde pour le champ de vitesse

$$v(x, t) = v_-(x - ct) + v_+(x + ct) \quad (5.3.4)$$

l'analyse est strictement identique à celle effectuée pour la corde vibrante, voir sec. 4.2. Nous obtenons des *ondes stationnaires*, dont les fréquences propres ν_n sont données par l'éq. (4.2.11). La solution générale du problème est une superposition de modes de la forme :

$$v_n(x, t) = A_n \sin(2\pi\nu_n t + \phi_n) \sin\left(\frac{2\pi\nu_n}{c}x\right) \quad (5.3.5)$$

Comme précédemment les nœuds pour le champ de vitesse sont situés en $x_a = aL/n$, $\ell = 0, \dots, n$ et les ventres en $x_a = (a + \frac{1}{2})L/n$, $\ell = 0, \dots, n - 1$. La relation (5.2.10) nous apprend que le champ de surpression satisfait pour ce mode

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{2\pi\nu_n}{\chi_s c} A_n \sin(2\pi\nu_n t + \phi_n) \cos\left(\frac{2\pi\nu_n}{c}x\right) \quad (5.3.6)$$

Nous savons que la valeur moyenne dans le temps de la surpression doit être nulle en tout point, car l'onde est sinusoïdale. En intégrant cette dernière équation par rapport au temps, et en utilisant l'expression (5.2.15) pour la célérité, on trouve

$$p(x, t) = \rho_0 c A_n \cos(2\pi\nu_n t + \phi_n) \cos\left(\frac{2\pi\nu_n}{c}x\right) \quad (5.3.7)$$

Nous observons alors que les nœuds pour le champ de vitesse $u(x, t)$ sont des ventres pour le champ de surpression, et inversement. Le premier satisfait des conditions aux limites dites *de Dirichlet*, et le second des conditions aux limites dites *de von Neumann*. Ces dernières imposent que

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0, t} = 0, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=L, t} = 0 \quad (5.3.8)$$

Elles indiquent qu'il n'y a pas de force pressante nette appliquée à l'élément de fluide situé contre la paroi.

5.3.2 Tuyau ouvert

Nous considérons maintenant un tuyau ouvert aux deux extrémités. L'onde est alors mise en contact avec un grand réservoir de pression (au sens thermodynamique du terme) à la pression atmosphérique P_0 . Il est alors naturel d'imposer que la suppression s'annule :

$$p(x=0,t) = 0 \quad , \quad p(x=L,t) = 0 \quad (5.3.9)$$

Nous avons donc des conditions de *Dirichlet* pour la suppression – et non pour la vitesse comme dans le cas précédent. On peut utiliser les résultats précédents pour écrire les modes propres de suppression

$$p_n(x,t) = B_n \sin(2\pi\nu_n t + \phi_n) \sin\left(\frac{2\pi\nu_n}{c}x\right) \quad (5.3.10)$$

ainsi que ceux de vitesse:

$$v_n(x,t) = \frac{B_n}{\rho_0 c} \cos(2\pi\nu_n t + \phi_n) \cos\left(\frac{2\pi\nu_n}{c}x\right) \quad (5.3.11)$$

Nous voyons que le champ de vitesse satisfait des conditions aux limites de von Neumann, même si ce n'est pas nécessairement très intuitif.

5.3.3 Tuyau semi-ouvert

Considérons maintenant le dernier cas, le plus intéressant. On choisit un tuyau sonore dont l'une des extrémités, en $x=0$, est fermée et l'autre, en $x=L$ est ouverte. Le champ de vitesse satisfait alors des conditions aux limites mixtes: Dirichlet en $x=0$ et von Neumann en $x=L$:

$$v(x=0,t) = 0 \quad (5.3.12a)$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=L,t} = 0 \quad (5.3.12b)$$

De manière équivalente, nous imposons que $v(x=0,t) = 0$ et $p(x=L,t) = 0$.

L'analyse des solutions sinusoïdales de ces conditions est similaire à celle des autres exemples. Partons en notation complexe d'une solution sinusoïdale monochromatique générique

$$\tilde{v}(x,t) = \tilde{A}_- e^{i(\omega t - kx)} + \tilde{A}_+ e^{i(\omega t + kx)} \quad (5.3.13)$$

La première condition, éq (5.3.12a), impose $\tilde{A}_- = -\tilde{A}_+ = \tilde{A}$, soit que nous ayons une onde stationnaire de la forme

$$\tilde{v}(x,t) = 2i\tilde{A} e^{i\omega t} \sin(kx) \quad (5.3.14)$$

La deuxième condition, éq (5.3.12b), se réduit à

$$\cos(k_n L) = 0 \implies k_n = \frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{L}, n \in \mathbb{N} \quad (5.3.15)$$

Les fréquences propres sont alors

$$\nu_n = \frac{(n + \frac{1}{2})c}{2L} \quad (5.3.16)$$

Nous observons que la plus petite fréquence possible est deux fois plus petite que dans le cas d'un tuyau ouvert ou fermé. Dans le contexte musical, c'est intéressant pour obtenir des sons graves sans allonger démesurément la taille du tuyau (par exemple pour un orgue).

Il est facile de voir que le point $x = 0$ est un nœud de vitesse et un ventre de surpression. De manière analogue le point $x = L$ est un nœud de surpression et un ventre de vitesse.

5.4 Énergie

Comme pour les cordes vibrantes, nous pouvons, au lieu de la dynamique du système, considérer l'énergie mécanique contenue dans l'onde sonore. Cette énergie, supposant le système conservatif, se compose d'une partie cinétique et d'une partie potentielle. Dans l'hypothèse de l'hydrodynamique linéaire que nous avons adoptée, l'énergie cinétique d'un élément infinitésimal de fluide située en \vec{x} , parcourue par une onde sonore mais initialement au repos, est donnée par:

$$\delta E_c(\vec{x}, t) = \frac{\rho_0}{2} \|\vec{v}(\vec{x}, t)\|^2 dx dy dz \quad (5.4.1)$$

En divisant par le volume $dx dy dz$ on trouve la *densité volumique d'énergie cinétique*:

$$e_c(\vec{x}, t) = \frac{\rho_0}{2} \|\vec{v}(\vec{x}, t)\|^2 \quad (5.4.2)$$

La *densité volumique d'énergie potentielle* du fluide est plus délicate à obtenir. On admettra qu'elle est donnée par :

$$e_p(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} \chi_s p^2(\vec{x}, t) \quad (5.4.3)$$

On en déduit alors la densité volumique d'énergie mécanique :

$$e_m(\vec{x}, t) = \frac{\rho_0}{2} \|\vec{v}(\vec{x}, t)\|^2 + \frac{1}{2} \chi_s p^2(\vec{x}, t) \quad (5.4.4)$$

Dans le cas où les ondes se propagent à une seule dimension, on vérifie aisément que

$$\frac{\partial}{\partial t} e_m(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} [p(x, t) v(x, t)] \quad (5.4.5)$$

ce qui définit le courant d'énergie mécanique de l'onde sonore, appelé aussi *puissance transportée par unité de surface d'onde*

$$j_m(x, t) = p(x, t) v(x, t) \quad (5.4.6)$$

cette quantité s'exprime en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$. Il s'agit donc d'un flux d'énergie.

Un calcul similaire à trois dimensions donne la formule

$$\boxed{\vec{J}_m(\vec{x}, t) = p(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t)} \quad (5.4.7)$$

La conservation de l'énergie mécanique globale de l'onde, définie par l'intégrale de la densité d'énergie sur le volume

$$E_m = \iiint \left(e_c(\vec{x}) + e_p(\vec{x}) \right) dV, \quad (5.4.8)$$

est assurée par le théorème d'Ostrogradski, si les conditions aux limites sont bien choisies.

5.4.1 Impédance acoustique

Les deux grandeurs caractérisant une onde acoustique, surpression $p(\vec{x}, t)$ et vitesse de déplacement moyenne des molécules de fluide $\vec{v}(\vec{x}, t)$, peuvent être employées indifféremment pour décrire sa propagation.

Considérons une onde *progressive* à une dimension, se propageant selon Ox dont la surpression et la vitesse sont notées respectivement $p_-(x, t)$ et $v_-(x, t)$. La surpression étant de la forme $p_-(x, t) = f(x - ct)$, on remarque alors que

$$\begin{cases} \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial f(x-ct)}{\partial x} = f'(x - ct) \\ \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial f(x-ct)}{\partial t} = -c f'(x - ct) \end{cases} \implies \frac{\partial p_-}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial p_-}{\partial t} \quad (5.4.9)$$

Le principe fondamental de la dynamique (5.2.11a) implique alors que

$$\frac{\partial v_-}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_-}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0 c} \frac{\partial p_-}{\partial t} \implies \frac{\partial}{\partial t} \left[v_-(x, t) - \frac{1}{\rho_0 c} p_-(x, t) \right] = 0 \quad (5.4.10)$$

En supposant que l'onde s'annule en $t = \pm\infty$, on en déduit que

$$\boxed{p_-(x, t) = Z v_-(x, t)} \quad (5.4.11)$$

où nous avons introduit l'*impédance acoustique caractéristique* du fluide définie par

$$\boxed{Z = \rho_0 c = \sqrt{\frac{\rho_0}{\chi_s}}}, \quad (5.4.12)$$

qui est comme son nom l'indique caractéristique du milieu de propagation.

Insistons sur le fait que la relation (5.4.11) est valable *uniquement pour une onde progressive*, indépendamment du fait qu'elle soit sinusoïdale ou non (il est aisé de le montrer). Pour une onde régressive, on trouve la relation suivante:

$$p_+(x, t) = -Z v_+(x, t) \quad (5.4.13)$$

En termes de cette impédance acoustique, on peut réécrire la densité d'énergie mécanique d'une onde *progressive* de la façon suivante:

$$e_m = \frac{1}{2}\rho_0 v^2 + \frac{1}{2}\chi_s p^2 = \frac{1}{2} [\rho_0 + \chi_s Z^2] v^2 \implies \boxed{e_m = \rho_0 v^2} \quad (5.4.14)$$

qui peut aussi s'écrire

$$e_m = \frac{\rho_0}{Z^2} p^2 = \chi_s p^2 \quad (5.4.15)$$

nous voyons que l'énergie mécanique est distribuée également entre énergie potentielle et cinétique dans le cas d'une onde progressive.

Onde sinusoïdale

Considérons maintenant le cas d'une onde progressive et sinusoïdale. Nous avons alors en notation complexe et réelle:

$$\tilde{p}_-(x,t) = \tilde{\mathcal{P}} e^{i(\omega t - kx)} \implies p_-(x,t) = \mathcal{P} \cos(\omega t - kx + \phi) \quad (5.4.16)$$

La relation (5.2.11c) implique alors que le champ de vitesse s'écrit

$$\tilde{v}_-(x,t) = \chi_s \frac{i\omega}{ik} \tilde{\mathcal{P}} e^{i(\omega t - kx)} \implies v_-(x,t) = \chi c \mathcal{P} \cos(\omega t - kx + \phi) \quad (5.4.17)$$

et on retrouve bien la relation (5.4.11).

5.4.2 Intensité acoustique

Pour une onde progressive sinusoïdale, la quantité importante physiquement est la valeur moyenne dans le temps de la puissance transportée par unité de surface $\vec{j}_m(\vec{x},t)$. Cette quantité s'appelle *vecteur intensité acoustique*, notée \vec{I} .

Commençons par considérer une onde plane progressive, dont le vecteur d'onde est orienté selon Ox . Nous avons

$$I = \langle j_m \rangle_t = \langle p(x,t) v_x(x,t) \rangle_t = \frac{1}{Z} \langle p(x,t)^2 \rangle_t \quad (5.4.18)$$

En utilisant la forme (5.4.16) on obtient

$$I = \langle j_m \rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T dt \mathcal{P}^2 \cos^2(\omega t - kx + \phi) \implies \boxed{I = \frac{\mathcal{P}^2}{2Z}} \quad (5.4.19)$$

où \mathcal{P} est l'amplitude de la surpression. En termes de l'amplitude \mathcal{U} de la vitesse on peut réécrire ce résultat comme

$$\boxed{I = \frac{1}{2} Z \mathcal{U}^2} \quad (5.4.20)$$

On remarque que la quantité obtenue est *indépendante* de la position x où celle-ci est mesurée. C'est une caractéristique particulière des ondes planes.

Ondes sphériques

Considérons le cas des ondes sphériques. La surpression associée à une onde sphérique sortante sinusoïdale est de la forme

$$p(r,t) = \frac{\mathcal{A}}{r} \cos(\omega t - \kappa r + \phi) \quad (5.4.21)$$

La puissance transportée est toujours donnée par l'équation (5.4.7), mais la relation entre surpression et vitesse est différente, sauf à des distances grandes devant λ . En suivant l'analyse donnée en complément de cette partie, on obtient

$$\boxed{\vec{I}(r) = \frac{\mathcal{A}^2}{2Z} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r} \quad (5.4.22)$$

Contrairement à une onde plane, l'intensité acoustique dépend de la distance à la source comme $1/r^2$. On oubliera souvent la nature vectorielle de cette quantité en s'intéressant à sa norme $I(r)$.

Pour comprendre la signification de ce résultat, calculons la puissance totale acoustique contenue dans une sphère \mathcal{S} de rayon r_0 centrée à l'origine où se trouve la source des ondes. Cette puissance \mathfrak{P} est donnée par⁴

$$\mathfrak{P} = \iint_{\mathcal{S}} I(r_0) dS = r_0^2 \int d\Omega I(r_0) = 4\pi \frac{\mathcal{A}^2}{2Z} \quad (5.4.23)$$

Nous trouvons que cette puissance est *indépendante* de la distance à la source, ce qui reflète naturellement la conservation de l'énergie (comme l'onde n'est pas atténuée par sa propagation dans le milieu). Ce résultat explique que l'intensité acoustique décroisse comme $1/r^2$ avec la distance à la source.

4. À une distance r_0 de l'origine, l'angle solide $d\Omega$ est défini comme $d\Omega = \frac{dS}{r_0^2}$, où dS est l'aire de l'élément de surface sur la sphère de rayon r_0 . L'angle solide total pour la sphère est 4π .

Ondes sphériques acoustiques

On considère une onde progressive sphérique quelconque, de la forme

$$p(\vec{x}, t) = \frac{1}{r} f(t - r/c) \quad (5.4.24)$$

Le champ de vitesse étant radial, il est relié à la surpression par :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_s} \operatorname{div}(\vec{v}) = -\frac{1}{\chi_s} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 v_r(r, t)] \quad (5.4.25)$$

On en déduit l'équation

$$\frac{\partial}{\partial r} [r^2 v_r(r, t)] = -\chi_s r f'(t - r/c) \quad (5.4.26)$$

Considérons maintenant le cas d'une onde sinusoïdale, c.-à.-d. telle que

$$f(t - r/c) = \mathcal{A} \cos [\omega(t - r/c) + \phi] \quad (5.4.27)$$

On obtient alors en intégrant l'expression suivante pour le champ de vitesse :

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \frac{1}{Z} \mathcal{A} \frac{1}{r} \left\{ \cos [\omega(t - r/c) + \phi] + \frac{\lambda}{2\pi r} \sin [\omega(t - r/c) + \phi] \right\} \vec{e}_r \quad (5.4.28)$$

Cette expression contient deux termes qui sont en quadrature de phase. Dans la *zone de rayonnement*, telle que $r \gg \lambda$, le deuxième terme est négligeable et on retrouve une relation analogue au cas unidimensionnel:

$$\vec{v}(\vec{x}, t) \stackrel{r \gg \lambda}{\simeq} \frac{1}{Z} p(\vec{x}, t) \vec{e}_r \quad (5.4.29)$$

Calculons maintenant l'intensité acoustique associée à cette onde. Partant de (5.4.27) et de (5.4.29) on obtient:

$$\begin{aligned} \vec{I} = \langle p \vec{v} \rangle_t = \vec{e}_r \frac{\mathcal{A}^2}{Z} \frac{1}{r^2} \left\{ \langle \cos^2 [\omega(t - r/c) + \phi] \rangle_t \right. \\ \left. + \frac{\lambda}{2\pi r} \langle \cos [\omega(t - r/c) + \phi] \sin [\omega(t - r/c) + \phi] \rangle_t \right\} \end{aligned}$$

la valeur moyenne du premier terme donne 1/2 et celle du deuxième terme donne zéro.

5.4.3 Niveau d'intensité sonore

Les intensités acoustiques mises en jeu par les ondes sonores varient sur plusieurs ordre de grandeur, même dans la vie courante. Cela se reflète dans la réponse logarithmique de l'appareil auditif au son. Il est donc commode d'utiliser une échelle logarithmique pour exprimer l'intensité sonore. On introduit ainsi le niveau d'intensité sonore L défini comme :

$$L = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right) \quad (5.4.30)$$

où nous utilisons le logarithme *décimal*. L'intensité acoustique est définie par rapport à une intensité de référence I_0 . Conventionnellement, celle-ci est choisie comme

$$I_0 = 10^{-12} \text{W} \cdot \text{m}^2 \quad (5.4.31)$$

et correspond à peu près au seuil d'audibilité humain à une fréquence de 1000 Hz. Le niveau d'intensité sonore L est sans dimension, néanmoins il s'exprime dans une unité appelée le *décibel* (dB). Donnons quelques ordres de grandeur :

- pièce très calme : 20 dB
- conversation à une distance d'un mètre : 50 dB
- grande route à 10 m de distance : 80 dB
- atteinte de l'appareil auditif à court terme : 120 dB

5.5 Interface entre deux fluides

Pour finir ce chapitre sur les ondes acoustiques, nous allons examiner le problème de la transmission d'ondes acoustiques à travers une interface entre deux fluides. Nous avons déjà abordé ce phénomène pour les cordes vibrantes, voir la sous-section 4.4. De

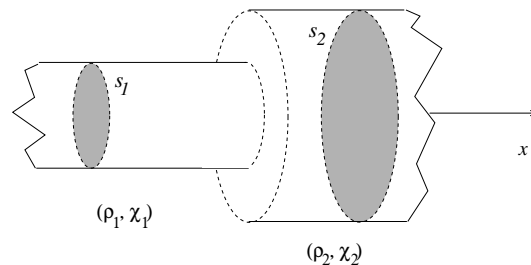


FIG. 5.3 – Jonction de deux tuyaux sonores.

manière générale on considèrera une interface entre deux tuyaux, voir figure 5.3. Les ondes acoustiques se propagent alors uniquement selon l'axe Ox , et sont caractérisées par la surpression $p(x,t)$ et $v(x,t)$, la composante de la vitesse selon Ox . Pour $x < 0$ l'onde se propage dans un tuyau de section s_1 contenant un fluide de masse volumique au repos ρ_1 et de compressibilité isentropique χ_1 , et pour $x > 0$ dans un tuyau de section s_2 contenant un fluide de masse volumique ρ_2 et de compressibilité χ_2 .

Comme pour les cordes vibrantes, nous supposons qu'une onde plane sinusoïdale est émise en une valeur de x négative, dans la direction des x croissants. Cette onde, l'onde incidente, s'écrit en notation complexe

$$\tilde{p}_I(x,t) = \tilde{A}_I e^{i\omega(t-x/c_1)} \quad \text{pour } x < 0 \quad (5.5.1)$$

en termes de la célérité de l'onde dans le premier fluide :

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{\rho_1 \chi_1}} \quad (5.5.2)$$

Au niveau de l'interface une onde réfléchie et une onde transmise sont naturellement générées :

$$\tilde{p}_R(x,t) = \tilde{A}_R e^{i\omega(t+x/c_1)} \quad \text{pour } x < 0 \quad (5.5.3a)$$

$$\tilde{p}_T(x,t) = \tilde{A}_T e^{i\omega(t-x/c_2)} \quad \text{pour } x > 0 \quad (5.5.3b)$$

où naturellement la célérité des ondes dans le deuxième fluide $c_2 = 1/\sqrt{\rho_2 \chi_2}$ intervient pour l'onde transmise (5.5.3b).

En utilisant les équations (5.4.11,5.4.13) nous en déduisons simplement les expressions des champs de vitesse correspondants :

$$\tilde{v}_I(x,t) = \frac{1}{Z_1} \tilde{p}_I(x,t) , \quad \tilde{v}_R(x,t) = -\frac{1}{Z_1} \tilde{p}_R(x,t) , \quad \tilde{v}_T(x,t) = \frac{1}{Z_2} \tilde{p}_T(x,t) , \quad (5.5.4)$$

5.5.1 Conditions de raccordement

Il nous faut maintenant comprendre quelles sont les *conditions de raccordement* reliant les ondes présentes pour $x < 0$ (ondes incidentes et réfléchies) et pour $x > 0$ (onde transmise).

Premièrement, les deux fluides étant en contact à travers une interface de masse nulle (comme dans le cas des cordes vibrantes) et rigide, la somme des forces appliquées à tout élément de surface de l'interface doit être nulle, donc la pression est la même des deux côtés. Nous obtenons donc la condition de *continuité de la surpression*

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^-} P(x,t) = \lim_{x \rightarrow 0^+} P(x,t) \implies \tilde{A}_I + \tilde{A}_R = \tilde{A}_T} \quad (5.5.5)$$

Conservation du débit

La puissance transportée par une onde acoustique dans un tuyau de section s est donnée par

$$\mathfrak{P}(x,t) = s j_m(x,t) = s v(x,t) \times p(x,t) \quad (5.5.6)$$

Il est naturel de considérer que la puissance transportée est conservée à travers l'interface, car nous supposons que cette dernière ne dissipe pas d'énergie. La surpression étant continue comme nous venons de le voir, nous voyons que la quantité appelée *débit acoustique*

$$D(x,t) = s v(x,t) \quad (5.5.7)$$

est conservée à travers l'interface entre les deux fluides. Notons que $\rho_0 D(x_0, t) dt$ représente (dans l'approximation acoustique) la masse de fluide passant à travers la surface de section s située en $x = x_0$, pendant un intervalle de temps infinitésimal dt .

Nous imposons maintenant la conservation du débit acoustique à travers l'interface entre les deux fluides. On obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} D_1(x, t) = \lim_{x \rightarrow 0^+} D_2(x, t) \implies \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^-} s_1 v(x, t) = \lim_{x \rightarrow 0^+} s_2 v(x, t)} \quad (5.5.8)$$

En utilisant les relations (5.5.4) entre les champs de vitesse et de surpression On obtient que la surpression satisfait une deuxième relation de continuité :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{s_1}{Z_1} (\tilde{p}_i(x, t) - \tilde{p}_r(x, t)) = \frac{s_2}{Z_2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \tilde{p}_t(x, t)} \quad (5.5.9)$$

Ce qui donne pour les amplitudes complexes

$$\boxed{\frac{s_1 \tilde{A}_i}{Z_1} - \frac{s_1 \tilde{A}_r}{Z_1} = \frac{s_2 \tilde{A}_t}{Z_2}} \quad (5.5.10)$$

5.5.2 Impédance hydraulique

Nous pouvons réécrire ce résultat en introduisant une notion d'*impédance hydraulique*, qui est spécifique aux ondes acoustiques se propageant dans un tuyau. Appelant s la section de ce tuyau elle est définie par

$$\boxed{\mathfrak{z} = \frac{Z}{s} = \frac{\rho_0 c}{s}} \quad (5.5.11)$$

En termes de cette quantité la relation de continuité précédente s'écrit

$$\boxed{\frac{\tilde{P}_i}{\mathfrak{z}_1} - \frac{\tilde{P}_r}{\mathfrak{z}_1} = \frac{\tilde{P}_t}{\mathfrak{z}_2}} \quad (5.5.12)$$

Cette notion est importante car à l'interface de deux tuyaux de section différente, mais composés du même fluide, il existe un phénomène de réflexion des ondes acoustiques.

5.5.3 Coefficients de réflexion et transmission

Finalement, en combinant les relations (5.5.5, 5.5.10) nous obtenons les coefficients de réflexion r et transmission t en amplitude *pour la surpression* :

$$r = \frac{\tilde{A}_r}{\tilde{A}_i} = \frac{\mathfrak{z}_2 - \mathfrak{z}_1}{\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2} \quad (5.5.13a)$$

$$\tau = \frac{\tilde{A}_t}{\tilde{A}_i} = \frac{2\mathfrak{z}_2}{\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2} \quad (5.5.13b)$$

Lorsque nous considérons le passage d'une onde plane entre deux milieux infinis, la surface de la section est évidemment introduite artificiellement et n'apparaît pas dans le résultat final. En égalant la surface (fictive) dans chacun des deux milieux, on obtient les coefficients de réflexion et transmission en fonction des impédances caractéristiques des deux fluides :

$$r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad (5.5.14a)$$

$$t = \frac{\tilde{A}_t}{\tilde{A}_i} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (5.5.14b)$$

Remarquons que le calcul des coefficients de réflexion et transmission pour la vitesse donne un résultat différent :

$$r_v = \frac{\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2}{\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2} \quad (5.5.15a)$$

$$\tau_v = \frac{2\mathfrak{z}_1}{\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2} \quad (5.5.15b)$$

qui se démontre de manière similaire.

Prenons l'exemple de l'interface entre deux tuyaux, de diamètres respectifs d et αd , contenant le même fluide. À la position du changement de diamètre, on trouve

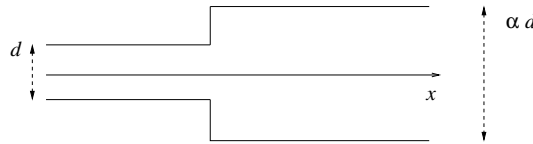


FIG. 5.4 – *Changement de section dans un tuyau sonore.*

les coefficients de réflexion et transmission suivants :

$$r = \frac{\frac{4\rho_0 c}{\pi(\alpha d)^2} - \frac{4\rho_0 c}{\pi d^2}}{\frac{4\rho_0 c}{\pi(\alpha d)^2} + \frac{4\rho_0 c}{\pi d^2}} = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} \quad (5.5.16a)$$

$$\tau = \frac{2 \frac{4\rho_0 c}{\pi(\alpha d)^2}}{\frac{4\rho_0 c}{\pi(\alpha d)^2} + \frac{4\rho_0 c}{\pi d^2}} = \frac{2}{1 + \alpha^2} \quad (5.5.16b)$$

$$(5.5.16c)$$

Le résultat ne dépend que de α qui est le seul paramètre sans dimension du système. Lorsque le diamètre du deuxième tuyau tend vers l'infini, on trouve $r \rightarrow -1$ et $\tau \rightarrow 0$, ce qui correspond aux conditions aux limites pour la surpression aux extrémités d'un tuyau ouvert comme il se doit.

5.5.4 Coefficients de réflexion et transmission en énergie

Il est souvent utile de considérer les coefficients de réflexion et transmission pour la puissance transportée par l'onde acoustique dans le tuyau, donnée par (5.5.6).

Les amplitudes des puissances acoustiques incidente, réfléchiée et transmise sont respectivement notées \mathfrak{P}_i , \mathfrak{P}_r et \mathfrak{P}_t .

En utilisant la relation (5.4.19) entre l'intensité acoustique et l'amplitude de surpression, on obtient les coefficients de réflexion \mathcal{R} et de transmission \mathcal{T} en intensité :

$$\mathcal{R} = \frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}_i} = \frac{A_r^2/\mathfrak{z}_1}{A_i^2/\mathfrak{z}_1} = \frac{A_r^2}{A_i^2} = r^2 = \left(\frac{\mathfrak{z}_2 - \mathfrak{z}_1}{\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2} \right)^2 \quad (5.5.17a)$$

$$\mathcal{T} = \frac{\mathfrak{P}_t}{\mathfrak{P}_i} = \frac{A_t^2/\mathfrak{z}_2}{A_i^2/\mathfrak{z}_1} = \frac{\mathfrak{z}_1 A_t^2}{\mathfrak{z}_2 A_i^2} = \frac{\mathfrak{z}_1}{\mathfrak{z}_2} \tau^2 = \frac{4\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2}{(\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2)^2} \quad (5.5.17b)$$

Ces coefficients de réflexion et de transmission en énergie satisfont naturellement la relation $\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1$.

Interface eau-air

Prenons comme exemple l'interface entre l'air atmosphérique et l'eau. En utilisant les valeurs de la masse volumique et de la célérité des ondes sonores dans l'air (on peut utiliser l'approximation des gaz parfaits pour cela), l'ordre de grandeur de l'impédance acoustique de l'air est

$$Z_{\text{AIR}} \simeq 430 \text{ Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1} \quad (5.5.18)$$

L'impédance acoustique de l'eau est de l'ordre de

$$Z_{\text{EAU}} \simeq 1,5 \cdot 10^6 \text{ Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1} \quad (5.5.19)$$

On trouve donc pour les coefficients de réflexion et transmission (de l'air vers l'eau)

$$\mathcal{R} \simeq 0,999 \quad , \quad \mathcal{T} \simeq 0,001 \quad (5.5.20)$$

Une très faible fraction de l'énergie de l'onde incidente est donc transmise dans l'eau. C'est pour cela que l'on entend si mal ce qui se passe en surface lorsqu'on est dans l'eau.

