

## Chapitre 3

# Superposition d'ondes, ondes stationnaires

Une propriété majeure de l'équation d'onde (2.1.1), ainsi que de sa généralisation à trois dimensions, est d'être une équation *linéaire*. Cette propriété implique que n'importe quelle combinaison linéaire de solutions est elle-même une solution :

$$\begin{cases} \square f(x,t) = 0 \\ \square g(x,t) = 0 \end{cases} \implies \square [\alpha f(x,t) + \beta g(x,t)] = 0, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (3.0.1)$$

Ce principe extrêmement important est appelé *principe de superposition*.

Dans ce chapitre, nous allons étudier plus en détail les propriétés de l'onde résultant de la superposition de deux ondes progressives ou régressives.

### 3.1 Superposition de deux ondes progressives de même pulsation

Nous considérons le cas le plus simple de superposition d'ondes, l'addition de deux ondes progressives sinusoïdales. On considèrera les deux ondes de *même pulsation*, dont le déphasage en un point donné est le même à tout instant<sup>1</sup>

En notation complexe, on écrit alors l'onde totale, somme des deux ondes  $f_1$  et  $f_2$  comme (avec la convention  $k > 0$ )

$$\tilde{f}(x,t) = \tilde{f}_1(x,t) + \tilde{f}_2(x,t) = (\tilde{\mathcal{A}}_1 + \tilde{\mathcal{A}}_2) e^{i(\omega t - kx)} \quad (3.1.1)$$

Nous observons immédiatement que, comme il se doit, la somme de ces deux ondes progressives est elle-même une onde progressive.

Remarquons aussi que la relation de dispersion (2.5.3) garantit que, les pulsations étant égales, les nombre d'ondes sont égaux en valeur absolue.

---

1. Cette dernière hypothèse est liée à la notion de *cohérence* qui sera développée lors de l'étude des interférences.

On peut obtenir alors l'onde résultante sous la forme canonique en utilisant la décomposition (2.5.17):

$$\tilde{\mathcal{A}}_1 + \tilde{\mathcal{A}}_2 = \mathcal{A}_1 e^{i\phi_1} + \mathcal{A}_2 e^{i\phi_2} \quad (3.1.2)$$

Le module de l'amplitude complexe résultante est donné par

$$\begin{aligned} |\tilde{\mathcal{A}}|^2 &= (\mathcal{A}_1 e^{i\phi_1} + \mathcal{A}_2 e^{i\phi_2}) (\mathcal{A}_1 e^{-i\phi_1} + \mathcal{A}_2 e^{-i\phi_2}) \\ &= \mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 + 2\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Calculons maintenant la phase de l'onde. Nous avons

$$\tan \phi = \frac{\text{Im}(\tilde{\mathcal{A}})}{\text{Re}(\tilde{\mathcal{A}})} = \frac{\mathcal{A}_1 \sin \phi_1 + \mathcal{A}_2 \sin \phi_2}{\mathcal{A}_1 \cos \phi_1 + \mathcal{A}_2 \cos \phi_2} \quad (3.1.4)$$

Considérons maintenant le cas particulier où  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$ . Dans ce cas le calcul explicite de la superposition est simple. Nous avons

$$\tilde{\mathcal{A}}^2 = 2\mathcal{A}_1^2 [1 + \cos(\phi_1 - \phi_2)] = 4\mathcal{A}_1^2 \cos^2 \left( \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right) \quad (3.1.5)$$

L'amplitude réelle dépend donc du *déphasage* entre les deux ondes progressives ou régressives, défini par

$$\Delta\Phi(x,t) = \Phi_2(x,t) - \Phi_1(x,t) = \phi_2 - \phi_1. \quad (3.1.6)$$

Notons que, pour des ondes à une dimension, le déphasage (3.1.6) est constant ; il est indépendant de la position  $x$  et de l'instant  $t$ .

On écrit finalement l'amplitude réelle de l'onde obtenue par superposition de deux ondes progressives sinusoïdales en fonction de leur déphasage :

$$\boxed{\mathcal{A} = 2\mathcal{A}_1 \left| \cos \left( \frac{\Delta\Phi}{2} \right) \right|} \quad (3.1.7)$$

Nous avons rajouté une valeur absolue comme l'amplitude doit être toujours positive.

## 3.2 Ondes stationnaires

Considérons maintenant un autre cas important de superposition d'ondes sinusoïdales. La première onde est choisie uniquement *progressive*, la seconde uniquement *régressive*, et toutes deux de même amplitude réelle.

L'onde complexe résultant de cette superposition a la forme suivante :

$$\tilde{f}(x,t) = \mathcal{A} e^{i\phi_1} e^{i(\omega t - kx)} + \mathcal{A} e^{i\phi_2} e^{i(\omega t + kx)} \quad (3.2.1)$$

Nous pouvons réécrire cette expression comme

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x,t) &= \mathcal{A} e^{i(\omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2})} \left( e^{i(-kx + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2})} + e^{i(kx + \frac{\phi_2 - \phi_1}{2})} \right) \\ &= 2\mathcal{A} e^{i(\omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2})} \cos \left( kx + \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

On observe ainsi que l'onde est le produit d'une fonction de  $t$  uniquement et d'une fonction de  $x$  uniquement:

$$f(x,t) = \operatorname{Re} \left[ \tilde{f}(x,t) \right] \implies \boxed{f(x,t) = 2\mathcal{A} \cos\left(\omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \cos\left(kx + \frac{\phi_2 - \phi_1}{2}\right)} \quad (3.2.3)$$

Cette onde se présente sous une forme factorisée, par rapport à ses dépendances spatiale et temporelle:

$$\exists g, h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}), \quad \boxed{f(x,t) = g(x) h(t)} \quad \forall x, \forall t \in \mathbb{R} \quad (3.2.4)$$

Une telle onde est appelée *onde stationnaire*; elle correspond à une onde qui ne se propage pas.

La *\*forme\** de l'onde, vue comme une fonction de  $x$ , est indépendante de  $t$ . Nous observons en effet que l'amplitude locale de la vibration sinusoidale associée à l'onde, pour une valeur de  $x$  donnée, est  $2\mathcal{A}|\cos(kx + \frac{\phi_2 - \phi_1}{2})|$ , indépendamment de  $t$ . Ainsi au cours du temps l'onde ne change pas de forme, mais oscille *globalement* de manière sinusoidale.

### Ventres et nœuds d'une onde stationnaire

Nous pouvons distinguer deux types de points remarquables de l'onde stationnaire, voir fig. 3.1. La position de ces points particuliers ne change pas au cours du temps en raison du caractère stationnaire de cette onde. Pour simplifier la discussion,

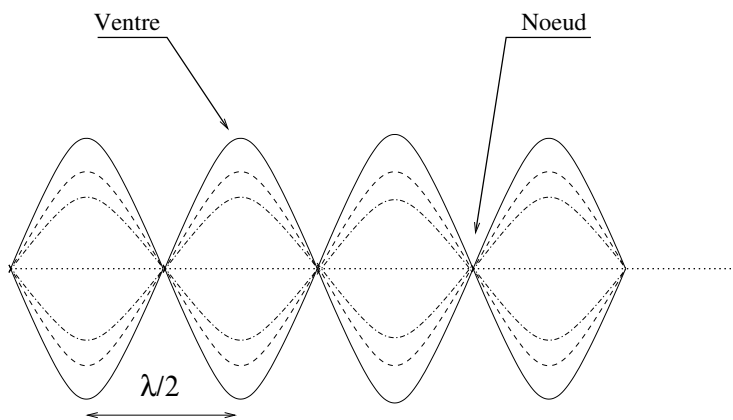


FIG. 3.1 – Nœuds et ventres d'une onde stationnaire.

considérons le cas particulier  $\frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \equiv 0[2\pi]$ . On distingue alors :

- les *nœuds* sont tels que  $f(x,t) = 0 \forall t$ , c.-à.-d. qu'ils ne sont jamais en mouvement. Ils se situent aux points  $x_n$  tels que  $kx_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .
- Les *ventres* correspondent à des extrema de l'onde à tout instant, alternativement maxima et minima selon la valeur de  $t$ . Ils sont situés aux points  $x_m$  tels que  $kx_m = m\pi$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ . Il faut distinguer deux séries de ventres. Les ventres pour  $m$  pair d'une part, et pour  $m$  impair d'autre part, sont les uns maxima et les autres minima de  $f(x,t)$  pour une valeur de  $t$  donnée.

La distance entre deux nœuds successifs (ou entre deux ventre successifs) est donnée par

$$x_{n+1} - x_n = x_{m+1} - x_m = \frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2} \quad (3.2.5)$$

Insistons finalement sur le fait qu'une onde stationnaire n'est *pas* une onde progressive. Une onde stationnaire est obtenue par la superposition d'une onde progressive sinusoïdale et d'une onde régressive sinusoïdale, toutes les deux de même amplitude réelle.

### 3.3 Battements

Jusqu'ici nous avons considéré la superposition de deux signaux sinusoïdaux de *même fréquence* temporelle.<sup>2</sup>

Il est intéressant considérer la superposition de deux signaux de fréquences  $\nu_1$  et  $\nu_2$  très voisines, mais non identiques :

$$\frac{|\nu_2 - \nu_1|}{\nu_2 + \nu_1} \ll 1 \quad (3.3.1)$$

Cette situation apparaît lorsqu'on cherche à aligner la fréquence d'un système sur celle d'un système de référence.

Dans le cadre de la propagation d'ondes, on mesure le signal en *un point donné* de l'espace, tel que les deux ondes y aient respectivement des phases  $\phi_1$  et  $\phi_2$  à l'instant  $t = 0$ . Nous supposons pour simplifier que les deux signaux sont de même amplitude réelle  $\mathcal{A}$ .

En notation complexe la superposition des deux signaux est alors donnée par

$$\tilde{y}(t) = \tilde{y}_1(t) + \tilde{y}_2(t) = \mathcal{A}e^{i(\omega_1 t + \phi_1)} + \mathcal{A}e^{i(\omega_2 t + \phi_2)} \quad (3.3.2)$$

nous définissons maintenant

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \quad , \quad \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad (3.3.3a)$$

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 \quad , \quad \phi = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \quad (3.3.3b)$$

où  $\omega$  correspond à la pulsation moyenne. En termes de ces paramètres, nous avons

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) &= \mathcal{A} e^{i(\omega t + \phi)} \left[ e^{i(\frac{\Delta\omega}{2}t + \frac{\Delta\phi}{2})} + e^{-i(\frac{\Delta\omega}{2}t + \frac{\Delta\phi}{2})} \right] \\ &= 2\mathcal{A} e^{i(\omega t + \phi)} \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t + \frac{\Delta\phi}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

L'onde réelle est alors simplement donnée par

$$y(t) = \text{Re}[\tilde{y}(t)] \implies \boxed{y(t) = 2\mathcal{A} \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t + \frac{\Delta\phi}{2}\right) \cos(\omega t + \phi)} \quad (3.3.5)$$

2. Par exemple, lorsque deux hauts-parleurs, sources d'ondes sonores, sont reliés à un même générateur de courant alternatif.

Intéprétons maintenant le résultat lorsque les deux pulsations sont proches, soit pour

$$|\Delta\omega| \ll \omega \quad (3.3.6)$$

Dans cette limite, la période  $2\pi/|\Delta\omega|$  associée au premier terme de (3.3.5) est beaucoup plus grande que la période moyenne  $2\pi/\omega$ , qui apparaît dans le second cosinus.

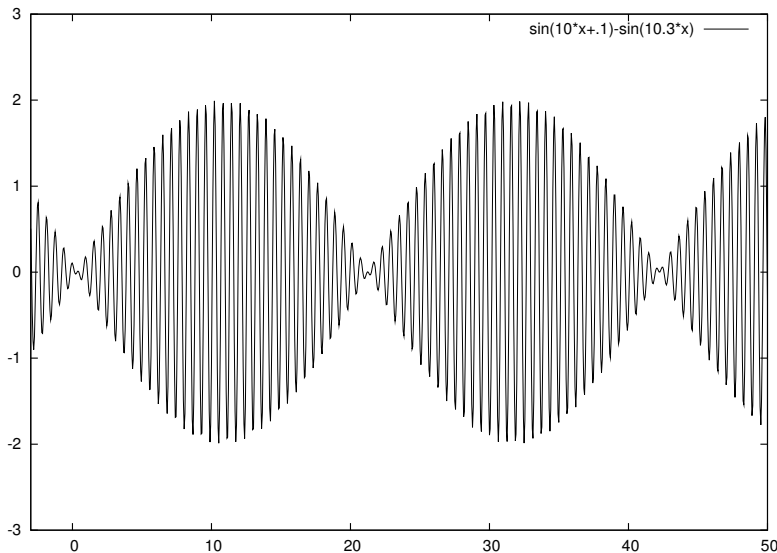


FIG. 3.2 – *Phénomène de battements.*

L'allure du signal obtenu en fonction du temps est donnée par la fig. 3.2. On peut considérer que nous avons un signal périodique de pulsation  $\omega$ , dont l'amplitude varie lentement avec le temps comme<sup>3</sup>

$$\mathcal{A}(t) \sim 2|\mathcal{A} \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t + \frac{\Delta\phi}{2}\right)| \quad (3.3.7)$$

Cette variation constitue l'*enveloppe* du signal. La largeur temporelle d'un *lobe* de l'enveloppe (voir la figure 3.2) est donnée par la demi-période de  $\mathcal{A}(t)$ , soit  $\pi/|\Delta\omega|$ .

Lorsque la pulsation des deux signaux se rapproche, cette demi-période devient de plus en plus grande, ce qui se traduit auditivement par une *modulation* de plus en plus lente de l'amplitude du signal. L'écoute de ce phénomène permet d'accorder très précisément les instruments de musique.

### 3.4 Figures de Lissajous

En complément de ce chapitre nous donnons ici une méthode permettant de représenter géométriquement la superposition de deux signaux sinusoïdaux. Dans le cas des

3. Remarquons que, comme l'amplitude varie avec le temps, ce n'est pas strictement un signal sinusoïdal.

ondes, cette méthode sont utiles pour représenter l'addition de deux solutions de l'équation d'onde en un point donné d'abscisse  $x_0$ . On considère donc la superposition de deux signaux sinusoïdaux de même pulsation, en représentation complexe :

$$\tilde{f}(t) = \tilde{f}_1(t) + \tilde{f}_2(t) = \tilde{A}_1 e^{i\omega t} + \tilde{A}_2 e^{i\omega t} \quad (3.4.1)$$

où les amplitudes complexes

$$\tilde{A}_\ell = \mathcal{A}_\ell e^{i\phi_\ell} \quad , \quad \ell = 1,2 \quad (3.4.2)$$

des signaux sinusoïdaux prennent en compte dans la phase  $\phi_\ell$  les contributions  $e^{\pm ikx_0}$  dues à la propagation des ondes.

Dans la représentation appelée *figure de Lissajous*, on considère une courbe paramétrique dans le plan  $(x,y)$ , de paramètre  $t$

$$\begin{cases} x(t) = f_1(t) = \mathcal{A}_1 \cos(\omega t + \phi_1) \\ y(t) = f_2(t) = \mathcal{A}_2 \cos(\omega t + \phi_2) \end{cases} \quad (3.4.3)$$

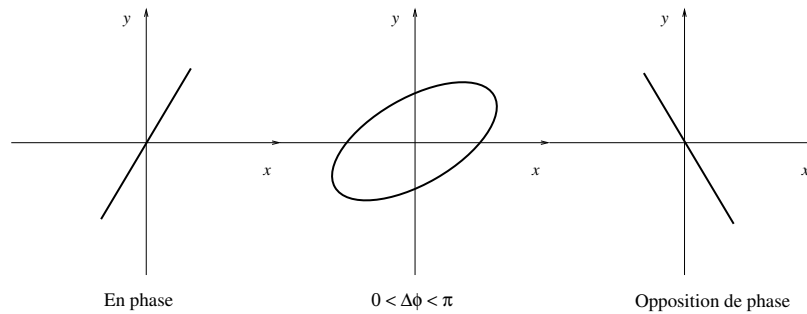


FIG. 3.3 – Figures de Lissajous, signaux de fréquences égales.

Les fonctions  $x(t)$  et  $y(t)$  étant périodiques de période  $T$ , cela définit une courbe fermée du plan. On peut montrer que dans le cas général, cette courbe est une *ellipse* dont l'orientation des axes dépend du *déphasage*  $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ .

On considère pour simplifier la discussion que  $\mathcal{A}_1 \geq \mathcal{A}_2$ . Considérons quelques exemples simples:

1. vibrations *en phase*, avec  $\phi_1 = \phi_2$ . Dans ce cas  $x(t)$  et  $y(t)$  sont proportionnels:

$$y(t) = \frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_2} x(t) \quad \forall t \quad (3.4.4)$$

La figure correspondante est un segment de droite, de pente  $\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_2$ , contenu dans le rectangle délimité par  $(x,y) = (-\mathcal{A}_1, -\mathcal{A}_2)$  et  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ .

2. vibrations *en opposition de phase*, cad avec  $\phi_1 = \phi_2 + \pi$ . Dans ce cas  $x(t)$  et  $y(t)$  également proportionnels. La figure correspondante est un segment de droite, de pente  $-\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_2$ , contenu dans le rectangle délimité par  $(x,y) = (-\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$  et  $(\mathcal{A}_1, -\mathcal{A}_2)$ .

3. vibrations *en quadrature de phase*, cad avec  $\phi_2 = \phi_1 + \pi/2$ . Dans ce cas la courbe de Lissajous est une *ellipse* de grand axe selon  $Ox$  et de petit axe selon  $Oy$ . La longueur du demi grand-axe est  $\mathcal{A}_1$  et celle du demi petit-axe  $\mathcal{A}_2$ . Dans le cas particulier où les amplitudes sont égales ( $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$ ) l'ellipse devient un cercle.

Ainsi, pour déterminer si deux signaux sont en phase, il suffit de se placer dans la configuration où l'ellipse se dégrade en un segment de droite de pente positive, voir fig. 3.3.

Cette représentation est très utile en pratique, car elle est observable avec un oscilloscope en mode XY, lorsque l'onde est convertie en signal électrique.





# Chapitre 4

## Cordes vibrantes

Le premier problème physique pour lequel nous allons rencontrer l'équation d'onde est celui des vibrations transverses d'une corde. Il s'agit de l'exemple le plus simple à décrire afin d'illustrer la physique des ondes. Il s'applique naturellement à l'étude des instruments à cordes que nous évoquerons à la fin de ce chapitre.

### 4.1 Établissement de l'équation d'onde

Dans cette section nous verrons que dans l'hypothèse de petites perturbations, le principe fondamental de la dynamique pour le déplacement transverse d'un élément de la corde est régi par l'équation d'onde (2.1.1).

#### 4.1.1 Description de la corde vibrante

On considère une corde de longueur  $L$  tendue selon l'axe  $Ox$ , de section d'aire constante  $s$  (voir la figure 4.1), telle que la dimension linéaire caractéristique de cette section soit très petite par rapport à la longueur  $L$ .

La corde est supposée être composée d'un matériau de masse volumique uniforme, et sans raideur, c.-à.-d. qui ne résiste pas à la déformation. Cette dernière hypothèse assure que la direction de la force de tension en un point de la corde est donnée par la droite tangente à la corde en ce point.<sup>1</sup>

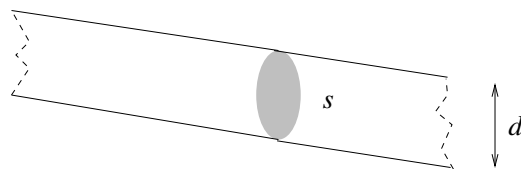


FIG. 4.1 – Description de la corde.

---

1. Dans le cas contraire, la composante perpendiculaire de la force de tension signifierait la réaction de l'élément de corde où s'applique la force à la déformation.

La corde est caractérisée par sa *masse linéique*  $\mu$ , c.-à.-d. par unité de longueur:

$$\boxed{\mu = \frac{M}{L}} \quad (4.1.1)$$

où  $M$  est la masse totale de la corde. La masse linéique peut s'exprimer aussi en fonction de la masse volumique  $\rho$ . La masse totale de la corde est donnée par

$$M = \rho L s \quad (4.1.2)$$

en termes de la surface d'une section de la corde  $s$ . Nous avons alors

$$\mu = \rho s \quad (4.1.3)$$

dans le cas d'une corde cylindrique de diamètre  $d$ , la surface de la section est simplement  $s = \frac{\pi}{4} d^2$ .

### 4.1.2 Dynamique de la corde

L'équation du mouvement de la corde vibrante est obtenue en appliquant judicieusement le principe fondamental de la dynamique (abrégé en PFD). La corde étant considérée comme fixée à ses extrémités, elle ne subit pas de mouvement d'ensemble. Il faut alors « découper » le système en un ensemble de sous-systèmes qui pourront se déplacer les uns par rapport aux autres.

On considère alors le système constitué d'un élément de corde infinitésimal, de longueur  $\delta\ell$ , très petite devant les échelles caractéristiques du problème, en particulier par rapport à la longueur totale de la corde  $L$ . La projection des deux extrémités de cet élément de corde sur l'axe  $Ox$  correspond aux abscisses  $x$  et  $x + \delta x$  respectivement. La masse de ce système est alors  $\delta M = \mu \delta\ell$ .

On fait l'hypothèse, qui sera développée plus bas, que le mouvement de la corde est *uniquement* transverse, sans composante longitudinale, c.-à.-d. parallèle à l'axe de la corde au repos  $Ox$ .

Le déplacement transverse de la corde est considéré comme confiné dans le plan  $(x, y)$ , ce qui revient à choisir en conséquence les conditions initiales de la corde dans ce même plan (sans composante selon  $Oz$ ).

Ce déplacement est alors donné par une fonction<sup>2</sup>  $y(x, t)$ . La corde au repos est considérée comme alignée selon l'axe  $Ox$ , soit  $y(x, t) = 0 \forall x, t$ , voir fig. 4.2; nous négligeons donc l'influence de la force de pesanteur.

La force entrant en jeu dans la dynamique du système est la *tension* de la corde, notée  $\vec{T}$ , qui est définie localement en tout point de la corde.

### Approximation des petits angles

On fera par la suite l'hypothèse des petits déplacements de la cordes par rapport à sa position d'équilibre. De manière quantitative, cela revient à dire que l'angle  $\alpha(x)$

<sup>2</sup>. Cela suppose que la corde ne fait pas de boucles, ce qui est raisonnable pour une corde bien tendue!

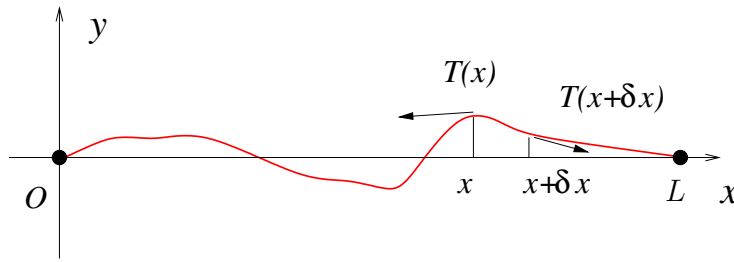


FIG. 4.2 – Corde vibrante.

que fait la tension  $\vec{T}$  en tout point la corde par rapport à l'axe  $Ox$ , exprimé en radians, est infinitésimal :

$$|\alpha(x,t)| = \left| \arctan \left( \frac{T_y(x,t)}{T_x(x,t)} \right) \right| \ll 1 \quad \forall x \in [0,L], \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (4.1.4)$$

On peut alors considérer la portion de corde comme un segment dont les extrémités ont pour coordonnées  $(x, y(x,t))$  et  $(x + \delta x, y(x + \delta x, t))$ . La masse de la portion de corde est alors donnée au premier ordre en  $\delta x$  par

$$\delta M \simeq \mu \delta x. \quad (4.1.5)$$

### Principe fondamental de la dynamique

Appliquons maintenant le principe fondamental de la dynamique au segment de corde considéré (voir fig. 4.3), dans le référentiel attaché au support de la corde, supposé galiléen.

Les forces s'appliquant au système sont uniquement les forces de tension, si nous négligeons le poids ainsi que les diverses forces de frottement. On a alors :

$$\boxed{\mu \delta x \vec{a}(x,t) = \vec{T}(x) + \vec{T}(x + \delta x)} \quad (4.1.6)$$

où la force  $\vec{T}(x)$  (resp.  $\vec{T}(x + \delta x)$ ) est la force exercée à l'extrémité gauche (resp. droite) du segment de corde considéré. On utilisera par la suite la notation  $T(\vec{x}, t) = \|\vec{T}(\vec{x}, t)\|$  pour le module de la tension. Dans l'hypothèse d'une corde sans raideur, la tension est tangente à la corde en tout point.

Pour de faibles perturbations, le déplacement est supposé transverse. L'accélération  $\vec{a}(x,t)$  de l'élément de corde ne comporte alors pas de composante selon  $\vec{e}_x$  et est donnée par

$$\vec{a}(x,t) = \ddot{y}(x,t) \vec{e}_y, \quad (4.1.7)$$

au premier ordre en  $\delta x$  (c.-à.-d. en assimilant l'élément de corde à un segment, dont les constituants se déplacent à une vitesse identique en tout point).

La somme des forces de tension appliquées au segment s'écrit (voir la figure 4.3 pour les conventions sur les angles):

$$\begin{aligned} \vec{T}(x) + \vec{T}(x + \delta x) &= \left( T(x + \delta x, t) \cos[\alpha(x + \delta x)] - T(x, t) \cos[\alpha(x)] \right) \vec{e}_x \\ &+ \left( T(x + \delta x, t) \sin[\alpha(x + \delta x)] - T(x, t) \sin[\alpha(x)] \right) \vec{e}_y \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

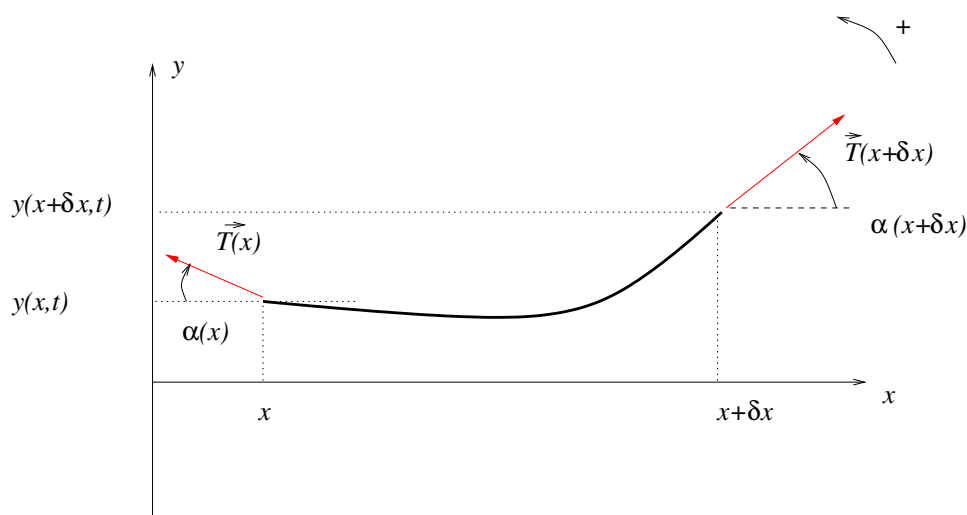


FIG. 4.3 – Principe fondamental de la dynamique pour un segment infinitésimal de corde vibrante. Les angles sont orientés par rapport au sens trigonométrique ; sur la figure  $\alpha(x) < 0$  et  $\alpha(x + \delta x) > 0$  (les angles sont très exagérés pour une plus grande clarté de la figure).

En utilisant l'hypothèse des petits angles, nous avons les développements limités suivants:

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = \tan \alpha(x, t) \simeq \alpha(x, t) \simeq \sin \alpha(x, t) \quad (4.1.9a)$$

$$\frac{\partial y(x + \delta x, t)}{\partial x} = \tan \alpha(x + \delta x, t) \simeq \alpha(x + \delta x, t) \simeq \sin \alpha(x + \delta x, t) \quad (4.1.9b)$$

ainsi que

$$\cos \alpha(x, t) \simeq 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right)^2 \quad (4.1.10a)$$

$$\cos \alpha(x + \delta x, t) \simeq 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial y(x + \delta x, t)}{\partial x} \right)^2 \quad (4.1.10b)$$

La projection de l'équation (4.1.6) sur l'axe  $Ox$  donne au premier ordre en  $\delta x$  et en  $\partial y / \partial x$  (approximation des petits angles)

$$0 = T(x + \delta x, t) - T(x, t) = \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \delta x \quad (4.1.11)$$

Nous obtenons donc que, dans l'hypothèse du déplacement transverse de la corde, le module de la tension est constant le long de la corde, soit

$$\|\vec{T}(x, t)\| = T(x, t) = T \quad \forall x \in [0, L] \text{ et } \forall t \in \mathbb{R} \quad (4.1.12)$$

Il suffira donc de connaître sa valeur à une extrémité de la corde.

### Corde tendue par une masse

Un moyen possible de tendre une corde est d'y suspendre un poids de masse  $m$ , voir fig. 4.4. Le module de la tension de la corde à son extrémité est alors donné par

$$T = mg \quad (4.1.13)$$

où  $g$  est l'accélération due à la pesanteur. En vertu du résultat précédent, le module de la tension est égal à cette valeur *en tout point de la corde*.

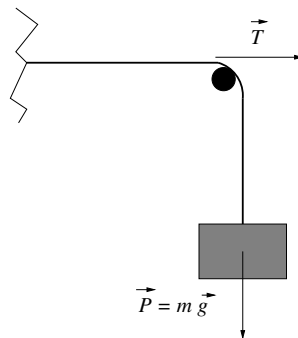


FIG. 4.4 – Corde tendue par une masse.

### Équation d'onde pour la corde

La projection de l'équation (4.1.6) sur l'axe  $Oy$  donne, en utilisant le fait que le module de la tension est constant

$$\mu \delta x \ddot{y}(x,t) = T \left\{ \sin[\alpha(x + \delta x)] - \sin[\alpha(x)] \right\} \simeq T \left[ \frac{\partial y(x + \delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right] \quad (4.1.14)$$

Nous pouvons faire finalement un développement de Taylor du premier ordre du membre de droite

$$\frac{\partial y(x + \delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \delta x + \mathcal{O}(\delta x^2) \quad (4.1.15)$$

Nous obtenons donc, en simplifiant par  $\delta x$  (ce qui est possible car tous les termes sont du premier ordre en  $\delta x$ )

$$\boxed{\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}} \quad (4.1.16)$$

L'équation (4.1.16) n'est rien d'autre que l'équation d'onde à une dimension (2.1.1).

Les ondes considérées dans le problème des cordes vibrantes sont des *ondes transverses*, comme la perturbation correspondant à l'onde, donnée par la fonction  $y(x, t)$ , est transverse à la direction de propagation (qui coïncide avec l'axe  $Ox$ ).

### 4.1.3 Célérité de l'onde

En comparant l'équation précédente avec l'équation d'onde générique (2.1.1), nous pouvons identifier la célérité des ondes transverses sur une corde vibrante :

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (4.1.17)$$

La tension s'exprime en Newtons, soit en  $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$  et la masse linéique en  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$ . La célérité est donc bien exprimée en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$  comme il se doit. Nous observons que la célérité des ondes sur la cordes est d'autant plus grande que la corde est tendue et qu'elle de faible masse linéique.

Pour donner un ordre de grandeur, considérons une corde en acier de diamètre  $d = 1,0 \text{ mm}$ . Premièrement, l'aire de la section de corde est

$$s = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 7,9 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \quad (4.1.18)$$

La masse volumique de l'acier étant de  $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$  on trouve la masse linéique

$$\mu = \rho s = 6,1 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \quad (4.1.19)$$

Cette corde est tendue en y suspendant une masse de  $5,0 \text{ kg}$ . La tension correspondante est de

$$T = mg = 5,0 \times 9,8 = 49 \text{ N} \quad (4.1.20)$$

On trouve finalement la célérité des ondes sur cette corde

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{49}{6,1 \cdot 10^{-3}}} = 90 \text{ m s}^{-1} \quad (4.1.21)$$

## 4.2 Conditions aux limites

L'équation d'onde (4.1.16) gouverne la dynamique en tout point de la corde vibrante. Nous n'avons cependant encore rien dit des *conditions aux limites* aux extrémités de la corde, en  $x = 0$  et  $x = L$ . Celles-ci doivent être spécifiées pour que le problème mathématique soit bien posé. Physiquement, il faut définir ce qui \*arrive\* à une onde se propageant sur la corde lorsqu'elle en atteint une des extrémités.

Nous supposons que la corde est fixée aux deux extrémités, de telle manière que son déplacement transverse soit impossible :

$$y(0,t) = 0 \quad , \quad y(L,t) = 0 \quad \forall t \quad (4.2.1)$$

De telles conditions aux limites sont appelées *conditions de Dirichlet*. Elles sont naturelles dans ce problème physique.

Cherchons maintenant quelles restrictions aux solutions de l'équation d'onde sont dictées par les conditions aux limites (4.2.1). Une solution générale de l'équation s'écrit comme nous l'avons montré

$$y(x,t) = y_-(x-ct) + y_+(x+ct) \quad (4.2.2)$$

Les conditions aux limites (4.2.1) imposent alors les relations fonctionnelles suivantes, aux points  $x = 0$  et  $x = L$  :

$$y(0,t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_-(-ct) = -y_+(ct), \quad (4.2.3a)$$

$$y(L,t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_-(L-ct) = -y_+(L+ct). \quad (4.2.3b)$$

Ces relations doivent être vérifiées à tout instant  $t$ .

En combinant les relations (4.2.3a,4.2.3b), nous obtenons que les fonctions  $y_{\pm}$  doivent être périodiques de période  $2L$ , car elles vérifient:

$$y_{\pm}(u+2L) = y_{\pm}(L+(u+L)) = -y_{\mp}(L-(u+L)) = y_{\mp}(-u) = y_{\pm}(u) \quad \forall u \in \mathbb{R} \quad (4.2.4)$$

Il est donc naturel de développer les deux fonctions  $y_{\pm}$  de la solution en série de Fourier.

### 4.2.1 Fréquences propres

Pour analyser le problème d'une manière légèrement différente, nous cherchons une solution de l'équation d'onde de type sinusoïdal, voir l'éq. (2.5.1). En utilisant la notation complexe, nous cherchons des solutions  $\tilde{y}(x,t)$  de la forme

$$\tilde{y}(x,t) = \tilde{\mathcal{A}}_- e^{i(\omega t - kx)} + \tilde{\mathcal{A}}_+ e^{i(\omega t + kx)} \quad (4.2.5)$$

où la pulsation  $\omega$  et le module du nombre d'onde  $k$  sont reliés par la relation de dispersion (2.5.3), faisant intervenir la célérité donnée par l'éq. (4.1.17).

Les conditions aux limites (4.2.3) imposent alors les relations algébriques suivantes:

$$\tilde{\mathcal{A}}_+ e^{i\omega t} = -\tilde{\mathcal{A}}_- e^{i\omega t} \quad \forall t \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\tilde{\mathcal{A}}_+ = -\tilde{\mathcal{A}}_-} \quad (4.2.6a)$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_+ e^{i(\omega t + kL)} = -\tilde{\mathcal{A}}_- e^{i(\omega t - kL)} \quad \forall t \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\tilde{\mathcal{A}}_+ e^{ikL} = -\tilde{\mathcal{A}}_- e^{-ikL}} \quad (4.2.6b)$$

La relation (4.2.6a) impose à l'onde sinusoïdale complexe d'être de la forme

$$y(\tilde{x},t) = \tilde{\mathcal{A}} [e^{i(\omega t + kx)} - e^{i(\omega t - kx)}] = 2i\tilde{\mathcal{A}} e^{i\omega t} \sin(kx) \quad (4.2.7)$$

où on a posé  $\tilde{\mathcal{A}} = \tilde{\mathcal{A}}_+$ .

Cette fonction s'annule évidemment en  $x = 0$  comme prévu. On observe que la dépendance en  $x$  et la dépendance en  $t$  de cette solution sont factorisées. Il s'agit donc d'un exemple d'*onde stationnaire* (voir la section 3.2 du chapitre précédent). Notons qu'une seule des deux conditions aux limites est nécessaire pour aboutir à cette conclusion.

La deuxième relation, éq. (4.2.6b), impose quand à elle une condition sur le nombre d'onde  $k$ . En effet, en exprimant  $\tilde{\mathcal{A}}_-$  en fonction de  $\tilde{\mathcal{A}}_+$  à l'aide de (4.2.6a) nous trouvons :

$$e^{2ikL} = 1 \iff \boxed{\sin(kL) = 0} \quad (4.2.8)$$

Nous en déduisons que les seules ondes qui peuvent exister sur la corde en régime stationnaire ont un nombre d'onde bien déterminé. Il est quantifié selon

$$k_n = \frac{\pi n}{L} \quad , \quad n \in \mathbb{N} \quad (4.2.9)$$

Chaque valeur de  $n$  spécifie un nombre d'onde propre de la corde, correspondant à une longueur d'onde (pour  $n \neq 0$ )

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n} \quad (4.2.10)$$

La plus grande longueur d'onde possible est  $2L$  ce qui est compatible avec la périodicité (4.2.4) trouvée plus haut.

Il est plus commun de parler des *fréquences propres* de la corde vibrante, obtenues en utilisant la relation de dispersion (2.5.3) :

$$\boxed{\nu_n = \frac{nc}{2L} \quad , \quad n \in \mathbb{N}} \quad (4.2.11)$$

Finalement, en décomposant l'amplitude complexe d'une solution pour un entier  $n$  donné en module et argument suivant la forme commode

$$\tilde{\mathcal{A}}_n = -\frac{1}{2} \mathcal{C}_n e^{i\phi_n} \quad , \quad (4.2.12)$$

une solution sinusoïdale de fréquence  $\nu_n$  s'écrit comme:

$$y_n(x,t) = \text{Re} \left[ 2i \tilde{\mathcal{A}}_n e^{i\omega_n t} \sin(k_n x) \right] = \mathcal{C}_n \sin(\omega_n t + \phi_n) \sin(k_n x) \quad (4.2.13)$$

## Modes propres

Une telle solution est appelé un *mode propre* de la corde vibrante, correspondant à la fréquence propre  $\nu_n$ . Il s'agit d'une onde stationnaire telle que les points  $x = 0$  et  $x = L$  soient des nœuds de vibration.

Les positions des nœuds et des ventres du mode propre associé à la fréquence propre  $\nu_n$  sont (voir fig. 3.1) :

- les *nœuds* de la corde sont tels que  $y_n(x,t) = 0 \forall t$ . D'après l'éq. (4.2.13) ils se situent en

$$\sin(k_n x_a) = 0 \implies x_a = \frac{a}{n} L \quad , \quad a = 0, \dots, n \quad (4.2.14)$$

Naturellement, les deux extrémités de la corde en  $x = 0$ , et  $x = L$  sont toujours des nœuds car la corde est attachée en ces points ;

- Les *ventres* de la corde sont obtenus pour

$$|\sin(k_n x_b)| = 1 \implies x_b = \frac{b + \frac{1}{2}}{n} L \quad , \quad b = 0, \dots, n-1 \quad (4.2.15)$$



## Solution générale pour la corde vibrante

La solution générale de l'équation d'onde sur la corde vibrante de longueur  $L$ , fixée aux deux extrémités, s'obtient comme une superposition générale de tous les modes propres (4.2.13) associés :

$$y(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}_n \sin(\omega_n t + \phi_n) \sin(k_n x) \quad (4.2.16)$$

Ce développement ressemble à un développement en série de Fourier. Les coefficients  $\mathcal{C}_n$  sont donnés par les conditions initiales du problème, par exemple en  $t = 0$ .

Plus précisément, les coefficients du développement en série de Fourier de la fonction  $F(x) = y(x, t = 0)$  sont donnés par  $\{\mathcal{C}_n \sin \phi_n, n = 0, \dots, +\infty\}$  et les coefficients du développement de la fonction  $G(x) = \partial_t y(x, t)|_{t=0}$  par  $\{\omega_n \mathcal{C}_n \cos \phi_n, n = 0, \dots, +\infty\}$ .

Ainsi il faut développer en série de Fourier à la fois la fonction correspondant au profil initial de la corde, et la fonction donnant la distribution initiale de vitesse aux différents points de la corde, afin de spécifier complètement la forme de l'onde stationnaire. Dans les cas les plus courants, la corde est initialement au repos, ce qui implique que  $\phi_n \equiv 0 [\pi], \forall n = 0, \dots, +\infty$ .

### 4.2.2 Harmoniques

Il est utile, en particulier dans le domaine du son musical, d'introduire la notion d'harmoniques pour classifier les différents modes de vibration (voir fig. 4.5). D'après

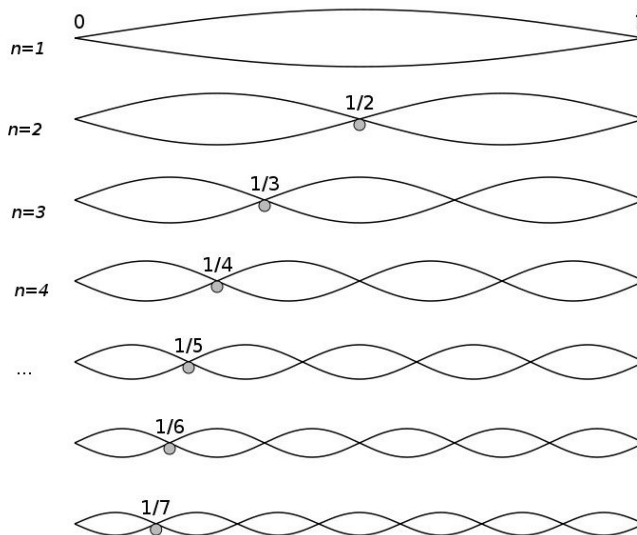


FIG. 4.5 – Harmoniques de la corde vibrante.

cette terminologie, les solutions (4.2.13) sont appelées

- *mode fondamentale*, ou premier harmonique, pour  $n = 1$ , soit  $\lambda = 2L$  ou  $\nu_1 = c/2L$ . Il s'agit de la plus petite fréquence non nulle possible sur la corde fixée aux

deux extrémités, donc du son le plus grave possible sur cette corde en régime stationnaire. Ce mode comporte deux nœuds en  $x = 0, L$  et un seul ventre en  $x = L/2$ ;

- *deuxième harmonique* pour  $n = 2$ , soit  $\lambda = L$ . Sa fréquence est  $\nu_2 = 2\nu_1$ . Ce mode comporte trois nœuds en  $x = 0, L/2, L$  et deux ventres en  $x = L/4, 3L/4$ ;
- *troisième harmonique* pour  $n = 3$ , soit  $\lambda = 2L/3$ . Sa fréquence est  $\nu_3 = 3\nu_1$ . Ce mode comporte quatre nœuds en  $x = 0, L/3, 2L/3, L$  et trois ventres en  $x = L/6, L/2, 5L/6$ ;
- ...

### Cordes vibrantes et musique

L'étude des modes de vibration d'une corde a permis dans l'histoire de développer des théories mathématiques régissant les intervalles des gammes musicales, c.-à.-d. les rapports entre les fréquences des notes. En voici quelques exemples.

- Pour une note donnée par le mode fondamental de la corde (par exemple un do1), le deuxième harmonique correspond à l'intervalle d'une octave (le do2), définissant l'*ambitus* de la gamme. La relation entre les fréquences associées est  $\nu_2 = 2\nu_1$ ,  $\nu_1$  étant la fréquence du do1 (fondamental).

- Le troisième harmonique correspond à une octave additionnée d'une *quinte* (le sol2). Sa fréquence est donnée par  $\nu_3 = 3\nu_1$ . En descendant le sol2 d'une octave (c.-à.-d. en divisant sa fréquence par 2, donnant le sol1), on obtient un intervalle de quinte (do1-sol1) appelé *quinte pythagoricienne*. Le rapport des fréquences de ces deux notes est de  $3/2$ .

La succession d'intervalles de quinte, en partant du do1 : do1 → sol1 → re2 → la2, ... permet de construire une gamme majeure, dite gamme pythagoricienne, car proposée par l'école des Pythagoriciens dans l'antiquité.

- Un autre type de gamme, la gamme *naturelle* de Zarlino (XVIe siècle), utilise exclusivement les intervalles issus des différents harmoniques d'ordres supérieurs, à partir de la note constituant le point de départ de la gamme (appelée *tonique*), le do1 dans notre exemple. Ainsi le re1 est obtenu à partir du neuvième harmonique du do1 (le re3), descendu de deux octaves, le mi1 correspond au cinquième harmonique (mi2) descendu de deux octaves, et ainsi de suite.

- Dans la musique occidentale moderne, la gamme utilisée, dite *tempérée*, n'utilise pas les intervalles harmoniques, à l'exception de l'octave. L'octave est alors divisé en 12 intervalles égaux appelés demi-tons. Le rapport des fréquences de deux notes séparées par un octave étant  $\nu_2/\nu_1 = 2$ , le rapport des fréquences de deux notes séparées par un demi-ton est de  $2^{1/12}$ .

La quinte correspond alors à un intervalle de sept demi-tons, qui est légèrement plus petit que la quinte pythagoricienne (comme  $2^{7/12} \simeq 1,498 < 3/2$ ). Les différences entre ces deux gammes persistent pour tous les autres intervalles (quarte, tierce, seconde...).

- Les intervalles « naturels » issus des harmoniques continuent cependant de jouer un rôle important dans les musiques non-européennes (musiques arabe, indienne,...).

## Analyse spectrale

L'analyse spectrale d'une onde, plus particulièrement d'un son musical, consiste à étudier la proportion relative des différents harmoniques dans le son émis. Pour une corde vibrante, dont la solution générale est donnée par (4.2.16), cela revient à tracer l'amplitude réelle  $\mathcal{C}_n$  des différents harmoniques en fonction de  $n$ .

Lorsque la corde vibre librement, le spectre ne dépend comme nous l'avons vu que des conditions initiales imposées à  $t = 0$ . Pour obtenir un son *pur*, composé uniquement du mode fondamental, il faut choisir les conditions initiales suivantes (difficiles à obtenir!) :

$$y(x, t = 0) = A \sin(\pi x / L). \quad (4.2.17)$$

nous avons alors  $\mathcal{C}_1 = A$  et  $\mathcal{C}_n = 0, \forall n > 1$ .

Un cas plus réaliste correspond à une corde pincée, par exemple sur une guitare (voir figure 4.6). Si la corde est pincée en son milieu, nous avons les conditions initiales

$$\begin{aligned} y(x, t = 0) &= Ax, & 0 < x < L/2 \\ y(x, t = 0) &= A(L - x), & L/2 < x < L \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

ainsi que  $\partial y / \partial t|_{x, t=0} = 0$ , voir figure 4.6. En décomposant en série de Fourier la

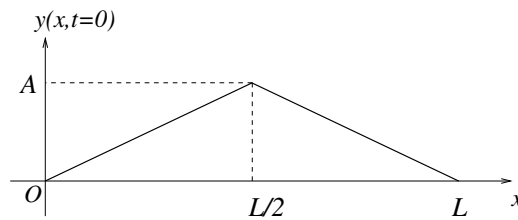


FIG. 4.6 – Corde pincée.

fonction  $y(x, t = 0)$ , on trouve qu'une infinité d'harmoniques sont excitées. Le calcul explicite est laissé en exercice. On obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_n &= \frac{4AL}{\pi^2 n^2} \text{ pour } n \text{ impair} \\ \mathcal{C}_n &= 0 \text{ pour } n \text{ pair} \end{aligned}$$

et  $\phi_n = 0 \forall n$ . On voit que le spectre contient tous les harmoniques impairs (mais pas les harmoniques pairs) avec une amplitude décroissant comme  $1/n^2$ , voir la figure 4.7.

Dans la réalité, la corde vibrante d'un instrument de musique est couplée à une caisse de résonance. Cette dernière amplifie sélectivement certaines harmoniques au détriment d'autres, modifiant le spectre obtenu. Nous obtenons ainsi le *timbre* spécifique de l'instrument. Le timbre est caractérisé par les proportions relatives des différentes harmoniques pour une note donnée. Si le timbre est bien équilibré, ces proportions sont semblables pour toutes les notes accessibles à l'instrument.

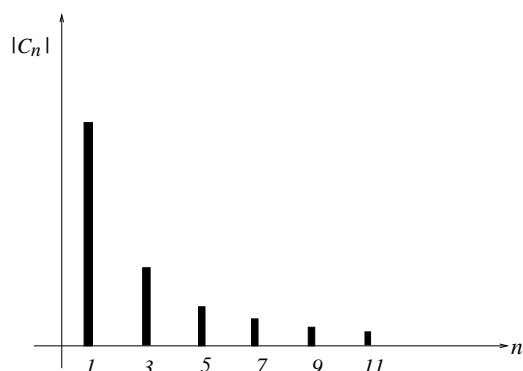


FIG. 4.7 – Spectre de la corde pincée.

### 4.2.3 Résonance

Il est possible de faire vibrer, à une certaine fréquence  $\nu_e$ , une des extrémités de la corde par un dispositif mécanique. Lorsque cette fréquence est égale à une des fréquences propres du système  $\nu_n$ , il se produit alors le phénomène de *résonance*. Ce mode propre est alors spécifiquement excité de manière continue, et son amplitude devient importante.

Le dispositif expérimental associé est appelé *corde de Melde*. Il est étudié en travaux dirigés.

## 4.3 Considérations énergétiques

Une onde sur une corde vibrante contient une certaine énergie mécanique. Cette énergie n'étant a priori pas répartie uniformément le long de la corde, il est naturel de considérer la *densité linéique d'énergie mécanique* de l'onde par unité de longueur, associée à un élément infinitésimal de la corde situé autour d'un point  $x \in ]0, L[$ .

Cette densité d'énergie se compose d'une densité d'énergie cinétique et d'une densité d'énergie potentielle. En l'absence de dissipation – ce que nous avons supposé ici, ne prenant pas en compte par exemple les forces de frottement fluide – l'énergie mécanique totale de la corde est *conservée* au cours du temps.

Cette conservation de l'énergie s'appliquera dès que la dynamique du système sera régie par l'équation d'onde (2.1.1), qui ne contient pas de terme de dissipation. Par contre la densité d'énergie peut varier avec le temps car il peut exister un courant d'énergie mécanique entre les segments infinitésimaux voisins de la corde.

### 4.3.1 Énergie cinétique

La *densité linéique d'énergie cinétique* est aisée à obtenir. Dans l'hypothèse des petits déplacements considérons l'énergie cinétique d'une fraction infinitésimale de la corde de longueur  $d\ell$ , dont la projection sur l'axe  $Ox$  est de longueur  $dx$  avec  $dx \simeq d\ell$  au premier ordre en  $dx$ . Dans cette approximation du premier ordre, la vitesse de

l'élément de corde peut être considérée comme uniforme. Elle est donnée par

$$v(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \quad (4.3.1)$$

La masse de cet élément de corde étant  $\delta M = \mu dx$ , nous avons alors l'énergie cinétique :

$$\delta E_c = \frac{1}{2} \delta M v(x,t)^2 = \frac{1}{2} \mu dx \left( \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right)^2 \quad (4.3.2)$$

La densité linéique d'énergie cinétique s'obtient en divisant ce résultat par la longueur de l'élément de corde infinitésimal. Nous avons alors:

$$\boxed{e_c(x,t) = \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right)^2} \quad (4.3.3)$$

L'énergie cinétique totale contenue dans la corde vibrante est alors, en supposant la masse linéique constante :

$$E_c(t) = \int \delta E_c(x,t) = \int_0^L e_c(x,t) dx = \frac{\mu}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx \quad (4.3.4)$$

### 4.3.2 Énergie potentielle élastique

Cherchons maintenant l'expression de la densité linéique d'énergie potentielle élastique. Nous allons pour cela calculer le travail associé à l'allongement de la corde.

La longueur de la corde au repos est donnée par  $L$  par définition. Lorsque la corde est parcourue par une onde, sa forme à un instant donné est décrite par la fonction  $y(x,t)$ . Sa longueur totale va alors nécessairement changer. Elle se calcule de la manière suivante.

Un déplacement infinitésimal le long de la corde, d'une quantité  $dx$  selon l'axe  $Ox$ , s'accompagne d'un déplacement selon l'axe  $Oy$  d'une valeur  $(\partial y(x,t)/\partial x)dx$ , au premier ordre en  $dx$ .

La longueur du segment infinitésimal correspondant est alors, d'après le théorème de Pythagore (voir fig. 4.8) :

$$d\ell = \sqrt{1 + (\partial y(x,t)/\partial x)^2} dx, \quad (4.3.5)$$

La longueur complète de la corde à l'instant  $t$  est alors obtenue comme

$$\mathcal{L}(t) = \int_0^L dx \sqrt{1 + \left( \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right)^2} \quad (4.3.6)$$

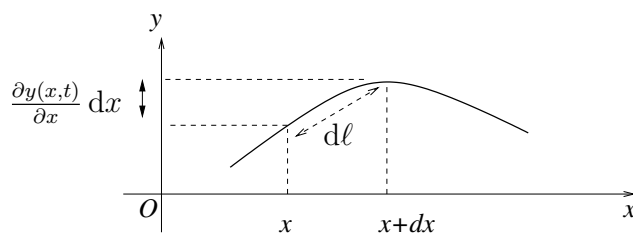


FIG. 4.8 – Allongement infinitésimal de la corde.

Dans l'approximation des petits angles on peut développer ce résultat selon

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(t) &\simeq \int_0^L dx \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right) \\
 &\simeq L + \frac{1}{2} \int_0^L dx \left( \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right)^2 \\
 &\equiv L + \delta\mathcal{L}
 \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

L'allongement de la corde  $\delta\mathcal{L}$  défini à la dernière ligne est responsable d'un travail mécanique pour les forces de tension. donné par

$$W = -T\delta\mathcal{L} \tag{4.3.8}$$

Le travail étant égal à l'opposé de la variation d'énergie potentielle nous avons, à une constante additive près

$$E_p(t) = T\delta\mathcal{L}(t) \tag{4.3.9}$$

La densité d'énergie potentielle est alors donnée par l'intégrande de cette expression

$$\boxed{e_p(x,t) = \frac{T}{2} \left( \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right)^2} \tag{4.3.10}$$

### 4.3.3 Énergie mécanique

La densité linéique d'énergie mécanique est obtenue comme la somme de la densité d'énergie cinétique et de la densité d'énergie potentielle :

$$\boxed{e_m(x,t) = e_c(x,t) + e_p(x,t) = \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{T}{2} \left( \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right)^2} \tag{4.3.11}$$

L'énergie mécanique totale s'obtient alors comme

$$\begin{aligned}
 E_m &= \int_0^L e_m(x,t) dx = \int_0^L dx \left[ \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{T}{2} \left( \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right] \\
 &= \frac{T}{2} \int_0^L dx \left[ \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right]
 \end{aligned} \tag{4.3.12}$$

Cette énergie est bien conservée. En effet nous avons

$$\begin{aligned}\frac{dE_m}{dt} &= \frac{T}{2} \int_0^L dx \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right] \\ &= T \int_0^L dx \left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \right]\end{aligned}\quad (4.3.13)$$

Effectuons maintenant une intégration par parties du second membre. On obtient alors

$$\frac{dE_m}{dt} = T \int_0^L dx \frac{\partial y}{\partial t} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + T \left[ \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} \right]_0^L = 0 \quad (4.3.14)$$

En effet, le premier terme s'annule grâce à l'équation d'onde (2.1.1) et le second en raison des conditions aux limites (4.2.1) aux extrémités de la corde.

#### 4.3.4 Équation locale de conservation

Nous pouvons aussi obtenir une forme locale de l'équation de conservation de l'énergie. Nous prenons comme point de départ

$$\frac{\partial e_m(x,t)}{\partial t} = T \left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} \right] \quad (4.3.15)$$

En utilisant l'équation d'onde (2.1.1) nous pouvons réécrire cette équation comme

$$\boxed{\frac{\partial e_m(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial j_m(x,t)}{\partial x}} \quad (4.3.16)$$

où nous avons défini un *courant d'énergie mécanique*

$$\boxed{j_m(x,t) = -T \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \frac{\partial y(x,t)}{\partial t}} \quad (4.3.17)$$

qui représente la différence entre l'énergie entrante et l'énergie sortante par unité de temps, pour l'élément de corde infinitésimal.

Son équation aux dimensions donne ( $T$  étant une force)

$$[j_m] = \frac{ML}{T^2} \times \frac{L}{L} \times \frac{L}{T} = \frac{ML^2}{T^3} \quad (4.3.18)$$

il s'agit donc d'une énergie divisée par un temps, soit d'une *puissance*.

L'élément de corde infinitésimal considéré n'étant pas un système fermé, son énergie n'est pas constante, mais la variation de son énergie doit être donnée par la différence des énergies entrant aux deux extrémités ; c'est précisément la signification de l'équation (4.3.16), qui apparaît dans nombre de problèmes physiques non dissipatifs.

### 4.3.5 Densité d'énergie dans une onde stationnaire

Considérons maintenant les expressions prises par l'énergie mécanique et le courant d'énergie pour une onde stationnaire sinusoïdale, de la forme

$$y(x,t) = A \cos \omega_n t \sin k_n x, \quad (4.3.19)$$

composée d'un seul mode de vibration. On s'intéresse à la valeur moyenne sur une période temporelle des différentes quantités, définie par

$$\langle f \rangle_T(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x,t) dt \quad (4.3.20)$$

Rappelons tout d'abord que (*formules à connaître impérativement!*)

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \left( \frac{2\pi t}{T} \right) dt = \frac{1}{2} \quad (4.3.21a)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \left( \frac{2\pi t}{T} \right) dt = \frac{1}{2} \quad (4.3.21b)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos \left( \frac{2\pi t}{T} \right) \sin \left( \frac{2\pi t}{T} \right) dt = 0 \quad (4.3.21c)$$

En appliquant ces formules pour la densité d'énergie mécanique, nous avons premièrement :

$$\begin{aligned} e_m(x,t) &= \frac{T}{2} \left[ \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right] \\ &= \frac{T A^2}{2} \left[ \frac{\omega_n^2}{c^2} \sin^2(\omega_n t) \sin^2(k_n x) + k_n^2 \cos^2(\omega_n t) \cos^2(k_n x) \right] \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

Calculons maintenant la valeur moyenne dans le temps. On obtient

$$\langle e_m \rangle_T(x) = \frac{T A^2}{4} \left[ \frac{\omega_n^2}{c^2} \sin^2(k_n x) + k_n^2 \cos^2(k_n x) \right] = \frac{T A^2 k_n^2}{2} \quad (4.3.23)$$

Nous observons que la densité d'énergie mécanique moyenne est indépendante de la position  $x$ . À un ventre de l'onde, cette densité d'énergie est uniquement sous forme d'énergie cinétique (car alors  $\cos k_n x = 0$ ) alors qu'à un nœud elle est uniquement sous forme d'énergie potentielle (car  $\sin k_n x = 0$ ).

Il est aussi intéressant de calculer la valeur moyenne du courant d'énergie mécanique. Ce dernier est donné par :

$$j_m(x,t) = -T \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = T A^2 \omega_n k_n \cos(\omega_n t) \sin(\omega_n t) \sin(k_n x) \cos(k_n x) \quad (4.3.24)$$

On obtient donc que

$$\langle j_m \rangle_T(x) = \frac{T A^2 \omega_n^2}{c} \langle \cos(\omega_n t) \sin(\omega_n t) \rangle_T \sin(k_n x) \cos(k_n x) = 0 \quad (4.3.25)$$



La valeur moyenne du courant d'énergie est donc nulle.

Ces résultats se généralisent à la solution générale (4.2.16) pour l'onde stationnaire sur la corde vibrante. On obtient que la valeur moyenne dans le temps de la densité d'énergie mécanique est constante le long de la corde, et égale à la somme des densités d'énergie correspondant aux différents modes :

$$\langle e_m \rangle_T = \frac{T}{2} \sum_{n=0}^{\infty} k_n^2 C_n^2 \quad (4.3.26)$$

Remarquons que les différents modes contribuent de manière additive à cette expression.

## 4.4 Interfaces

Jusqu'à maintenant nous avons considéré que la corde est constituée d'un seul matériau, et de section constante. Ainsi, comme les propriétés de la corde vibrante sont les mêmes en chaque point, une onde progressive peut se propager continûment d'une extrémité à l'autre de la corde. S'il se produit un changement des caractéristiques de la corde en un point donné, on s'attend à une discontinuité de l'onde en ce point.

Considérons la jonction de deux cordes de masse linéique différente, attachées en un point où le mouvement est libre. On choisit les coordonnées telles que la corde de masse linéique  $\mu_1$  soit située en  $x < 0$  et la corde de masse linéique  $\mu_2$  soit située en  $x > 0$ , voir figure 4.9.

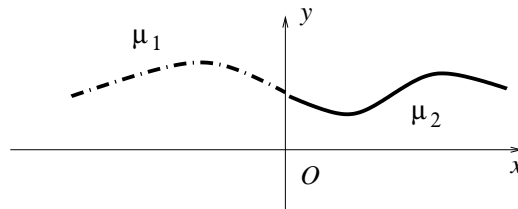


FIG. 4.9 – Jonction de deux cordes vibrantes.

Sur chaque demi-corde, nous avons vu que le module de la tension était le même en tout point. Qu'en est-il à la jonction des deux cordes?

Dans le cadre des approximations effectuées jusqu'à maintenant, la jonction est d'épaisseur négligeable donc sa masse peut être considérée comme nulle. La somme des forces qui s'y applique doit être nulle, en appliquant le principe fondamental de la dynamique. On en déduit le principe de *continuité de la tension*.

Il implique tout d'abord que les modules des tensions de part et d'autre de l'interface sont identiques. On appellera cette tension  $T$ .

On considère qu'une onde progressive, pas nécessairement sinusoidale, est émise sur la première corde, c.-à.-d. à partir d'une certaine position  $x_0 < 0$  (en deça de la zone étudiée), se propageant vers les  $x$  croissants. Elle s'écrit

$$y_i(x,t) = f_i(t - x/c_1) \quad , \quad x < 0 \quad (4.4.1)$$

Nous l'appellerons *onde incidente*. La célérité des ondes transverse sur la corde est, pour  $x < 0$

$$c_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}} \quad (4.4.2)$$

en fonction de la masse linéique  $\mu_1$  de la demi-corde située en  $x < 0$ .

À l'interface, de manière générale, une partie de l'onde va être réfléchi. On obtient alors une onde régressive appelée *onde réfléchi*:

$$y_r(x,t) = f_r(t + x/c_1) \quad , \quad x < 0 \quad (4.4.3)$$

L'onde présente sur la corde pour  $x < 0$  est donc donnée par la somme de l'onde incidente et de l'onde réfléchi :

$$\begin{aligned} y(x,t) &= y_i(x,t) + y_r(x,t) \\ &= f_i(t - x/c_1) + f_r(t + x/c_1) \quad \forall x < 0, \quad \forall t \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

Une autre partie de l'onde va être transmise à l'autre demi-corde. Bien évidemment, cette onde est progressive (elle se propage vers les  $x$  croissants); elle s'appelle *onde transmise*

$$y_t(x,t) = f_t(t - x/c_2) \quad , \quad x > 0 \quad (4.4.5)$$

La célérité des ondes transverse sur la corde est, pour  $x > 0$ ,

$$c_2 = \sqrt{\frac{T}{\mu_2}} \quad (4.4.6)$$

en fonction de la masse linéique  $\mu_2$  de la demi-corde située en  $x > 0$ . Nous cherchons maintenant à exprimer l'onde transmise et l'onde réfléchi, connaissant l'onde incidente.

#### 4.4.1 Conditions de raccordement à la jonction

Premièrement, les deux morceaux de cordes étant attachés, le déplacement de la corde le long de l'axe  $Oy$  doit être le même des deux côtés de la jonction en  $x = 0$ . On obtient une première condition :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} [y_i(x,t) + y_r(x,t)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} y_t(x,t) \quad , \quad \forall t \quad (4.4.7)$$

Utilisant la forme explicite des ondes, eqs (4.4.1,4.4.3,4.4.5) on obtient

$$f_i(t) + f_r(t) = f_t(t) \quad \forall t \quad (4.4.8)$$

Deuxièmement, nous pouvons invoquer ici aussi le fait que la somme des forces appliquées à la jonction doit être nulle, car la somme des forces appliquées à un système de masse nulle (comme c'est le cas pour la jonction supposée infiniment fine) doit être nulle.

Nous avons déjà utilisé le fait que le module de la tension est le même des deux côtés de la jonction. Nous voulons maintenant imposer en plus que les vecteurs correspondant aux forces de tension appliquées de part et d'autre de la jonction sont de même direction, et de sens opposés.

En utilisant les expressions des forces utilisées pour l'équation (4.1.14), dans la limite d'épaisseur nulle  $x \rightarrow 0^-$  et  $\delta x \rightarrow 0^+$ , on obtient la condition

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \quad \forall t \quad (4.4.9)$$

On obtient alors, en n'oubliant pas que  $c_1 \neq c_2$  a priori

$$-\frac{f'_i(t)}{c_1} + \frac{f'_r(t)}{c_1} = -\frac{f'_t(t)}{c_2} \quad \forall t \quad (4.4.10)$$

Nous avons alors obtenu les deux contraintes suivantes à la jonction :

$$\boxed{\begin{aligned} f_i(t) + f_r(t) &= f_t(t) \\ f'_i(t) - f'_r(t) &= \frac{c_1}{c_2} f'_t(t) \end{aligned}} \quad \forall t \quad (4.4.11)$$

Considérons maintenant le cas d'une onde incidente sinusoïdale, pour laquelle la solution du problème est simple. Les ondes réfléchies et transmises seront aussi bien sûr sinusoïdales, et de même pulsation (on peut se convaincre que dans le cas contraire le système (4.4.11) n'a pas de solutions). Nous avons en notation complexe

$$\tilde{y}_i(x,t) = \tilde{\mathcal{A}}_i e^{i\omega(t-x/c_1)} \quad (4.4.12a)$$

$$\tilde{y}_r(x,t) = \tilde{\mathcal{A}}_r e^{i\omega(t+x/c_1)} \quad (4.4.12b)$$

$$\tilde{y}_t(x,t) = \tilde{\mathcal{A}}_t e^{i\omega(t-x/c_2)} \quad (4.4.12c)$$

On obtient alors à partir des relations (4.4.11) le système algébrique suivant (après avoir simplifié par le facteur commun  $e^{i\omega t}$ ):

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{A}}_i + \tilde{\mathcal{A}}_r &= \tilde{\mathcal{A}}_t \\ \tilde{\mathcal{A}}_i - \tilde{\mathcal{A}}_r &= \frac{c_1}{c_2} \tilde{\mathcal{A}}_t \end{cases} \quad (4.4.13)$$

#### 4.4.2 Coefficients de réflexion et transmission en amplitude

Le rapport  $\tau$  entre l'amplitude de l'onde transmise et l'onde incidente s'appelle *coefficient de transmission en amplitude*. En faisant la somme des deux équations du système (4.4.13), on trouve

$$\tau = \frac{\tilde{\mathcal{A}}_t}{\tilde{\mathcal{A}}_i} \implies \boxed{\tau = \frac{\tilde{\mathcal{A}}_t}{\tilde{\mathcal{A}}_i} = \frac{2}{1 + \frac{c_1}{c_2}} = \frac{2c_2}{c_1 + c_2}} \quad (4.4.14)$$

Le rapport  $\rho$  entre l'amplitude de l'onde réfléchie et l'onde incidente s'appelle *coefficient de réflexion en amplitude*. En utilisant la première équation de (4.4.13) et l'équation (4.4.14) ci-dessus, on trouve

$$\rho = \frac{\tilde{\mathcal{A}}_r}{\tilde{\mathcal{A}}_i} \implies \boxed{\rho = \tau - 1 = \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1}} \quad (4.4.15)$$

On note que ces deux coefficients sont réels. Alors que  $\tau$  est toujours positif, le signe de  $\varrho$  dépend du fait que la célérité  $c_2$  soit plus petite ou plus grande que  $c_1$ .

### 4.4.3 Coefficients de réflexion et transmission en énergie

Nous pouvons aussi définir des coefficients similaires pour le courant d'énergie mécanique. Le courant d'énergie mécanique de l'onde incidente (4.4.12a) s'obtient, en utilisant l'éq. (4.3.17) comme

$$j_m^i = \mathcal{A}_i^2 \frac{T\omega^2}{c_1} \sin^2(\omega(t - x/c_1) + \phi_i) \quad (4.4.16)$$

Dont l'amplitude est donc

$$\mathcal{J}_i = \mathcal{A}_i^2 \frac{T\omega^2}{c_1} \quad (4.4.17)$$

On trouve de même pour les ondes réfléchies et transmises :

$$\mathcal{J}_r = \mathcal{A}_r^2 \frac{T\omega^2}{c_1} \quad , \quad \mathcal{J}_t = \mathcal{A}_t^2 \frac{T\omega^2}{c_2} \quad (4.4.18)$$

On obtient ainsi pour le *coefficient de transmission en énergie*

$$\mathfrak{T} = \frac{\mathcal{J}_t}{\mathcal{J}_i} = \frac{c_1 \mathcal{A}_t^2}{c_2 \mathcal{A}_i^2} = \frac{c_1 \tau^2}{c_2} \implies \boxed{\mathfrak{T} = \frac{4c_1 c_2}{(c_1 + c_2)^2}} \quad (4.4.19)$$

et pour le *coefficient de réflexion en énergie*

$$\mathfrak{R} = \frac{\mathcal{J}_r}{\mathcal{J}_i} = \frac{\mathcal{A}_r^2}{\mathcal{A}_i^2} = \varrho^2 \implies \boxed{\mathfrak{R} = \frac{(c_1 - c_2)^2}{(c_1 + c_2)^2}} \quad (4.4.20)$$

On vérifie la relation importante

$$\mathfrak{R} + \mathfrak{T} = 1 \quad (4.4.21)$$

qui exprime la conservation du courant d'énergie mécanique à travers l'interface.

### 4.4.4 Impédance de la corde

Pour réécrire les résultats précédents d'une manière plus indépendante du système physique étudié, on peut introduire une *impédance* caractéristique correspondant à chacune des portions de la corde.

De manière générale on appelle impédance d'une onde *progressive* le coefficient de proportionnalité entre la force de tension orthogonale à la corde et sa vitesse de déplacement transverse:<sup>3</sup>

$$T_y(x,t) = Z \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \quad (4.4.22)$$

3. Pour une onde régressive il est facile de montrer que  $T_y = -Z\partial y/\partial t$ .

On utilise alors le fait que

$$T_y(x,t) = T \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \quad (4.4.23)$$

et on obtient, pour une onde progressive de célérité  $c_i = \sqrt{T/\mu_i}$

$$Z_i = \frac{T}{c_i} = \sqrt{\mu_i T}. \quad (4.4.24)$$

On peut alors réécrire les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude et en énergie comme

$$\tau = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}, \quad \varrho = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (4.4.25a)$$

$$\mathfrak{T} = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}, \quad \mathfrak{R} = \left( \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 \quad (4.4.25b)$$

Cette impédance a une interprétation un peu analogue à celle de l'impédance en électricité. Plus la corde a une impédance grande, plus elle «résiste» au passage de l'onde. Contrairement à une résistance électrique, la corde vibrante idéalisée possède une énergie mécanique, mais ne la dissipe pas ; elle correspond donc dans cette analogie à un dipôle ayant une impédance purement imaginaire.

