

# Chapitre 6

## Ondes lumineuses

Le dernier exemple physique d'ondes étudié dans ce cours est donné par les ondes lumineuses. Ces dernières correspondent à des combinaisons d'ondes électromagnétiques sinusoïdales, lorsque leur longueur d'onde se situe dans le *domaine visible* où l'œil est sensible :

$$400 \text{ nm} < \lambda < 700 \text{ nm}, \quad (6.0.1)$$

ou un peu au-delà (proche infrarouge et proche UV), ce qui permet de les « manipuler » avec des composants optiques. Dans le cadre de ce cours nous considérerons peu les conséquences de la nature vectorielle des ondes électromagnétiques (polarisation) donc nous pourrions réutiliser la plupart des résultats obtenus lors de l'étude des ondes acoustiques. Les calculs étant similaires, seuls les différences physiques entre les deux contextes seront mises en avant.

### 6.1 Description physique des ondes lumineuses

Le champ électromagnétique est décrit par deux grandeurs vectorielles, le champ électrique noté  $\vec{E}(\vec{x}, t)$  et le champ magnétique  $\vec{B}(\vec{x}, t)$ . Leur dynamique est donnée par les *équations de Maxwell*, qui sortent du programme de ce cours. On peut montrer que ces équations impliquent que les champs électriques et magnétiques dans le vide obéissent chacun à l'équation de d'Alembert à trois dimensions :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{x}, t)}{\partial t^2} - \Delta \vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{0} \quad (6.1.1a)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}(\vec{x}, t)}{\partial t^2} - \Delta \vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{0} \quad (6.1.1b)$$

Nous pouvons donc utiliser les techniques développées dans ce cours pour les étudier.

La nature vectorielle des champs électriques et magnétiques rend leur étude délicate. On peut montrer à l'aide des équations de Maxwell dans le vide ( $\text{div} \vec{E} = 0$  et  $\text{div} \vec{B} = 0$ ) que ces ondes sont *transverses*, c.-à.-d. que les vecteurs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont orthogonaux à la direction de propagation, et orthogonaux entre eux.

### 6.1.1 Particularités des ondes électromagnétiques

Il est à noter plusieurs différences fondamentales entre les ondes électromagnétiques et les ondes mécaniques :

- les ondes électromagnétiques n'ont pas besoin de support matériel, elles se propagent en particulier dans le vide ;
- les équations d'onde dans le vide (6.1.1) pour le champ électromagnétique sont *exactes*, contrairement aux ondes mécaniques pour lesquelles nous avons fait l'approximation de petites perturbations du milieu matériel<sup>1</sup> ;
- alors que les ondes mécaniques correspondent à un comportement collectif, au niveau macroscopique, d'un système microscopique complexe (composé d'atomes, de molécules...) les ondes électromagnétiques correspondent à de véritables degrés de liberté « microscopiques » de la physique ;
- la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide est la même dans tout référentiel d'inertie, en cohérence avec l'absence de référentiel privilégié lié à un milieu de propagation.

### 6.1.2 Célérité des ondes électromagnétiques

La célérité des ondes électromagnétiques dans le vide, appelée communément *vitesse de la lumière*, est une constante fondamentale de la Nature. Elle est environ égale à

$$c = 2,99792458 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (6.1.2)$$

Nous observons que l'ordre de grandeur de cette célérité est bien supérieur à ceux correspondant aux ondes mécaniques comme les ondes sur les cordes vibrantes ou les ondes acoustiques.

### 6.1.3 Indice optique d'un milieu

La propagation des ondes électromagnétique dans un milieu matériel est un sujet extrêmement riche et complexe. En effet les champs électriques et magnétiques de l'onde vont interagir avec les noyaux et électrons composant la matière. Pour simplifier les choses nous considérons seulement la propagation dans les milieux dits *diélectriques* (pour lesquels le déplacement macroscopique de charges électriques est impossible).<sup>2</sup> Lorsque l'amplitude des ondes électromagnétiques n'est pas trop élevée, les équations d'ondes (6.1.1) sont toujours satisfaites, mais avec une célérité différente.

La célérité  $\hat{c}$  dans un milieu matériel est liée à la célérité dans le vide  $c$  par :

$$\hat{c} = \frac{c}{n} \quad , \quad n > 1 \quad (6.1.3)$$

<sup>1</sup>Par contre pour des ondes électromagnétiques dans un milieu matériel une telle approximation est nécessaire car des phénomènes non-linéaires peuvent apparaître pour des amplitudes élevées.

<sup>2</sup>Nous supposons que ce milieu est isotrope, de telle sorte que la vitesse de propagation soit indépendante de la direction de propagation et de la polarisation de l'onde.

La quantité  $n$ , qui est un nombre sans dimension, est l'*indice* du milieu considéré. La célérité dans le vide étant la plus grande possible, cette quantité est toujours supérieure à un. Donnons quelques exemples :

- pour l'air dans les conditions normales de température et de pression, l'indice est  $n = 1,0002926$
- pour de l'eau,  $n = 1,3$
- pour du verre ordinaire,  $n \simeq 1,5$
- verres spéciaux au lanthane pour l'optique,  $n \simeq 1,8$

L'indice d'un milieu dépend en principe de la longueur d'onde  $\lambda$  de l'onde électromagnétique sinusoidale qui le traverse. Ce phénomène, appelé *dispersion*, est plus ou moins prononcé selon les matériaux. Il sert à expliquer en particulier le mécanisme de séparation des couleurs par un prisme. Cet effet ne sera pas considéré dans ce cours. Un autre effet négligé est l'absorption des ondes lumineuses car le milieu n'est jamais parfaitement transparent.

## 6.2 Ondes lumineuses planes dans le vide et polarisation

Considérons une onde électromagnétique plane dans le vide. Les champs électriques et magnétiques étant liés entre eux par les équations de Maxwell, il suffit de considérer l'un d'entre eux pour avoir une description complète du système ; nous choisissons ici le champ électrique.

L'équation d'onde (6.1.1) pour le champ électrique admet des solutions d'ondes planes vectorielles. En notation complexe on obtient :

$$\tilde{\vec{E}}(\vec{x}, t) = \tilde{\vec{E}}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad (6.2.1)$$

de telle sorte que la direction de propagation est donnée par le vecteur d'onde  $\vec{k}$ . Une onde lumineuse progressive sinusoidale est appelée *onde monochromatique*.

La relation de dispersion qui lie la pulsation et le vecteur d'onde est sans surprise

$$\frac{\omega^2}{\|\vec{k}\|^2} = c^2 \quad (6.2.2)$$

L'amplitude complexe de l'onde est maintenant un vecteur  $\tilde{\vec{E}}_0$  dont les 3 composantes sont des nombres complexes constants. La condition de transversalité des ondes électromagnétiques évoquée plus haut s'écrit alors comme<sup>3</sup>

$$\vec{k} \cdot \tilde{\vec{E}}(\vec{x}, t) = 0 \implies \vec{k} \cdot \tilde{\vec{E}}_0 = 0 \quad (6.2.3)$$

Pour simplifier nous pouvons considérer une onde se propageant selon  $Ox$ , c.-à.-d. telle que  $\vec{k} = k\vec{e}_x$  avec  $k > 0$ . L'onde est alors caractérisée par un vecteur à deux dimensions

---

<sup>3</sup>En termes du champ magnétique nous avons aussi  $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$ .

dans le plan  $(Oy, Oz)$  :

$$\tilde{\vec{E}}_0 = E_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{p} \end{pmatrix}, \quad \|\vec{p}\| = 1 \quad (6.2.4)$$

Le vecteur complexe bidimensionnel  $\vec{p}$ , de norme un, définit la *polarisation* de l'onde électromagnétique plane.

### 6.2.1 Polarisation rectilignes et circulaires

Considérons des cas particuliers de polarisation, qui constituent une « base » de toutes les polarisations possibles. Nous avons d'abord la catégorie de polarisations dites *rectilignes*, dont l'orientation est constante dans le temps.

- Polarisation rectiligne selon  $y$  :  $\vec{p}_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Polarisation rectiligne selon  $z$  :  $\vec{p}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

En prenant par exemple le premier cas, l'onde est de la forme

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \text{Re} \left[ \tilde{\vec{E}}(\vec{x}, t) \right] = E_0 \vec{e}_y \cos(\omega t - kx) \quad (6.2.5)$$

Un autre type de polarisation, très intéressant, correspond aux polarisations circulaires. Elles correspondent à un champ électrique dont la direction « tourne » au cours du temps. Les deux modes de polarisation circulaires sont les suivants.

- Polarisation circulaire gauche :  $\vec{p}_g = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$
- Polarisation circulaire droite :  $\vec{p}_d = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

En prenant par exemple le premier cas, l'onde est de la forme

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \text{Re} \left[ \tilde{\vec{E}}(\vec{x}, t) \right] = E_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\omega t - kx + \phi) \\ -\sin(\omega t - kx + \phi) \end{pmatrix} \quad (6.2.6)$$

À un instant  $t$  donné, cette configuration décrit un vecteur tournant dans le plan  $(Oy, Oz)$ , dans le sens trigonométrique, lorsque la position  $x$  selon l'axe  $Ox$  varie.

On remarque que la superposition d'une onde de polarisation circulaire gauche et d'une onde de polarisation circulaire droites, de même amplitude et de même phase, donne une polarisation rectiligne selon  $y$ .

### 6.2.2 Polarisation en optique

La propriété qu'ont les ondes lumineuses monochromatiques (c.-à.-d. sinusoïdales) de posséder une polarisation est apparente dans de nombreux phénomènes optiques. Notons tout d'abord que la majorité des sources lumineuses produisent des ondes lumineuses *non polarisées*, qui sont la superposition aléatoire de différentes ondes

sinusoïdales avec des polarisations distinctes. Lorsqu'une polarisation particulière est plus probable que les autres, la lumière est partiellement polarisée.

Donnons quelques exemples de phénomènes liés à la polarisation des ondes lumineuses :

- Certains matériaux, qui possèdent une propriété de *biréfringence*, sont tels que la vitesse de la lumière pour les ondes lumineuses se propageant dans le matériau (ou de manière analogue, l'indice) dépend de la polarisation de l'onde ;
- Un *filtre polariseur* absorbe sélectivement les ondes lumineuses de manière à ne laisser passer que la polarisation rectiligne parallèle à l'axe du filtre ;
- certains matériaux, composés chimiquement de composés *chiraux*, possèdent un *pouvoir rotatoire*. Une onde lumineuse entrant dans ce matériau avec une polarisation rectiligne donnée ressort avec une polarisation rectiligne faisant un angle avec la polarisation d'entrée<sup>4</sup> ;
- les écrans à cristaux liquides sont fondés sur la propriété des cristaux liquides d'influencer la polarisation des ondes lumineuses différemment suivant qu'une tension leur est appliquée ou non.

### 6.2.3 Optique scalaire

Il existe cependant un grand nombre de situations pour lesquelles la polarisation ne joue pas directement de rôle important, et constitue donc une complication inutile. On peut dans ce cas modéliser les ondes lumineuses par une quantité scalaire  $\Psi(\vec{x}, t)$  que nous appellerons *vibration lumineuse*. Cette quantité obéit naturellement à l'équation d'onde à trois dimensions :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t^2} - \Delta \Psi(\vec{x}, t) = 0 \quad (6.2.7)$$

Nous nous retrouvons alors dans une situation analogue à celle des ondes acoustiques.

Considérant l'énergie contenue dans cette onde lumineuse scalaire, nous pouvons introduire l'*intensité* qui lui est associée. Cette quantité, qui comme pour les ondes acoustiques est une puissance par unité de surface, ou en d'autres termes un flux d'énergie, est de la forme

$$I = \alpha \langle \Psi(\vec{x}, t)^2 \rangle_t, \quad (6.2.8)$$

donc proportionnelle à la valeur moyenne dans le temps de  $\Psi(\vec{x}, t)^2$ . Nous avons introduit une constante de normalisation  $\alpha$  dans la définition. Ce paramètre n'a pas réellement d'importance car seules les variations d'intensité nous intéressent.

---

<sup>4</sup>On peut comprendre ce phénomène en décomposant la polarisation rectiligne en polarisations circulaires, comme indiqué plus haut, et en considérant la propagation de ces deux polarisations avec des célérités différentes.

**Optique géométrique** Nous pouvons encore d'avantage simplifier la description d'une onde lumineuse. Considérons une onde de pulsation  $\omega$  donnée. L'approximation de l'*optique géométrique* est valable lorsque les caractéristiques du milieu de propagation varient uniquement sur des distances beaucoup plus grandes que  $c/\omega$ . Une onde scalaire générique se propageant, de pulsation déterminée, peut être décomposée comme (en notation complexe)

$$\tilde{\Psi}(\vec{x}, t) = a(\vec{x})e^{i\omega(t-S(\vec{x})/c)} \quad (6.2.9)$$

où la quantité  $a(\vec{x})$ , réelle et positive, est la généralisation de l'amplitude.

Écrivons maintenant l'équation d'onde (6.2.7) pour une onde de cette forme, dans le vide. Pour simplifier les choses on considère pour des ondes ne dépendant que de  $x$ . Sans faire d'approximations, on obtient, après avoir simplifié par  $e^{i\omega(t-S(\vec{x})/c)}$  :

$$\left(\frac{dS}{dx}\right)^2 - 1 = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{a} \frac{d^2a}{dx^2} - \frac{i\lambda}{2\pi} \left[\frac{d^2a}{dx^2} - \frac{2}{a} \frac{da}{dx} \frac{dS}{dx}\right] \quad (6.2.10)$$

avec  $\lambda = 2\pi c/\omega$ . On fait maintenant l'approximation que, sur des échelles de l'ordre de  $\lambda$ , les caractéristiques de l'onde (et du milieu de propagation) varient peu. On obtient alors l'équation  $(S'(x))^2 = 1$ . Elle se généralise facilement à trois dimensions en

$$\left(\frac{\partial S(\vec{x})}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S(\vec{x})}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S(\vec{x})}{\partial z}\right)^2 = 1 \quad (6.2.11)$$

Cette équation, appelée *équation eikonale*, est l'équation fondamentale de l'optique géométrique. C'est elle qui permet d'étudier la propagation des rayons lumineux. La direction de propagation d'un rayon lumineux est donnée *localement* par le vecteur  $\vec{\text{grad}}(S) = (\partial_x S, \partial_y S, \partial_z S)$ . Les surfaces d'ondes  $\mathcal{S}$  correspondent à

$$S(\vec{x}) = \text{constante} \quad , \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{S} \quad (6.2.12)$$

Notons que dans le cas d'une onde plane,  $S(\vec{x}) = \vec{k} \cdot \vec{x}$  et on retrouve la relation de dispersion (6.2.2). Dans le vide, on obtient une propagation en ligne droite.

La généralisation de cette équation à un milieu quelconque (qui peut être non homogène) permet d'étudier des effets comme la réfraction. Il suffit alors, dans l'approximation où les propriétés du milieu de propagation varient peu sur des échelles de l'ordre de  $cT$ , de remplacer la célérité des ondes lumineuses dans le vide par celle dans le milieu considéré, au point  $\vec{x}$ . En termes de l'indice optique  $n$  introduit plus haut on a

$$\left(\frac{\partial S(\vec{x})}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S(\vec{x})}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S(\vec{x})}{\partial z}\right)^2 = n^2(\vec{x}) \quad (6.2.13)$$

Il s'agit de l'équation fondamentale de l'optique géométrique.

### 6.3 Sources d'ondes lumineuses

Il est à noter un aspect pratique très important des ondes lumineuses. Contrairement aux ondes acoustiques, il n'est pas possible d'émettre une onde électromagnétique sinusoïdale à la fréquence désirée en « commandant » une source avec un générateur électrique réglé sur cette fréquence. Ainsi une source lumineuse émet une radiation dont les propriétés sont liées à la nature physique du phénomène d'émission mais qui ne peuvent être imposées de l'extérieur par un signal électrique.

Nous devons tenir compte de deux propriétés importantes des sources physiques de lumière, qui apparaissent même lorsqu'elles sont monochromatiques à une bonne approximation :

1. les sources n'émettent pas des ondes sinusoïdales de durée infinie, mais uniquement par « bouffées » (appelées paquets d'ondes) pendant des intervalles de temps finis. Chacun de ces paquets d'ondes possède une phase constante  $\Phi_0$  aléatoire, qui n'est pas corrélé à celui des autres paquets. Ainsi, si on note  $\delta t$  la durée caractéristique d'un paquets d'onde, la mesure (hypothétique) de la phase de l'onde en un point donné, aux instants  $t$  et  $t + \alpha$ , donnera des résultats corrélés pour  $\alpha \ll \delta t$  et décorrélés pour  $\alpha \gg \delta t$ .

On peut montrer (à l'aide d'une transformation de Fourier), qu'une onde sinusoïdale de fréquence  $\nu$ , émise pendant un intervalle de temps  $\delta t$ , est en fait composé de plusieurs fréquences dans un intervalle  $[\nu - \frac{\delta\nu}{2}, \nu + \frac{\delta\nu}{2}]$  avec  $\delta\nu \sim 1/\delta t$ . Ainsi le *spectre* d'une source monochromatique est en réalité composé d'un ensemble de fréquences dans un intervalle donné. Plus cet intervalle est petit, plus la source est monochromatique.<sup>5</sup>

2. les différents points de l'espace composant la source peuvent être considérés comme autant de générateurs d'ondes lumineuses indépendants, tels que le déphasage entre deux quelconques de ces points est aléatoire. Ainsi lorsque nous considérons l'onde lumineuse émise par une source physique, il faudra la modéliser comme un *ensemble* de sources. En chaque point  $\vec{x}_s$  appartenant à la surface de la source, nous avons une source ponctuelle dont la phase constante  $\Phi(\vec{x}_s)$  de l'onde qu'il émet est spécifique.

Naturellement ces deux effets sont présents simultanément dans toute expérience. Ces propriétés sont déterminantes dans l'étude du phénomène d'interférences qui sera l'objet du prochain chapitre.

Notons qu'un *laser* est une source pour laquelle ces deux effets sont extrêmement limités, et qui est donc en bonne approximation une source d'ondes planes monochromatiques, cependant avec une extension spatiale limitée par la taille du faisceau.

Une autre propriété importante des ondes lumineuses est qu'il n'est pas possible de détecter directement la vibration lumineuse  $\Psi(\vec{x}, t)$ , plus particulièrement sa phase, car les fréquences des ondes lumineuses (de l'ordre de 500 THz) sont trop élevées pour tout dispositif électronique. On peut donc seulement détecter l'intensité associée,

---

<sup>5</sup>Pour une raie émise par une lampe spectrale, nous avons typiquement  $\delta\nu/\nu \sim 10^{-4}$ . Les sources les plus monochromatiques connues sont les lasers, pour lesquelles  $\delta\nu/\nu \sim 10^{-13}$  dans le meilleur des cas.

donnée par l'équation (6.2.8). Nous n'avons donc pas accès à la phase de l'onde mais, sous certaines conditions, nous pouvons mesurer la différence de phase, ou *déphasage*, entre deux ondes. Ce sera l'objet du chapitre suivant.

## 6.4 Principe de Huygens-Fresnel

Pour étudier la propagation des ondes lumineuses nous avons besoin d'un principe très important, appelé principe de Huygens-Fresnel.

Considérons une source ponctuelle d'ondes lumineuses. Cette source va émettre des ondes sphériques, que l'on peut décomposer en ondes sinusoïdales sortantes. Les surfaces d'ondes sont des sphères centrées sur la source. Choisissons une de ces surfaces d'ondes, placée à une distance arbitraire  $R_1$ .

Nous considérons maintenant une autre surface d'onde placée à une distance plus grande,  $R_2 > R_1$ . La propagation des ondes de la surface d'onde en  $R_1$  vers la surface

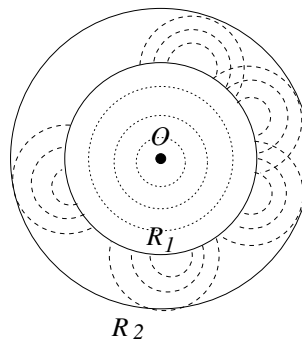


FIG. 6.1 – Illustration du principe de Huygens-Fresnel.

d'onde en  $R_2$  peut se comprendre de la manière illustrée sur la figure 6.1.

Tout point de la sphère de rayon  $R_1$ , ayant reçu l'onde émise par la source, peut être considéré à son tour comme une *source secondaire* ponctuelle d'ondes sphériques. La sphère de rayon  $R_1$  étant une surface d'onde, toutes les sources secondaires sont *en phase* les unes avec les autres. Les amplitudes des ondes sphériques émises sont naturellement aussi égales.

Dans cette description de l'onde un observateur situé sur la sphère de rayon  $R_2$  recevra une onde correspondant à la superposition de toutes ces sources secondaires. Ces sources étant en phase et de même fréquence, il existera alors un phénomène d'*interférences*. On peut montrer que les interférences entre les sources secondaires placées tout autour de la sphère de rayon  $R_1$  reconstituent précisément l'onde sphérique émise par la source primaire située à l'origine. Ce point de vue (qui est valable aussi pour les ondes acoustiques) est particulièrement utile pour comprendre les phénomènes d'interférences et de diffraction.

Notons pour finir que ce principe est aussi valable pour une onde plane. Dans ce cas tous les points situés dans un plan d'onde sont des sources secondaires d'ondes sphériques.



# Chapitre 7

## Interférences et diffraction

Dans le chapitre 3 nous avons étudié la superposition de deux ondes progressives unidimensionnelles de même pulsation. Nous avons vu que le déphasage entre deux ondes progressives, se propageant dans la même direction, est constant ; il en résulte une onde sinusoïdale progressive d'amplitude constante. Cela est dû au fait que le déphasage induit par la propagation depuis les deux sources produisant ces ondes est indépendant de la position  $x$  où l'onde est observée.

Pour les ondes tridimensionnelles comme les ondes sonores, la superposition d'ondes produit des phénomènes nettement plus intéressants, car le déphasage va maintenant dépendre du point de l'espace où l'onde est observée. Ainsi, en utilisant les résultats de la partie 3.1, nous voyons que son amplitude va varier entre les différents points de l'espace.

Ce phénomène, appelé génériquement *interférences*, se produit lorsque des ondes sinusoïdales de même pulsation se superposent, du moment que leur déphasage est constant au cours du temps. En acoustique on considèrera deux (ou plus) générateurs d'ondes sonores (haut-parleurs ou transducteurs) alimentés par un même générateur de courant alternatif, à une pulsation  $\omega$ . Cela garantit que la condition ci-dessus est satisfaite. Nous y reviendrons plus en détail dans le cadre des ondes lumineuses, car elle est beaucoup plus délicate à satisfaire.

### 7.1 Interférences acoustiques à deux ondes

Pour bien identifier le phénomène d'interférences, on considère l'expérience suivante. On place deux sources d'ondes acoustiques (haut-parleurs ou transducteurs) à une distance  $d$  l'une de l'autre, alimentées par un même générateur sinusoïdal de pulsation  $\omega$ .

À l'intérieur de leur cône d'émission, on pourra assimiler ces sources à des sources ponctuelles, émettant des ondes sphériques *sortantes* sinusoïdales. On désigne par le vecteur  $\vec{r}_a = \overrightarrow{S_a M}$  le vecteur liant la source numéro  $a$ , située au point  $S_a$  de coordonnées  $\vec{x}_a$ , avec l'observateur, situé au point  $M$  de coordonnées  $\vec{x}$ . Il s'écrit naturellement

$$\vec{r}_a = \vec{x} - \vec{x}_a \quad (7.1.1)$$

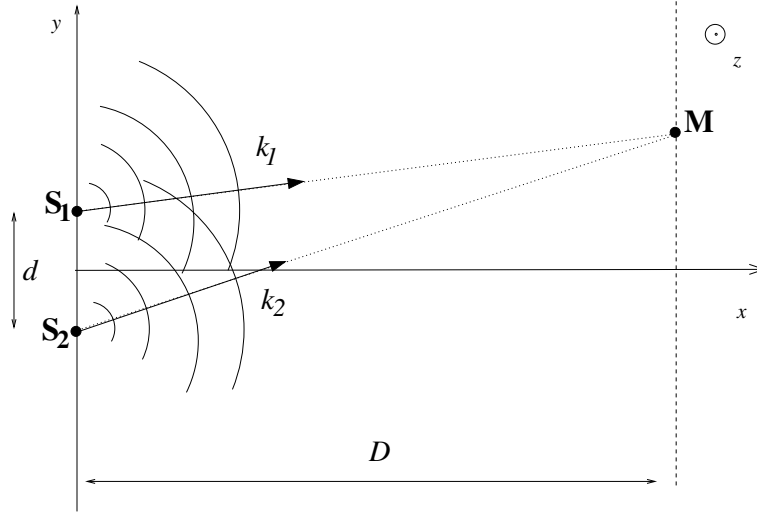


FIG. 7.1 – Expérience d'interférences à deux ondes.

Le vecteur d'onde correspondant à chacune de ces ondes est radial, dans les coordonnées sphériques ayant pour origine la source considérée. Il peut s'écrire

$$\vec{k}_a = \kappa \frac{\vec{r}_a}{\|\vec{r}_a\|} \quad (7.1.2)$$

avec  $\kappa = \omega/c$ . L'équation (4.119), donnant la forme d'une onde sinusoïdale en coordonnées sphériques, permet alors d'écrire la suppression correspondant à l'onde de pulsation  $\omega$  émise en  $A$  et reçue au point  $M$ , en notation complexe, comme :

$$\tilde{p}_a(M, t) = \frac{\mathcal{A}_a}{\|\vec{r}_a\|} e^{i(\omega t - \vec{k}_a \cdot \vec{r}_a + \phi_a)} \quad (7.1.3)$$

On observe l'onde résultante de la superposition des deux ondes émises par les sources dans un plan parallèle à l'axe liant les sources, à une grande distance  $D \gg d$ , voir fig. 7.1. Ce plan est choisi comme plan  $(y, z)$  dans les coordonnées cartésiennes. On note  $\vec{x}$  la position du point d'observation. En choisissant l'origine des coordonnées dans ce plan entre les deux sources, les coordonnées des sources et du récepteur sont :

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ d/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -d/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} D \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (7.1.4)$$

On souhaite trouver le signal obtenu par la superposition des ondes lorsqu'on se déplace d'une distance  $y$  parallèlement à l'axe des sources. Les distances entre le point  $\vec{x}$  et les sources sont données par :

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} D \\ y - d/2 \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} D \\ y + d/2 \\ z \end{pmatrix}, \quad (7.1.5)$$

Calculons de manière générique le déphasage entre les deux ondes au point d'observation. Il est donné par

$$\Delta\Phi_{12} = \Phi_2 - \Phi_1 = \frac{\omega}{c} (|\vec{r}_1| - |\vec{r}_2|) + \phi_2 - \phi_1 \quad (7.1.6)$$

Ce déphasage est constant sur des surfaces où  $|\vec{r}_1| - |\vec{r}_2| = \text{constante}$ . De telles surfaces sont des *hyperboloïdes de révolution*, de foyers  $S_1$  et  $S_2$ , voir la figure 7.2. Il

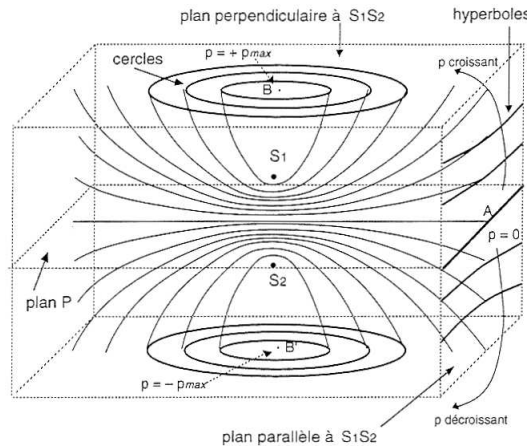


FIG. 7.2 – Franges d'interférences pour deux ondes sphériques.

existe deux catégories de surfaces remarquables :

- les hyperboloïdes pour lesquels  $\Delta\Phi_{12} \equiv 0 \pmod{2\pi}$  sont des *franges brillantes*. Les amplitudes des deux ondes s'additionnent, les ondes étant en phase ;
- les hyperboloïdes pour lesquels  $\Delta\Phi_{12} \equiv \pi \pmod{2\pi}$  sont des *franges sombres*. Les amplitudes des deux ondes se retranchent, les ondes étant en opposition de phase.

On notera que ces surfaces ne sont pas a priori des surfaces d'onde de l'une ou l'autre onde (il faudrait alors que  $\Phi_1 = \text{constante}$  ou  $\Phi_2 = \text{constante}$ , séparément).

### Franges d'interférence à grande distance

Pour simplifier l'étude des franges d'interférences, on se place sur l'écran situé à grande distance  $D$  des sources. Les franges deviennent alors en première approximation rectilignes, comme nous allons le voir.

Dans l'approximation où  $y \ll D$  et  $z \ll D$  (soit près du centre de l'écran), l'amplitude de chacune des ondes va peu varier lors du déplacement dans le plan. Comme nous l'avons vu précédemment, pour des longueurs d'ondes faibles petites la distance  $D$  les variations de phase seront beaucoup plus significatives que celles de l'amplitude. On fait donc l'approximation

$$\frac{\mathcal{A}_a}{|\vec{r}_a|} \simeq \frac{\mathcal{A}_a}{D}, \quad a = 1, 2 \quad (7.1.7)$$

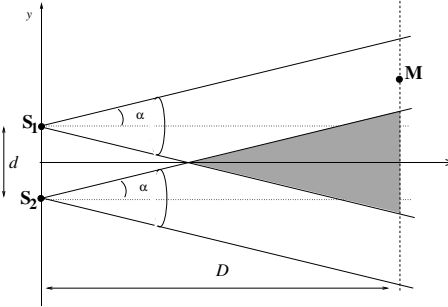
On obtient ainsi une onde résultante donnée, en notation complexe, par

$$\tilde{p}(M, t) = \tilde{p}_1(M, t) + \tilde{p}_2(M, t) \simeq \frac{\mathcal{A}_1}{D} e^{i\omega(t - \|\vec{r}_1\|/c) + i\phi_1} + \frac{\mathcal{A}_2}{D} e^{i\omega(t - \|\vec{r}_2\|/c) + i\phi_2} \quad (7.1.8)$$

Dans la réalité les sources d'ondes sonores n'émettent pas dans toutes les directions. Si nous supposons que chaque source émet dans un cône de demi-angle au sommet  $\alpha$ , dont l'axe est confondu avec  $Ox$  cette expression est valable lorsque le point  $M$  reçoit une onde de chacune des sources, soit pour

$$y \in \left] \frac{d}{2} - D \tan \alpha; \frac{d}{2} + D \tan \alpha \right[ \cap \left] -\frac{d}{2} - D \tan \alpha; -\frac{d}{2} + D \tan \alpha \right[ \quad (7.1.9)$$

En pratique, comme  $d \ll D$ , il suffit de se placer dans la zone  $|y| < D \tan \alpha$ .



Dans la limite  $d, y, z \ll D$ , nous pouvons faire les développements limités au premier ordre :

$$\begin{aligned} \|\vec{r}_1\| &= \sqrt{D^2 + (y - d/2)^2 + z^2} \simeq D + \frac{(y - d/2)^2 + z^2}{2D} \\ \|\vec{r}_2\| &= \sqrt{D^2 + (y + d/2)^2 + z^2} \simeq D + \frac{(y + d/2)^2 + z^2}{2D} \end{aligned} \quad (7.1.10)$$

Dans cette approximation les phases des deux ondes au point  $\vec{x}$  sont

$$\begin{cases} \Phi_1(y, t) = \omega t - \kappa \left( D + \frac{(y - d/2)^2 + z^2}{2D} \right) + \phi_1 \\ \Phi_2(y, t) = \omega t - \kappa \left( D + \frac{(y + d/2)^2 + z^2}{2D} \right) + \phi_2 \end{cases} \quad (7.1.11)$$

Nous en déduisons que le déphasage  $\Delta\Phi_{12}$  entre les signaux sinusoïdaux est donné par :

$$\Delta\Phi_{12}(y) = \Phi_2(y, t) - \Phi_1(y, t) \implies \boxed{\Delta\Phi_{12}(y) = -\frac{\kappa y d}{D} + \Delta\phi_{12}} \quad (7.1.12)$$

où  $\Delta\phi_{12} = \phi_2 - \phi_1$  est une constante. À cet ordre, le résultat est indépendant de  $z$  donc la figure obtenue sera inchangée par translation selon l'axe  $Oz$ .

Finalement, les deux ondes étant de même pulsation on peut trouver l'amplitude de l'onde résultante comme pour l'équation (2.35). Notant cette amplitude comme

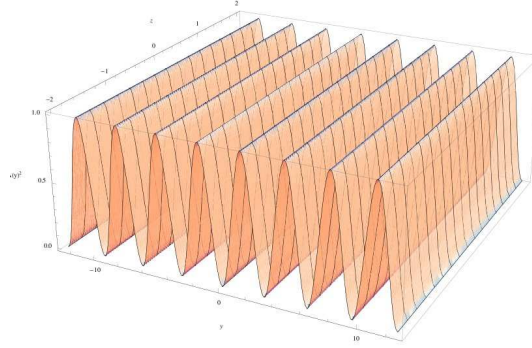


FIG. 7.3 – Franges rectilignes d'interférences pour deux ondes.

$\mathcal{P}(y)$ , nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(y)^2 &= \left| \frac{\mathcal{A}_1}{D} e^{i\Phi_1(y)} + \frac{\mathcal{A}_2}{D} e^{i\Phi_2(y)} \right|^2 \\ &= \frac{1}{D^2} (\mathcal{A}_1 e^{i\Phi_1(y)} + \mathcal{A}_2 e^{i\Phi_2(y)}) (\mathcal{A}_1 e^{-i\Phi_1(y)} + \mathcal{A}_2 e^{-i\Phi_2(y)}) \end{aligned} \quad (7.1.13)$$

ce qui donne

$$\mathcal{P}(y) = \frac{1}{D} \sqrt{\mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 + 2\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 \cos[\Delta\Phi_{12}(y)]} \quad (7.1.14)$$

Soit

$$\boxed{\mathcal{P}(y) = \frac{1}{D} \sqrt{\mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 + 2\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 \cos\left(\frac{\kappa y d}{D} - \Delta\phi_{12}\right)}} \quad (7.1.15)$$

### Minima et maxima d'amplitude

Considérons maintenant pour simplifier les choses que le déphasage constant entre les deux sources est nul, soit que  $\Delta\phi_{12} = 0$ .

L'amplitude (7.1.15) de l'onde acoustique résultante de la superposition est maximale lorsque le cosinus vaut +1, soit pour

$$\cos \Delta\Phi_{12}(y_{\max}) = 1 \implies \boxed{y_{\max} = \frac{\lambda D}{d} \ell, \quad \ell \in \mathbb{Z}} \quad (7.1.16)$$

L'amplitude maximale est alors

$$\mathcal{P}_{\max} = \frac{1}{D} \sqrt{\mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 + 2\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2} = \frac{1}{D} (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) \quad (7.1.17)$$

L'amplitude est minimale lorsque le cosinus vaut -1, soit pour

$$\cos \Delta\Phi_{12}(y_{\max}) = -1 \implies y_{\max} = \frac{\lambda D}{d} (\ell + 1/2), \quad \ell \in \mathbb{Z} \quad (7.1.18)$$

L'amplitude maximale est alors

$$\mathcal{P}_{\min} = \frac{1}{D} \sqrt{\mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 - 2\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2} = \frac{1}{D} |\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2| \quad (7.1.19)$$

Nous obtenons alors alternativement des franges « brillantes » et « sombres »<sup>1</sup> rectilignes, étendues selon l'axe des  $z$ , en se déplaçant le long de l'axe  $y$ , voir fig. 7.3. Les franges sont centrées autour de  $y = 0$  lorsque les sources sont en phase, soit pour  $\phi_1 = \phi_2$ . Dans ce cas nous avons une frange brillante pour  $y = 0$  ce qui est naturel car nous sommes alors à égale distance des deux sources.

### 7.1.1 Interfrange

L'écart entre deux franges brillantes successives selon  $Oy$  est appelé *interfrange*  $\iota$ . D'après l'équation (7.1.18) son expression est donnée par :

$$\boxed{\iota = \frac{\lambda D}{d}} \quad (7.1.20)$$

On s'aperçoit par exemple que, toutes choses étant égales par ailleurs, plus les sources sont proches l'une de l'autre, plus l'interfrange est grand.

Alternativement, à une distance  $D$  donnée, plus la longueur d'onde est grande plus les franges sont écartées les unes des autres.

### 7.1.2 Contraste

Les franges sont d'autant mieux contrastées que la différence d'amplitude entre les franges brillantes et les franges sombres est grande. Il est plus naturel de raisonner avec les contrastes d'intensité qu'avec les contrastes d'amplitude, spécialement dans le contexte des ondes lumineuses. De manière générale l'intensité d'une onde sinusoïdale est proportionnelle au carré de son amplitude. On définit alors le contraste  $\mathbf{c}$  des franges comme le rapport

$$\mathbf{c} = \frac{\mathcal{P}_{\max}^2 - \mathcal{P}_{\min}^2}{\mathcal{P}_{\max}^2 + \mathcal{P}_{\min}^2} \quad (7.1.21)$$

qui est un nombre sans dimension entre zéro et un. En utilisant les formules ci-dessus, on obtient

$$\mathbf{c} = \frac{2\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2} \quad (7.1.22)$$

Regardons deux cas particuliers. Lorsque les amplitudes sont égales, on trouve  $\mathbf{c} = 1$ . Le contraste est alors maximal (comme l'amplitude des franges sombre est nulle). Si l'amplitude d'une des deux ondes tend vers zéro, on obtient  $\mathbf{c} \rightarrow 0$ . Dans cette limite il n'y a en effet plus de phénomène d'interférences puisqu'il ne reste qu'une onde.

<sup>1</sup>Nous employons ici une terminologie adaptée aux interférences d'ondes lumineuses.

Remarquons pour finir que lorsque les amplitudes des deux ondes sont égales la formule (7.1.15) donnant l'amplitude de l'onde résultante se simplifie :

$$\mathcal{P}(y) = \frac{\mathcal{A}}{D} \sqrt{2(1 + \cos \Delta\Phi_{12}(y))} = \frac{2\mathcal{A}}{D} \left| \cos \frac{\Delta\Phi_{12}(y)}{2} \right| \quad (7.1.23)$$

et on observe bien que l'amplitude s'annule pour les franges « sombres » .

## 7.2 Interférences d'ondes lumineuses à distance finie : trous de Young

Le phénomène d'interférences à deux ondes, étudié pour les ondes acoustiques dans la partie précédente, s'observe aussi pour les ondes lumineuses. Les calculs étant les mêmes que pour les ondes acoustiques, nous soulignerons essentiellement les différences liées à la réalisation de l'expérience. Historiquement, cette expérience, réalisée par Thomas Young en 1801, est une des premières preuves irréfutables de la nature ondulatoire de la lumière.

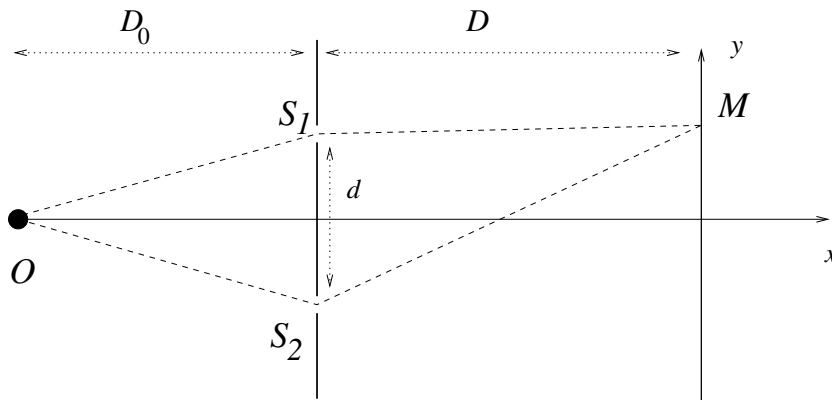


FIG. 7.4 – Expérience des trous de Young.

En raison de l'impossibilité d'obtenir deux sources d'ondes sinusoïdales avec un déphasage constant dans le temps, il est nécessaire d'obtenir les deux sources requises pour l'expérience d'interférences à deux ondes comme deux *sources secondaires* provenant de la même source primaire, en tirant parti du principe de Huygens-Fresnel. On considère alors une source primaire d'ondes sphériques sinusoïdales au point  $O$ , éclairant un écran situé à une distance  $D_0$ , voir figure 7.4. Cet écran est percé de trous très petits, alignés selon l'axe  $Oz$ , situés à une distance  $d$  l'un de l'autre, aux points  $S_1$  et  $S_2$ .

En première approximation, les trous sont de diamètre infiniment petit ; les sources secondaires au niveau de ces deux ouvertures peuvent alors être considérées comme deux sources d'ondes sphériques sinusoïdales de même fréquence, dont le déphasage de l'une par rapport à l'autre est constant dans le temps. Si la source est placée à égale distance des deux trous, comme sur la figure, les deux sources secondaires sont *en phase*.

### 7.2.1 Notion de chemin optique

On considère pour le moment une source parfaitement ponctuelle d'ondes sphériques sinusoïdales située en  $O$ . Au niveau de l'ouverture située au point  $S_1$  on obtient la vibration lumineuse (en notation complexe) :

$$\tilde{\Psi}(S_1, t) = \frac{\tilde{A}}{\|\overrightarrow{OS_1}\|} e^{i(\omega t - \kappa \|\overrightarrow{OS_1}\|)} \quad (7.2.1)$$

Par rapport à la source, l'onde acquiert donc un déphasage supplémentaire

$$\begin{aligned} \Delta\Phi(S_1, t) &= \kappa \|\overrightarrow{OS_1}\| = \frac{\omega}{c} \|\overrightarrow{OS_1}\| \\ &= \frac{\omega}{c} n \|\overrightarrow{OS_1}\|, \end{aligned} \quad (7.2.2)$$

où  $n$  est l'indice optique du milieu, par exemple l'air, dans lequel se produit la propagation.

On est ainsi amené à définir le *chemin optique* entre deux points  $A$  et  $B$  par

$$C_{AB} = (AB) = n \|\overrightarrow{AB}\|. \quad (7.2.3)$$

Il permet d'exprimer de manière simple le changement de phase d'une onde entre deux points situés sur des surfaces d'ondes différentes, en tenant compte de l'indice du milieu traversé. On peut représenter le trajet de l'onde entre ces deux points sous la forme d'un *rayon lumineux*. Si l'indice  $n$  du milieu est constant, ce trajet est simplement le segment joignant les deux points (la lumière se propage alors en ligne droite). Si plusieurs milieux sont traversés, il faut « découper » le trajets en segments comme :

$$C = n_1 \|\overrightarrow{A_1 A_2}\| + n_2 \|\overrightarrow{A_2 A_3}\| + \dots + n_N \|\overrightarrow{A_N A_{N+1}}\| \quad (7.2.4)$$

Notons que, localement, la direction du chemin suivi par le rayon lumineux est donnée par son vecteur d'onde  $\vec{k}$ .

### 7.2.2 Franges d'interférences

Pour obtenir les franges d'interférence on mesure l'intensité lumineuse obtenue par la superposition des ondes passant par  $S_1$  et  $S_2$  sur un deuxième écran situé à une distance  $D$  du premier. Au point  $M$  les chemins optiques des rayons lumineux passant par les ouvertures  $S_1$  et  $S_2$  sont :

$$C_1 = (OS_1) + (S_1 M) \quad (7.2.5a)$$

$$C_2 = (OS_2) + (S_2 M), \quad (7.2.5b)$$

en les décomposant en deux parties distinctes : de la source à l'une des ouvertures du premier écran puis du premier au deuxième écran. Si la source est placée exactement



sur l'axe  $Ox$ , nous avons  $(OS_1) = (OS_2)$ . Le déphasage entre les ondes passant par  $S_1$  et  $S_2$  est alors donné simplement par

$$\Delta\Phi_{12} = -\frac{\omega}{c} [(S_2M) - (S_1M)] = -\frac{\omega}{c} \Delta C \quad (7.2.6)$$

proportionnel à la *différence de marche*

$$\Delta C = (S_2M) - (S_1M) \quad (7.2.7)$$

entre les deux rayons.

Dans l'approximation où l'écran se situe à une distance très grande par rapport à la distance entre les trous, soit  $D \gg d$ , nous pouvons faire les mêmes approximations que nous avons faites pour les interférences d'ondes acoustiques, voir eq. (7.1.12) :

$$\Delta\Phi_{12}(y) \simeq -\frac{n\omega}{c} \frac{yd}{D} \quad (7.2.8)$$

en fonction de l'ordonnée  $y$  sur l'écran d'observation. On observe, qu'à cet ordre, le déphasage ne dépend pas de  $z$ .

On obtient alors l'amplitude de l'onde résultante avec l'équation (7.1.15) établie pour les ondes acoustiques. L'intensité lumineuse observée, proportionnelle à  $\langle \Psi^2 \rangle$  est donc donnée par

$$I(y) = I_0 (1 + \cos \Delta\Phi_{12}(y)) = 2I_0 \cos^2 \left( \frac{\Delta\Phi_{12}(y)}{2} \right) \quad (7.2.9)$$

donnant des franges alternativement sombres et lumineuses ; nous avons absorbé l'amplitude de  $\Psi$  ainsi que le paramètre  $\alpha$  dans la constante  $I_0$ . Comme pour les ondes acoustiques, l'*interfrange*, ou distance entre deux franges brillantes successives, est donné par

$$\boxed{\iota = \frac{c}{\nu} \frac{D}{nd} = \frac{\lambda D}{d}} \quad (7.2.10)$$

Une source d'ondes lumineuses est réellement caractérisée par sa fréquence  $\nu$  (la longueur d'onde  $\lambda$  n'est pas réellement un paramètre intrinsèque de l'onde car elle dépend du milieu traversé). On observe donc que si on réalise la même expérience de trous de Young dans des milieux d'indices optiques  $n$  différents, on mesurera des valeurs différentes de l'interfrange.

### Déphasage dû à la position de la source

Si la source lumineuse est déplacée d'une distance  $\epsilon \ll D_0, D$  parallèlement à l'écran, nous observons les mêmes franges d'interférences, mais décalées. En effet on a alors

$$(OS_2) - (OS_1) \simeq \frac{n\epsilon d}{D_0} \quad (7.2.11)$$

ce qui implique que

$$\Delta\Phi_{12}(y) \simeq -\frac{n\omega d}{c} \left( \frac{y}{D} + \frac{\epsilon}{D_0} \right) \quad (7.2.12)$$

Lorsque  $\epsilon > 0$  (c.-à.-d. que la source se déplace vers les  $y$  croissants), la frange brillante centrale, auparavant en  $y = 0$ , se décale vers les  $y$  négatifs. Il est facile de se convaincre que ce résultat est logique; il faut s'assurer en effet que les deux chemins optiques soient égaux au niveau de la frange centrale.

### 7.3 Interférences à grande distance : fentes de Young

Nous allons reprendre l'expérience des interférences lumineuses à deux ondes, dans des conditions un peu différentes. Premièrement, on considère que la source est placée à très grande distance, en amont de l'écran; on peut donc l'assimiler à une onde plane.

On considère un écran percé de deux fentes, prises parallèles à l'axe  $Oz$ . La physique est donc invariante par translation selon  $z$ . On appelle  $\theta_i$  l'angle entre le vecteur d'onde  $\vec{k}_i$  de l'onde incidente et l'axe  $Ox$  (ou de manière équivalente entre les plans d'onde et l'axe  $Oy$ ). Pour chaque valeur de  $z$  on peut considérer un point sur la

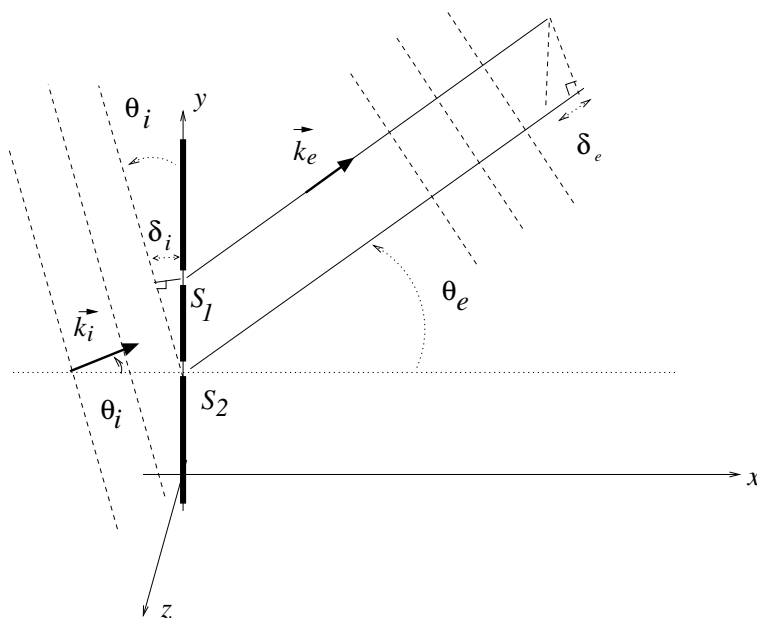


FIG. 7.5 – Expérience des fentes de Young.

fente, prise infiniment fine, comme une source secondaire d'ondes sphériques. Le problème étant invariant par translation selon  $z$ , les sources résultantes sont « étalées » le long de l'axe  $Oz$ .

Il existe un déphasage entre les sources secondaires correspondant aux fentes  $S_1$  et  $S_2$ , lié à la différence de parcours entre les ondes provenant de la source, notée  $\delta_i$  sur la figure. Il en résultera une différence de marche  $\Delta C = n\delta_i$ . En effet une surface d'onde donnée « arrive » en  $S_2$  avant d'arriver en  $S_1$ , lorsque  $\theta_i$  est positif. D'après la géométrie de la figure le déphasage entre les sources secondaires est

$$\Delta\Phi_{12}^i = \frac{n\omega}{c}\delta_i = \frac{n\omega}{c}d\sin\theta_i \quad (7.3.1)$$

L'observateur est aussi situé à une très grande distance, à l'infini en aval de l'écran ; les ondes sphériques provenant de chacune des deux fentes sont alors assimilables à des ondes planes ; dans cette approximation les rayons lumineux issus des deux fentes proviennent de la même direction, et partagent donc un même vecteur d'onde noté  $\vec{k}_e$  (pour onde émergente). On note  $\theta_e$  l'angle entre ce vecteur d'onde et l'axe  $Ox$ , voir la figure 7.5.

Il existe une différence de marche entre ces deux ondes, liée à la différence de parcours entre les rayons provenant de  $S_1$  et  $S_2$ , notée  $\delta_e$  sur la figure. Nous avons

$$\delta_e = d \sin \theta_e \quad (7.3.2)$$

correspondant au déphasage

$$\Delta\Phi_{12}^e = -\frac{n\omega}{c}\delta_e = -\frac{n\omega}{c}d \sin \theta_e \quad (7.3.3)$$

La convention est telle que pour  $\theta_e$  positif, l'onde émise de la source en  $S_1$  est en avance par rapport à l'autre.<sup>2</sup>

Le déphasage total entre les ondes provenant des fentes  $S_1$  et  $S_2$  est donc donné par la somme des deux déphasages (7.3.1) et (7.3.3) :

$$\Delta\Phi_{12} = \Delta\Phi_{12}^i + \Delta\Phi_{12}^e \implies \boxed{\Delta\Phi_{12} = \frac{n\omega}{c}d (\sin \theta_i - \sin \theta_e)} \quad (7.3.4)$$

On observe ainsi des franges d'interférences rectilignes en faisant varier l'angle d'observation  $\theta_e$ . Les franges brillantes sont caractérisées par :

$$\Delta\Phi_{12} = -2\pi\ell, \quad \ell \in \mathbb{Z} \quad (7.3.5)$$

et apparaissent donc pour les directions angulaires

$$\boxed{\sin \theta_e = \frac{\lambda\ell}{d} + \sin \theta_i, \quad \ell \in \mathbb{Z}} \quad (7.3.6)$$

Il est bien sûr possible de considérer un cas intermédiaire aux deux situations étudiées :

- source à distance finie, assimilable à une source ponctuelle d'ondes sphériques, observation à l'infini ;
- source à l'infini, assimilable à une source d'ondes planes, observation à distance finie.

Il faut alors calculer le déphasage en amont et en aval de l'écran percé (de trous ou de fentes) à l'aide des formules appropriées parmi celles données plus haut.

Ainsi si l'écran d'observation est à distance grande mais finie, nous obtenons à partir de (7.3.6), la position des franges brillantes :

$$y = D \tan \theta_e \simeq D \sin \theta_e \implies y = \frac{\ell\lambda D}{d} + D \sin \theta_i \quad (7.3.7)$$

Notons pour finir que les franges obtenues pour les fentes ou les trous d'Young sont dans les deux cas *rectilignes* au centre de l'écran d'observation.

<sup>2</sup>La phase acquise par une onde progressive sinusoïdale se déplaçant d'une distance  $L$  est  $\text{Arg}(e^{-ikL}) = -kL$ . L'onde ayant la phase la plus grande est donc celle ayant parcouru le chemin le plus court. Cela explique le signe négatif dans l'équation (7.3.3).

## 7.4 Notion de cohérence, interférences en lumière polychromatique

Pour que le phénomène d'interférences se produise, il faut idéalement une source d'ondes parfaitement sinusoïdales, pour laquelle les contributions des différents points de la source soient en phase. Ces conditions sont simples à satisfaire pour les ondes acoustiques mais le sont beaucoup moins pour des ondes lumineuses. Il faut distinguer deux notions de *cohérence*, correspondant à deux obstructions possibles au phénomène d'interférences.

### 7.4.1 Cohérence temporelle

Il est impossible de créer une source d'ondes lumineuses parfaitement sinusoïdale, c.-à.-d. parfaitement *monochromatique*. Les sources physiques émettent toutes les fréquences contenues dans un intervalle  $[\nu - \delta\nu/2; \nu + \delta\nu/2]$  comme nous l'avons vu.

Pour une source non monochromatique, chaque fréquence dans cet intervalle va produire son propre système d'interférences, car des fréquences différentes n'interfèrent pas entre elles.

Pour une différence de chemins optiques  $\Delta C$  donnée, le déphasage entre les ondes ayant suivi les chemins optiques passant par  $S_1$  et par  $S_2$  va donc varier entre

$$\Delta\phi_{\nu-\delta\nu/2} = \frac{2\pi(\nu - \delta\nu/2)}{c}\Delta C \quad \text{et} \quad \Delta\phi_{\nu+\delta\nu/2} = \frac{2\pi(\nu + \delta\nu/2)}{c}\Delta C \quad (7.4.1)$$

Lorsque la variation de déphasage entre ces deux valeurs extrêmes devient de l'ordre de  $2\pi$ , les franges d'interférences se brouillent car il va y avoir une superposition de plusieurs systèmes de franges d'interfrange très différents. Cela survient pour

$$\frac{\delta\nu}{c}\Delta C \sim 1 \quad (7.4.2)$$

Pour une source de largeur spectrale  $\delta\nu$  donnée, cela fixe une limite supérieure sur la différence de marche possible entre deux rayons pour obtenir le phénomène d'interférences. Cette borne supérieure pour la différence de marche est appelée *longueur de cohérence*  $l_c$  :

$$\boxed{l_c = \frac{\delta\nu}{c}} \quad (7.4.3)$$

Une lampe spectrale a une longueur de cohérence  $l_c \sim 3\text{mm}$  et un laser standard  $l_c \sim 30\text{cm}$ . Des lasers spécialisés peuvent avoir des longueurs de cohérence de plusieurs mètres.

### 7.4.2 Cohérence spatiale

La notion de cohérence spatiale est plus simple à comprendre. Une source physique d'ondes lumineuses n'est pas réellement ponctuelle. Il faut alors considérer chaque

point de la source comme une source à part entière. Pour une source classique, ces différents points ne sont pas en phase les uns par rapport aux autres. Si les rayons lumineux passant par  $S_1$  et  $S_2$ , dans l'expérience des trous d'Young, ne sont pas issus du même point de la source, il ne pourront donc pas interférer entre eux. ainsi chacun de ces points donnera un système de franges indépendant. Nous disons alors que la source n'a pas de *cohérence spatiale*.<sup>3</sup> Nous obtenons ainsi une superposition de franges d'interférences créées par toutes ces sources, qui seront a priori décalées entre elles. Lorsque la source physique d'ondes lumineuses a une dimension trop grande, les franges sont alors brouillées. C'est pour cela qu'il est utile de placer un *diaphragme* en aval de la source primaire, pour que celle-ci soit le plus proche possible d'une source ponctuelle.

### 7.4.3 Interférences en lumière polychromatique

Reprenons maintenant plus en détail le phénomène d'interférences pour une source émettant des ondes de toutes les pulsations dans un certain domaine, pas nécessairement petit. Nous supposons que l'amplitude de l'onde lumineuse émise est constante dans le domaine le domaine de pulsations  $\omega_1 < \omega < \omega_2$ . On note

$$\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad , \quad \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \quad , \quad (7.4.4)$$

la pulsation moyenne et la largeur du domaine.

Prenons par exemple l'expérience des trous d'Young avec une source sur l'axe, dans le vide. L'intensité observée sur l'écran, résultant de la superposition des franges d'interférences correspondant aux différentes longueurs d'ondes, est

$$I(y) = I_0 \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \left[ 1 + \cos \left( \frac{n\omega_0}{c} \frac{d}{D} y \right) \operatorname{sinc} \left( \frac{n\Delta\omega}{c} \frac{d}{2D} y \right) \right] \quad (7.4.5)$$

où nous avons introduit la fonction *sinus cardinal*

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (7.4.6)$$

qui tend vers 1 lorsque  $x \rightarrow 0$ . L'allure du carré de cette fonction, qui apparaîtra dans l'étude de la diffraction, est donnée figure 7.9.

---

<sup>3</sup>Le cas du laser est différent, puisque à l'intérieur du faisceau tous les points sont en relation de phase les uns avec les autres, donc il s'agit d'une source cohérente spatialement.

L'intensité lumineuse sur l'écran, pour une pulsation dans un intervalle infinitésimal  $[\omega - d\omega/2, ]\omega + d\omega/2[$ , est

$$dI(y|\omega) = I_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{n\omega}{c} \frac{yd}{D} \right) \right] \frac{d\omega}{\omega_0} \quad (7.4.7)$$

La résultante de la superposition des figures d'interférences pour toutes les pulsations est alors :

$$I(y) = \frac{I_0}{\omega_0} \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega \left[ 1 + \cos \left( \frac{n\omega}{c} \frac{yd}{D} \right) \right] \quad (7.4.8)$$

On obtient ainsi

$$\frac{I(y)}{I_0} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} + \frac{c}{n\omega_0} \frac{D}{d} \frac{1}{y} \left[ \sin \left( \frac{n\omega_2}{c} \frac{yd}{D} \right) - \sin \left( \frac{n\omega_1}{c} \frac{yd}{D} \right) \right] \quad (7.4.9)$$

ce qui donne finalement l'équation (7.4.5).<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Nous avons choisi dès le départ de normaliser la différentielle de l'intensité (7.4.7) avec la pulsation  $\omega_0$ , pour des raisons dimensionnelles.

L'étude de la fonction sinc ( $x$ ) montre que celle-ci comporte un « lobe central » de largeur  $2\pi$ , autour du maximum  $x = 0$ , et de « lobes secondaires » , pour des valeurs de  $|x|$  plus grandes (voir figure 7.9). Le lobe central concentre la grande majorité de l'intensité lumineuse.

Le résultat obtenu n'est pas sans rappeler le phénomène de battements, lorsque  $\Delta\omega \ll \omega$ . En effet le terme en cosinus dans l'équation (7.4.5) correspond à des franges sinusoïdales dont l'interfrange

$$\iota = \frac{2\pi c D}{n\omega_0 d} \quad (7.4.10)$$

dépend uniquement de la pulsation moyenne  $\omega_0$ .

L'intensité de la figure d'interférences est modulée par le sinus cardinal. Elle décroît comme  $1/y$  en s'éloignant du centre de la figure. La largeur du lobe central, concentrant la plus grande partie de l'intensité lumineuse, est donnée par

$$\zeta = \frac{2\pi c}{n\Delta\omega} \frac{2D}{d} \quad (7.4.11)$$

qui vérifie  $\iota/\zeta = \Delta\omega/2\omega_0 \ll 1$ . Cette décroissance est liée naturellement à la longueur de cohérence ; en effet la zone où l'amplitude est significative a une taille de l'ordre du  $\zeta$  défini au-dessus. Les points en bordure de cette zone correspondent à une différence de marche entre les deux ondes de  $\Delta C = \frac{nd\zeta}{D}$ , comparable à la longueur de cohérence définie par l'équation (7.4.3).

### Observation en couleurs

Le calcul précédent suppose que le récepteur d'ondes lumineuses n'est sensible qu'à l'intensité, comme par exemple une photodiode. Cependant beaucoup de récepteurs

d'ondes lumineuses, en premier lieu l'œil, sont capables de détecter des *couleurs*, c.-à.-d. de distinguer entre plusieurs plages de longueurs d'onde.<sup>4</sup> On considère alors une expérience de trous d'Young éclairée par une source de lumière blanche, composée de toutes les longueurs d'onde du spectre visible. L'observateur voit alors la figure suivante.

La frange centrale (autour de  $y = 0$  lorsque la source est sur l'axe), appelée frange d'*ordre zéro*, correspond à des ondes en phases pour toutes les longueurs d'onde. On observe donc une frange brillante de couleur blanche.

La frange suivante, appelée *premier ordre*, est située à un interfrange de la première. La valeur de l'interfrange, équation (7.1.20), dépend de la longueur d'onde. Les franges sont donc décalées entre les différentes couleurs. L'interfrange le plus petit correspond au violet et le plus grand au rouge. On observe ainsi des franges irisées, en « arc en ciel » : le bord intérieur (vers  $y = 0$  des franges est violet alors que le bord extérieur est rouge.

Notons que les contributions des différentes couleurs ne sont pas nettement séparées car les franges brillantes, de forme sinusoïdale, sont relativement larges. Une généralisation de l'expérience va permettre de remédier à ce problème.

## 7.5 Interférences à $N$ ondes

Une généralisation intéressante de l'expérience des trous de Young est obtenue en remplaçant les deux ouvertures du premier écran, sources secondaires d'ondes lumineuses, par un ensemble de  $N$  ouvertures. Pour  $N$  pair posons  $N = 2m$  et plaçons

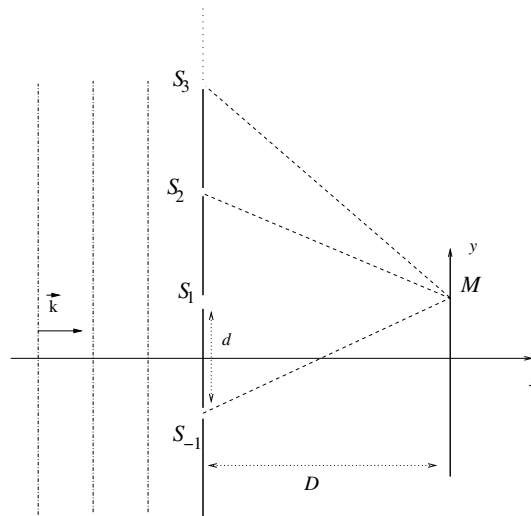


FIG. 7.6 – Interférences à  $N$  ondes.

<sup>4</sup>On a approximativement les gammes de longueur d'onde suivantes : rouge (630-780 nm), orange (630-570 nm) vert (520-570 nm) bleu (440-520 nm) violet (380-440 nm).

les ouvertures en

$$\vec{x}_\ell = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d}{2} + \ell d \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ell = -m \dots m-1 \quad (7.5.1)$$

Elles sont placées uniformément selon l'axe  $Oy$ , séparées par une distance  $d$ , voir la figure 7.6.

On considère aussi que la source est à l'infini, sur l'axe  $Ox$ , pour simplifier les calculs. Les ouvertures sont donc situées sur le même plan d'onde et les sources secondaires associées sont en phase.

Les calculs sont similaires au cas de deux ondes. L'onde obtenue au point  $M$  est, en notation complexe, considérant les sources d'amplitude égale :

$$\tilde{\Psi}(M, t) \simeq \frac{A}{D} e^{i\omega t} \sum_{\ell=-m}^{m-1} e^{-i\kappa \|\vec{r}_\ell\|} \quad (7.5.2)$$

avec comme précédemment  $\vec{r}_\ell = \vec{x} - \vec{x}_\ell$ .

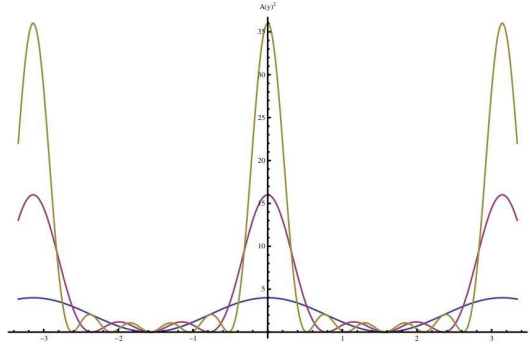


FIG. 7.7 – Franges d'interférences pour  $N$  ondes, avec  $N = 2, 4, 6$ .

L'amplitude de l'onde résultante de la superposition des contributions venant des  $N$  ouvertures est donnée par :

$$\mathcal{A}(y)^2 = \frac{A^2}{D^2} \left| \sum_{\ell=-m}^{m-1} e^{-i\kappa \left( D + \frac{(y+d/2+\ell d)^2 + z^2}{2D} \right)} \right|^2 = \frac{A^2}{D^2} \left| \sum_{\ell=-m}^{m-1} e^{-\frac{2i\pi y \ell d}{\lambda D} - \frac{i\pi}{\lambda D} (\ell d)^2} \right|^2 \quad (7.5.3)$$

Tout les phases indépendantes de  $\ell$  ont pu être sorties de la somme, et ne contribuent pas au module.

Afin de simplifier le résultat de ce calcul, on souhaite observer les franges d'interférences à grande distance de l'écran percé par les ouvertures ; nous souhaitons ainsi négliger, dans l'argument de l'exponentielle de l'éq. (7.5.3), le terme en  $\frac{i\pi}{\lambda D} (\ell d)^2$ . Sa contribution est négligeable à la condition

$$\frac{\pi}{\lambda D} (\ell d)^2 \ll \pi, \quad \forall \ell = -N/2, \dots, N/2 \quad \implies \quad D \gg \frac{(Nd)^2}{4\lambda} \quad (7.5.4)$$



Nous voyons que cette condition, dite de *champ lointain*, fait intervenir la « taille » totale  $Nd$  du réseau de trous de Young, ainsi que la longueur d'onde  $\lambda$ .

Dans le cadre de l'approximation (7.5.4), on obtient une série géométrique qui se calcule aisément :

$$\mathcal{A}(y)^2 = \frac{A^2}{D^2} \left| \sum_{\ell=-m}^{m-1} e^{-\frac{2i\pi y \ell d}{\lambda D}} \right|^2 = \frac{A^2}{D^2} \left| \sum_{u=0}^{2m-1} e^{-\frac{2i\pi y u d}{\lambda D}} \right|^2 = \frac{A^2}{D^2} \left| \frac{1 - e^{-\frac{4i\pi y m d}{\lambda D}}}{1 - e^{-\frac{2i\pi y d}{\lambda D}}} \right|^2 \quad (7.5.5)$$

On en déduit donc que l'amplitude prend la forme :

$$\mathcal{A}(y) = \frac{A}{D} \left| \frac{\sin \frac{\pi N y d}{\lambda D}}{\sin \frac{\pi y d}{\lambda D}} \right| \quad (7.5.6)$$

et pour l'intensité lumineuse on obtient :

$$I(y) = I_0 \left( \frac{\sin \frac{\pi N y d}{\lambda D}}{\sin \frac{\pi y d}{\lambda D}} \right)^2 \quad (7.5.7)$$

Dans le cas  $N = 2$  cela se ramène bien sûr au résultat pour les interférences à deux ondes. L'amplitude est maximale lorsque

$$\sin \frac{\pi N y d}{\lambda D} = 0 \text{ et } \sin \frac{\pi y d}{\lambda D} = 0 \implies y_\ell = \frac{\lambda D}{d} \ell, \quad \ell \in \mathbb{Z} \quad (7.5.8)$$

est alors égale à

$$\mathcal{A}_{\text{MAX}} = \frac{AN}{D}. \quad (7.5.9)$$

L'écart entre ces franges brillantes est donné par le même interfrange (7.2.10) que pour les interférences à deux ondes.<sup>5</sup>

En visualisant graphiquement la fonction (7.5.6), voir fig. 7.7, on s'aperçoit que les franges brillantes sont de plus en plus « étroites » à mesure que  $N$  augmente. Dans la limite  $N \rightarrow \infty$  elles deviennent infiniment fines ; nous y reviendrons pour étudier les réseaux.

## 7.6 Diffraction des ondes

L'étude des ondes lumineuses par l'optique géométrique, qui ne prend pas en compte leur nature ondulatoire, n'est plus valable lorsque les variations des propriétés des milieux traversés par ces ondes varient sur des échelles comparables à celle de leur longueur d'onde. Par exemple, lorsque des obstacles, au contours bien définis, sont placés sur leur trajet, la limite entre la partie éclairée et la partie restant dans l'ombre en amont de cet objet n'est pas très nette. Ce type d'effets est génériquement appelé *diffraction* des ondes. Ils apparaissent naturellement aussi pour des ondes acoustiques.

La compréhension de ce phénomène se fonde sur le principe de Huygens-Fresnel et le phénomène d'interférences.

<sup>5</sup>L'étude de la fonction (7.5.6) montre l'existence d'autres maxima locaux secondaires mais leur amplitude est bien plus faible que celle des maxima donnés par l'équation (7.5.8).

### 7.6.1 Diffraction par une fente infinie en champ lointain

Une expérience particulièrement simple permettant de visualiser le phénomène de diffraction est représentée sur la figure 7.8. On considère un écran éclairé par

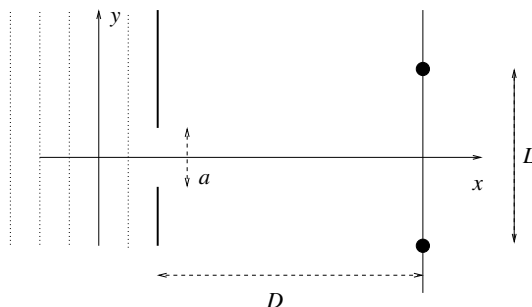


FIG. 7.8 – Diffraction par une fente.

une source monochromatique, sur l'axe  $Ox$ . Si cette source est à grande distance, comme sur la figure, on peut considérer que l'écran reçoit une onde plane progressive sinusoïdale. Cet écran est percé d'une fente unique, de largeur  $a$ , étendue selon l'axe  $Oz$ . On observe l'intensité lumineuse sur un deuxième écran situé à une distance  $D$  du premier. Du point de vue de l'optique géométrique, nous aurions simplement sur le deuxième écran une zone éclairée de largeur  $a$ , le reste de l'écran n'étant pas éclairé du tout.

En utilisant le principe de Huygens-Fresnel nous savons que nous pouvons découper fictivement la fente en source ponctuelles, qui vont alors interférer entre elles. Une manière simple d'aborder le problème est d'utiliser les résultats précédents sur les interférences par  $N$  fentes infiniment fines, séparées entre elles par une distance  $d$ . On choisit  $d$  pour que la distance entre la première et la  $N^{\text{ième}}$  fente soit

$$a = Nd \quad (7.6.1)$$

On considère maintenant la limite où le nombre de fentes tend vers l'infini, soit

$$N \rightarrow \infty, \quad d/\lambda \rightarrow 0, \quad Nd/\lambda \text{ fixé.} \quad (7.6.2)$$

Dans cette limite on garde la taille totale  $a$  du réseau de  $N$  fentes fixée (en unités de la longueur d'onde  $\lambda$ ). De cette manière on obtient effectivement une fente unique de largeur  $a$ , obtenue par « coalescence » d'une infinité des fentes infinitésimales.

On se place toujours dans l'approximation de champ lointain (7.5.4), qui revient à observer à grande distance de la fente. Dans le contexte de la diffraction, cette condition s'appelle *condition de Fraunhofer* et se réécrit comme :

$$\boxed{D \gg \frac{a^2}{4\lambda}} \quad (7.6.3)$$

Cette condition de *diffraction en champ lointain* est satisfaite uniquement très loin de la fente.<sup>6</sup>

<sup>6</sup>Pour  $\lambda = 550 \text{ nm}$  et une fente de largeur  $1 \text{ mm}$ , on trouve la condition  $D > 45 \text{ cm}$ .

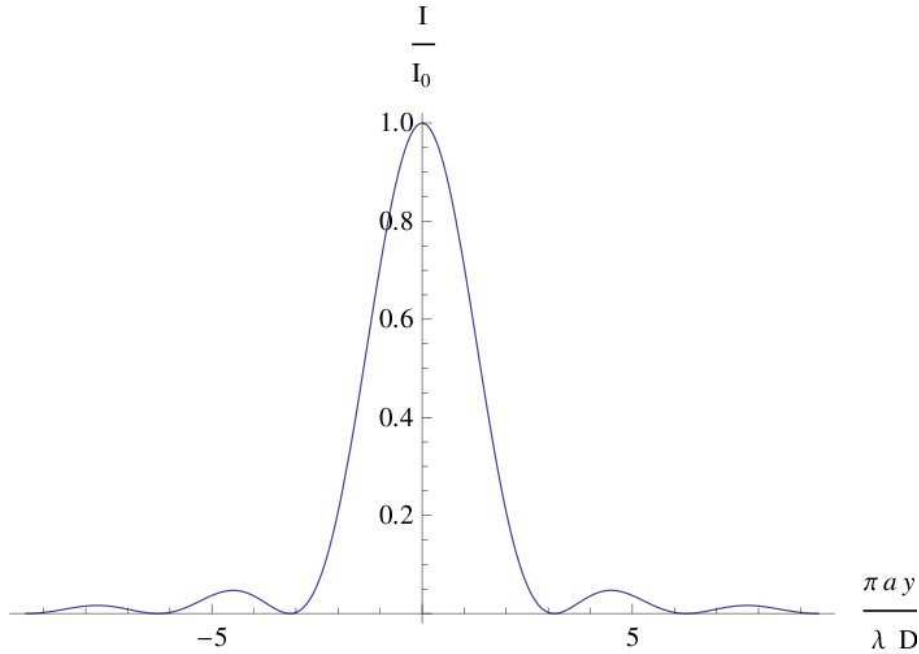


FIG. 7.9 – Répartition d'intensité pour la diffraction par une fente infinie.

Reprenons maintenant l'expression obtenue pour la répartition d'intensité lumineuses pour les interférences à  $N$  ondes en champ lointain, équation (7.5.7), dans la limite continue (7.6.2). L'argument du sinus au dénominateur tend vers zéro dans la limite (7.6.2), à valeur de  $y$  fixée. On peut alors faire un développement limité de ce sinus au premier ordre. En redéfinissant le préfacteur  $I_0$ , on obtient le résultat :<sup>7</sup>

$$I(y) = I_0 \left( \frac{\sin \frac{\pi a y}{\lambda D}}{\frac{\pi a y}{\lambda D}} \right)^2 = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left( \frac{\pi a y}{\lambda D} \right) \quad (7.6.4)$$

La répartition d'intensité obtenue, équation (7.6.4), est représentée sur la figure 7.9. L'intensité s'annule pour

$$\operatorname{sinc} \left( \frac{\pi a y}{\lambda D} \right) = 0 \implies y_\ell = \frac{\ell \lambda D}{a}, \quad \ell \neq 0 \quad (7.6.5)$$

On obtient un « lobe » central, dont la largeur  $L$  est donnée par la différence entre les premières valeurs de  $y$  pour lesquelles l'intensité est nulle :

$$L = \frac{2\lambda D}{a} \quad (7.6.6)$$

qui concentre la grande majorité de l'énergie contenue dans l'onde lumineuse. Ce lobe central est entouré d'une infinité de lobes latéraux, de largeur  $\lambda D/a$ , dont l'amplitude

<sup>7</sup>On trouve sinon un préfacteur  $N^2 I_0$  qui tend vers l'infini. Cela vient du fait que l'intensité de l'onde provenant de chaque fente doit être infinitésimale car elle vient de la division d'une intensité finie en une infinité de composantes, voir plus loin.

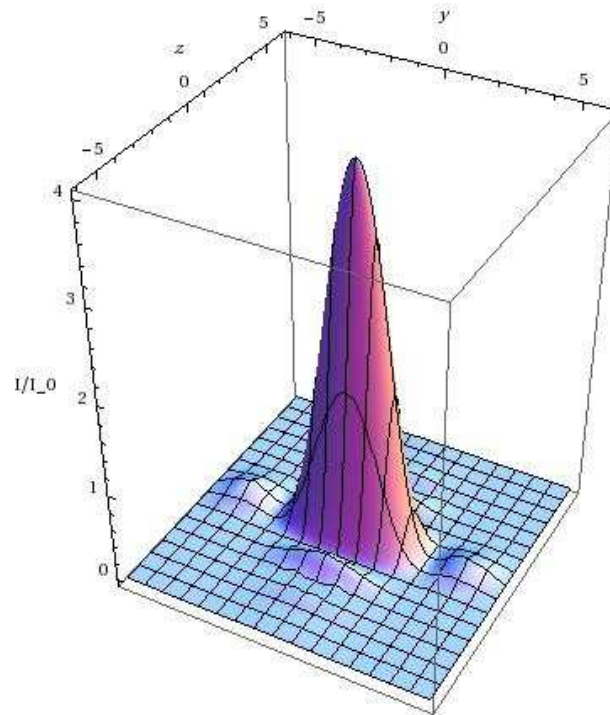


FIG. 7.10 – Répartition d'intensité pour la diffraction par une fente rectangulaire.

décroît rapidement avec la distance à l'axe optique. Nous remarquons que la largeur du lobe central est d'autant plus grande (donc l'approximation d'optique géométrique d'autant plus mauvaise) que la largeur de la fente diminue, toutes choses étant égales par ailleurs.

Si on considère une fente rectangulaire, ayant une taille  $a$  selon l'axe  $Oy$  et  $b$  selon l'axe  $Oz$ , un calcul similaire nous donne la superposition des figures de diffraction par une fente selon les deux axes :

$$I(y, z) = I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi ay}{\lambda D}\right) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi bz}{\lambda D}\right) \quad (7.6.7)$$

La répartition d'intensité est représentée figure 7.10.

### Calcul continu de la diffraction par une fente

On découpe fictivement la fente en intervalles infinitésimaux selon  $Oy$ , de largeur  $dy$ . Suivant le principe de Huygens-Fresnel chacun de ces intervalles peut être assimilé à une source d'ondes sphériques sinusoïdales.<sup>a</sup> La fente étant éclairée par une onde plane se propageant orthogonalement à  $Oy$ , toutes ces sources secondaires sont en phase car elles se situent dans un même plan d'onde. On cherche à exprimer la vibration lumineuse provenant d'une telle source secondaire située au point  $S$  d'ordonnée  $\hat{y}$ , reçue sur le deuxième écran au point  $M$  d'ordonnée  $y$ . On se place, comme pour les interférences, dans la limite où l'écran est placé à grande distance, soit  $D \gg a$ . L'expression de la vibration lumineuse est de la forme :

$$d\tilde{\Psi}(M, t) = \tilde{A} e^{i\omega(t - \frac{SM}{c})} dy \quad (7.6.8)$$

en termes du chemin optique ( $SM$ ) ; on néglige là aussi les variations de l'amplitude de l'onde avec la distance. Cette contribution est naturellement proportionnelle à la « taille »  $dy$  de l'intervalle considéré comme source secondaire. Les contributions des différents intervalles à la vibration lumineuses étant en relation de cohérence par construction, leur superposition va conduire à un phénomène d'interférences. Le chemin optique est donné par :

$$(SM) = n\sqrt{D^2 + (\hat{y} - y)^2} \stackrel{D \gg a}{\simeq} nD + \frac{n(\hat{y} - y)^2}{2D} \quad \text{pour} \quad |\hat{y}| < a \quad (7.6.9)$$

La contribution totale des différentes sources secondaires le long de la fente, observée au point  $M$  sur le deuxième écran, donne donc une vibration lumineuse

$$\tilde{\Psi}(M, t) = \int d\tilde{\Psi}(M, t) = \int_{-a/2}^{a/2} d\hat{y} \tilde{A} e^{i\omega t - \frac{2i\pi}{\lambda} \left( D + \frac{(\hat{y} - y)^2}{2D} \right)} = \tilde{A} e^{i\omega t - \frac{2i\pi}{\lambda} \left( D + \frac{y^2}{2D} \right)} \int_{-a/2}^{a/2} d\hat{y} e^{\frac{i\pi}{\lambda D} (2y\hat{y} - \hat{y}^2)} \quad (7.6.10)$$

### Diffraction de Fraunhofer

Lorsque l'écran d'observation se situe à une grande distance nous pouvons simplifier le calcul en négligeant le terme en  $\hat{y}^2$  dans l'intégrale devant le terme en  $y\hat{y}$ . Cela est possible si la condition de Fraunhofer (7.6.3) est satisfaite.

Dans cette approximation le calcul de l'intégrale (7.6.10) est aisé. On trouve

$$\tilde{\Psi}(M, t) = \tilde{A} e^{i\omega t - \frac{2i\pi}{\lambda} \left( D + \frac{y^2}{2D} \right)} \int_{-a/2}^{a/2} d\hat{y} e^{\frac{2i\pi}{\lambda D} y\hat{y}} = \tilde{A} e^{i\omega t - \frac{2i\pi}{\lambda} \left( D + \frac{y^2}{2D} \right)} \frac{\lambda D}{\pi y} \sin \left( \frac{\pi a y}{\lambda D} \right) \quad (7.6.11)$$

On retrouve alors une repartition d'intensité similaire à (7.6.4).

<sup>a</sup>En toute rigueur il faudrait aussi découper la fente en intervalles infinitésimaux selon  $Oz$ , mais la symétrie du problème garantit que le résultat ne dépendra pas de  $z$ .

### 7.6.2 Résolution des instruments d'optique

Les effets de la diffraction vont imposer une limitation fondamentale à la résolution des instruments d'optique. Considérons un télescope observant une étoile. Cette dernière, étant à très grande distance et de diamètre apparent sur le ciel très faible ( $10^{-2}$  secondes d'arc), peut être assimilée à une source (polychromatique) ponctuelle d'ondes planes, située à l'infini. En bonne approximation, le télescope est donc éclairé par une superposition d'ondes planes de diverses longueurs d'ondes, se propageant dans la même direction.

D'après les lois de l'optique géométrique, l'image de cette étoile au foyer image du télescope doit être ponctuelle, c.-à.-d. de diamètre infiniment petit (en négligeant les diverses aberrations liées au système optique).

Pour comprendre l'effet de la diffraction sur l'image, considérons pour commencer que l'ouverture du télescope dirigée vers le ciel a une forme carrée, de côté  $a$ . D'après les calculs précédents, nous savons que nous obtenons alors une figure de diffraction par une fente rectangulaire. La largeur du lobe central, selon chacun des axes, si on se place sur un écran à une distance  $D$  de l'ouverture, est de  $L = 2\lambda D/a$ , pour chaque longueur d'onde composant la lumière de l'étoile.

Si on observe à l'infini (ce qui est similaire à observer au foyer image d'un télescope), la largeur angulaire  $\Delta\theta$  est telle que  $\Delta\theta \simeq 2 \tan(\Delta\theta/2) = L/D$ . On obtient alors, pour une longueur d'onde  $\lambda$  donnée :

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{a} \quad (7.6.12)$$

Au lieu d'observer un objet parfaitement ponctuel, tout se passe comme si l'étoile correspondait à une source étendue de forme carrée, de dimension angulaire  $\Delta\theta$ .

Dans la réalité, l'ouverture du télescope est un cercle, de diamètre  $d$ . Cela rend le calcul de la figure de diffraction associée plus compliqué. On obtient que l'image de l'étoile est un petit disque (*disque de Airy*) dont le diamètre angulaire est donné par

$$\boxed{\Delta\theta \simeq \frac{1,2 \lambda}{d}}, \quad (7.6.13)$$

avec bien sûr un résultat en radians. Avec une longueur d'onde typique de 600 nm, on obtient qu'un télescope de 200 mm de diamètre (matériel amateur) a une résolution maximale de l'ordre de 0,7 secondes d'arc.

## 7.7 Réseau de diffraction

Pour faire la synthèse des différents phénomènes étudiés dans ce cours, nous conclurons par l'analyse d'un réseau de diffraction. Ce dispositif, qui met en jeu à la fois les interférences et la diffraction, permet de séparer les différentes longueurs d'ondes composant une onde lumineuse de manière beaucoup plus efficace qu'un prisme.

Considérons une expérience similaire à celle de la diffraction par une fente de largeur finie  $a$ , mais avec un très grand nombre  $N$  de fentes séparées par une distance

$d$  au lieu d'une seule, voir fig. 7.11. Nous considérons ce système dans le régime où la taille de chaque fente est très inférieure à la distance entre deux fentes successives :

$$a \ll d \quad (7.7.1)$$

À la différence des calculs faits dans la section 7.5, nous considérons que chaque fente est de largeur finie  $a$ , et non infinitésimale. Nous combinons ainsi les effets de la *diffraction* avec ceux des *interférences* à  $N$  ondes.

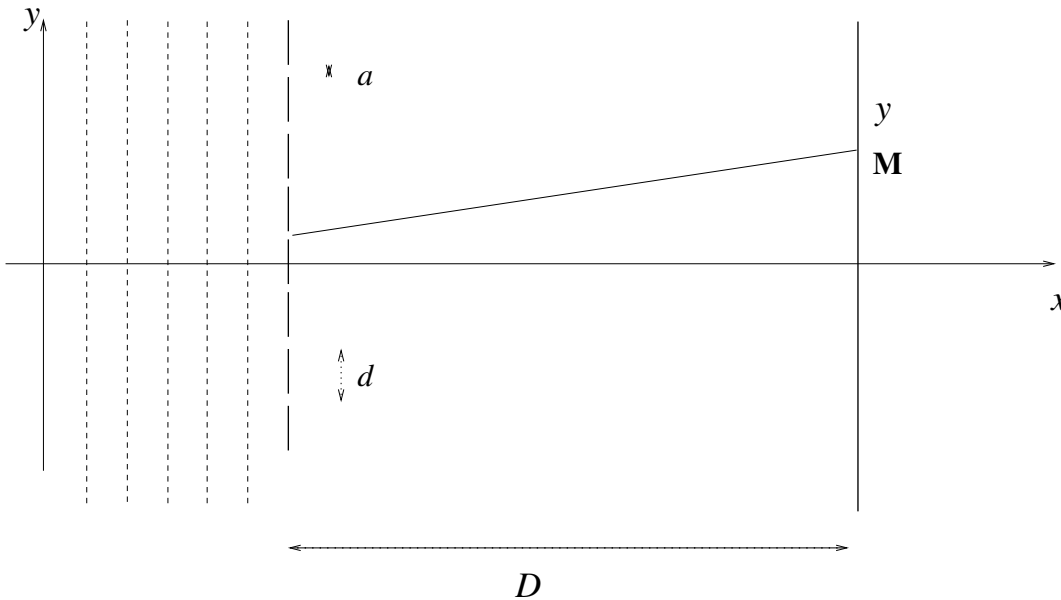


FIG. 7.11 – Réseau de diffraction.

L'onde lumineuse passant par chaque fente va donner sur l'écran une figure de diffraction comme étudiée au dessus, qui au lieu d'être centrée en  $y = 0$  va être centrée en l'ordonnée  $y$  correspondant à celle de la fente elle-même, c'est à dire « en face » de celle-ci. Chacune de ces figures de diffraction a un lobe central de largeur

$$L = \frac{2\lambda D}{a} \quad (7.7.2)$$

Les vibrations lumineuses issues des différentes fentes, de la forme (7.6.11), étant en relation de cohérence, vont interférer entre elles. Nous avons ainsi la superposition du phénomène de diffraction et d'interférences à  $N$  fentes, avec un interfrange

$$\iota = \frac{\lambda D}{d} \quad (7.7.3)$$

Si  $L \gg d$  nous pouvons négliger le « décalage » selon  $Oy$  entre les figures de diffraction issues des différentes fentes. En outre, dans le régime étudié, tel que  $a \ll d$ , nous avons

$$\iota \ll L \quad (7.7.4)$$

donc l'interfrange est beaucoup plus petit que la largeur des lobes de diffraction. La figure de diffraction commune à toutes les fentes peut alors être vue comme une « enveloppe » qui va moduler l'amplitude des franges d'interférences en fonction de  $y$ . Chaque lobe de diffraction va ainsi contenir un grand nombre de franges d'interférences.

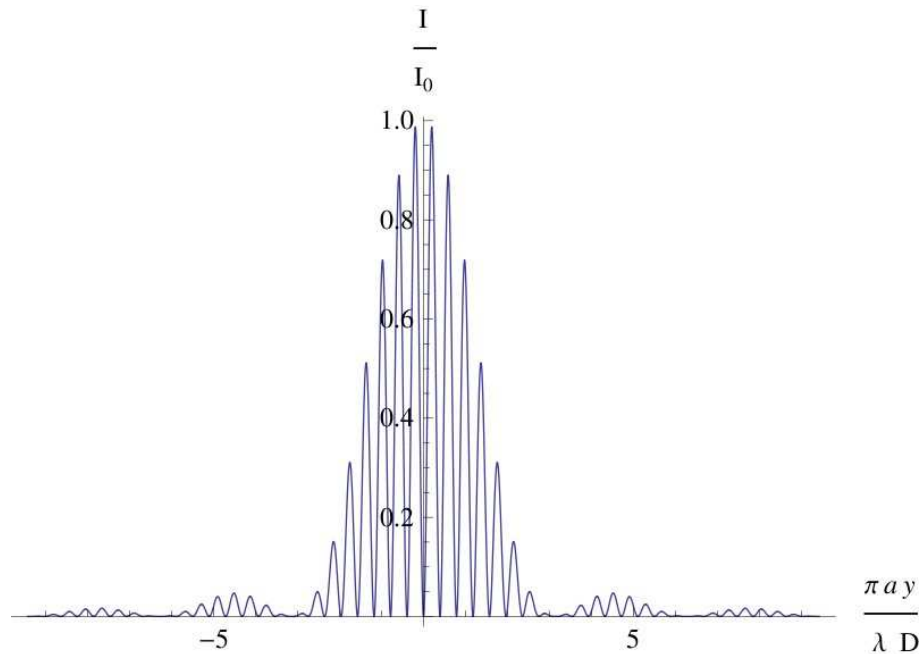


FIG. 7.12 – Répartition d'intensité pour un réseau de diffraction, avec  $d = 8a$ .

Combinant l'équation (7.5.7) donnant la figure d'interférences à  $N$  ondes et l'équation (7.6.4) donnant la figure de diffraction par une fente on obtient la répartition d'intensité suivante :

$$I(y) = I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi a y}{\lambda D}\right) \left(\frac{\sin \frac{\pi N y d}{\lambda D}}{\sin \frac{\pi y}{\lambda D}}\right)^2 \quad (7.7.5)$$

Une représentation graphique est donnée par la figure 7.12.

## Analyse spectrale

Dans la limite où le nombre de fentes par unité de longueur du réseau, habituellement donné en *nombre de traits par millimètre* est très élevé, un grand nombre de fentes vont être éclairées par la source d'onde lumineuses, et donc le nombre  $N$  de fentes participant au phénomène d'interférence sera très grand. Nous avons vu alors que les franges brillantes d'interférences sont extrêmement fines, c'est à dire que leur largeur à mi-hauteur selon l'axe  $Oy$  est très petite. Si nous considérons une lumière composée d'une superposition d'ondes monochromatiques à différentes longueurs d'ondes, chacune d'entre elles va donner une répartition d'intensité de la



forme (7.12), avec un interfrange (7.7.3) dépendant de la longueur d'onde en question. Donc, à part pour la frange centrale en  $y = 0$  (lorsque la source est sur l'axe) où les contributions des différentes longueurs d'ondes se superposent, on obtient des franges brillantes distinctes pour les différentes longueurs d'onde, à l'intérieur du lobe central de la figure de diffraction. Ceci permet d'analyser en détail la composition de l'onde lumineuse, c.-à.-d. l'intensité en fonction de la longueur d'onde. De tels réseaux sont utilisés de manière courante dans de nombreux domaines de la physique.



# Chapitre 8

## Effet Doppler

Une onde sinusoïdale est caractérisée par sa pulsation  $\omega$  ou de manière équivalente par sa fréquence  $\nu$  ou sa période  $T$ . Cette dernière grandeur correspond à l'intervalle temporel entre deux crêtes (ou maxima) de la grandeur représentant l'onde. Ces notions ne sont pas invariantes mais dépendent du référentiel de l'observateur et de celui de la source. La variation de ces grandeurs observée en passant d'un référentiel à l'autre s'appelle *effet Doppler*.

### 8.1 Effet Doppler en acoustique

Le raisonnement que nous allons conduire ci-dessous concerne uniquement les ondes mécaniques dans un milieu matériel. Considérons la propagation d'ondes sonores dans un fluide statique (c.-à.-d. qui ne subit pas d'écoulement). Il faut considérer trois référentiels galiléens distincts :

1. le référentiel  $\mathcal{R}$  lié au fluide, dans lequel se propage l'onde. L'équation d'onde (2.1.1), dans le cas des ondes sonores, s'applique dans ce référentiel-ci uniquement.
2. le référentiel  $\mathcal{E}$  lié à l'émetteur, c.-à.-d. à la source d'ondes sonores. Ce référentiel galiléen est animé d'une vitesse constante  $\vec{v}_E$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ .
3. le référentiel  $\mathcal{O}$  lié à l'observateur, qui détecte les ondes sonores. Ce référentiel galiléen est animé d'une vitesse constante  $\vec{v}_O$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ .

Pour simplifier on considère que la propagation et les translations uniformes des référentiels ont lieu selon une seule et même direction. Les vitesses  $v_E$  et  $v_O$  sont maintenant des grandeurs algébriques et non vectorielles, voir fig. 8.1. Les coordonnées sont données dans le repère attaché au référentiel  $\mathcal{R}$  lié au fluide.

À un instant  $t$  quelconque, les coordonnées de la source et de l'observateur dans ce repère sont données par :

$$x_E(t) = X_E + v_E t \quad (8.1.1a)$$

$$x_O(t) = X_O + v_O t \quad (8.1.1b)$$

Considérons qu'à l'instant  $t = 0$ , la source – qui se situe alors en  $x_E(0) = X_E$  – émet une première impulsion, c.-à.-d. un signal de durée très brève (négligeable devant le

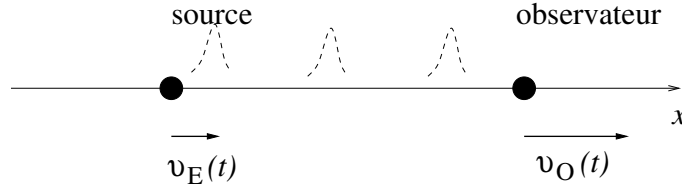


FIG. 8.1 – Effet Doppler-Fizeau.

temps de propagation du signal), se propageant vers les  $x$  croissants; il s'agit donc d'onde *progressive*. Ce signal se propage alors dans le fluide vers les  $x$  croissants à une vitesse égale à la célérité  $c$ . À un instant  $t > 0$  l'impulsion se situe en

$$x_1(t) = x_E(0) + ct = X_E + ct \quad (8.1.2)$$

En comparant avec l'éq (8.1.1b) on en déduit que le signal sera reçu par l'observateur à l'instant  $t_1$  tel que

$$x_o(t_1) = x_1(t_1) \implies X_o + v_o t_1 = X_E + ct_1 \quad (8.1.3)$$

On en déduit que

$$t_1 = \frac{X_o - X_E}{c - v_o} \quad (8.1.4)$$

On voit que le signal ne pourra être réceptionné que si la vitesse de l'observateur est inférieure à la célérité des ondes sonores, c.-à.-d. si  $v_o < c$ .

On considère qu'à l'instant  $t_2$ , la source – qui se situe alors en  $x_E(t_2) = X_E + v_E t_2$  – émet une seconde impulsion, toujours vers les  $x$  croissants. À un instant  $t > t_2$  l'impulsion qui se propage dans le fluide se situe en

$$x_1(t) = x_E(t_2) + c(t - t_2) = X_E + v_E t_2 + c(t - t_2) \quad (8.1.5)$$

Ce signal est alors reçu par l'observateur en  $t_3 > t_2$  tel que

$$x_o(t_3) = x_1(t_3) \implies X_o + v_o t_3 = X_E + v_E t_2 + c(t_3 - t_2) \quad (8.1.6)$$

On en déduit que

$$t_3 = \frac{X_o - X_E + (c - v_E)t_2}{c - v_o} \quad (8.1.7)$$

Si l'émetteur continue à émettre des impulsions à intervalles réguliers, nous obtiendrons une onde périodique – mais non sinusoïdale – dont la période fixée par l'émetteur est

$$T_E = t_2 - 0 = t_2 \quad (8.1.8)$$

Par définition, la période du signal telle qu'elle est perçue par l'observateur est

$$T_o = t_3 - t_1 \quad (8.1.9)$$

En utilisant les équations (8.1.4,8.1.7) on en déduit que

$$T_o = \frac{(c - v_E)t_2}{c - v_o} \implies T_o = \frac{1 - \frac{v_E}{c}}{1 - \frac{v_o}{c}} T_E \quad (8.1.10)$$

Ce résultat montre clairement que la période du signal observée diffère de la période d'émission si les vitesses de la source ou de l'observateur sont non nulles par rapport au référentiel du fluide. Notons que ces deux vitesses apparaissent de manière dissymétrique.

La formule (8.1.10) est valable pour toute forme d'onde périodique, en particulier sinusoïdale. Il est plus usuel de présenter le résultat en termes de fréquences plutôt que de périodes. D'après l'éq. (2.5.9) on obtient la relation entre la fréquence émise  $\nu_E$  et la fréquence perçue par l'observateur  $\nu_o$  :

$$\nu_o = \frac{1 - \frac{v_o}{c}}{1 - \frac{v_E}{c}} \nu_E \quad (8.1.11)$$

Considérons comme un cas particulier le célèbre exemple de la sirène de pompiers. Dans ce cas l'observateur est fixe par rapport au fluide – en l'absence de vent ! – donc  $v_o = 0$ . Lorsque le camion de pompiers s'approche à une vitesse  $v$ , nous avons  $v_E = v > 0$ . On a donc  $\nu_o = (1 - \frac{v}{c})^{-1} \nu_E$ , qui est une fréquence supérieure à la fréquence émise ; la sirène apparaît alors plus aigüe. Lorsque le camion s'éloigne, nous avons  $v_E = -v < 0$ . La fréquence perçue par l'observateur est alors  $\nu_o = (1 + \frac{v}{c})^{-1} \nu_E$ , qui est une inférieure à la fréquence émise ; la sirène apparaît alors plus grave.<sup>1</sup>

## 8.2 Effet Doppler-Fizeau

L'étude de l'effet Doppler appliquée aux ondes lumineuses est plus délicate et plus intéressante puisqu'elle est liée à la découverte de la théorie de la relativité restreinte. Nous savons maintenant – ce qui n'était pas acceptable à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle – qu'il n'y a pas de milieu assurant la propagation des ondes lumineuses ; en d'autres termes il n'y a pas de référentiel privilégié pour considérer leur propagation, contrairement à ce que nous avons vu ci-dessus pour les ondes sonores. L'équation d'ondes (2.1.1) est valable pour *tout référentiel d'inertie*. Il est hors du cadre de ce cours de dériver la formule de l'*effet Doppler-Fizeau relativiste*. La formule (8.1.11) établie plus haut pour des ondes mécaniques est fautive pour les ondes lumineuses,<sup>2</sup> mais devient une bonne approximation de la réalité si les vitesses de l'émetteur et de l'observateur sont petites devant la célérité des ondes lumineuses, c.-à.-d. pour  $v_E/c \ll 1$  et  $v_o/c \ll 1$ .

<sup>1</sup>Dans le cas où la direction de propagation et les mouvements sont quelconques dans l'espace, il est facile d'obtenir une formule similaire, qui fait apparaître les composantes *radiales* des vitesses, c.-à.-d. le long de la direction de propagation. Il faut faire attention au fait que même si les vitesses sont de normes constantes, leurs composantes radiales changent au cours du temps.

<sup>2</sup>En particulier les vitesses de la source et de l'observateur apparaissent de manière dissymétrique, signalant l'existence d'un référentiel privilégié pour la propagation des ondes. Ceci est contraire aux postulats de la relativité restreinte concernant les ondes électromagnétiques.

Dans ce cadre le développement limité de la relation (8.1.11) donne la formule pour l'effet Doppler non-relativiste des ondes lumineuses :

$$\boxed{\nu_{\text{O}} \stackrel{v_{\text{E}}, v_{\text{O}} \ll c}{\simeq} \left(1 - \frac{v_{\text{O}} - v_{\text{E}}}{c}\right) \nu_{\text{E}}} \quad (8.2.1)$$

Ce résultat ne dépend que de la vitesse *relative*  $v_{\text{O}} - v_{\text{E}}$  de l'observateur par rapport à l'émetteur, ce qui est cohérent avec l'absence de référentiel privilégié.