Chapitre 1

Phénomènes ondulatoires

Les phénomènes ondulatoires sont omniprésents en physique. L'étude des ondes que nous aborderons ici concerne un grand éventail de systèmes physiques différents, qui peuvent néanmoins se prêter — dans le cadre de certaines approximations que nous indiquerons lorsque cela sera possible — à une analyse commune. De manière générale nous nous intéressons à des perturbations locales d'un système par rapport à son état d'équilibre ; lorsque cette perturbation se propage à partir de sa source en fonction du temps, dans les différentes directions spatiales du système, sans néanmoins que les constituants du milieu subissent un mouvement d'ensemble, nous avons affaire à une onde. L'onde, qui ne transporte donc pas de matière, transporte donc de l'énergie.[1]

1.1 Quelques phénomènes ondulatoires dans la Nature

Il est possible d'emblée de séparer les phénomènes ondulatoires en deux catégories distinctes suivant leur nature physique.

La première d'entre elles est constituée d'*ondes mécaniques* générées par de petites perturbations d'un milieu matériel. Ces ondes sont naturellement conditionnées par la nature physique de celui-ci, et se décrivent le plus simplement dans le référentiel attaché à ce milieu. Donnons quelques exemples d'ondes mécaniques :

- les *ondes acoustiques* ou *ondes sonores* dans les fluides, dont nous avons l'expérience quotidienne, sont générées par de petits déplacements des molécules du fluide autour de leur position statistique d'équilibre, ou de manière équivalente par de petites variations de pression. Ces perturbations peuvent se propager dans les trois dimensions du fluide ;
- les *ondes acoustiques dans les solides* sont de nature assez voisine. La structure du solide est formée de manière schématique de noyaux atomiques (ou d'ions) ordonnées suivant un réseau de manière rigide (contrairement aux molécules de fluide, libres de se déplacer). Un déplacement de ces noyaux par rapport à leur position d'équilibre dans le réseau engendrera la production d'une onde. Leur

1. Un bon example est donné par le rayonnement solaire, constitué d'ondes électromagnétiques.

étude peut être plus complexe que celle des ondes dans les fluides car un solide possède souvent des directions ou axes privilégiés — spécialement dans le cas d'un cristal — qui influeront la propagation des ondes ;
- les *ondes sismiques* correspondent à un cas particulier d'ondes acoustiques, à la fois dans les solides (dans les roches) et les fluides (le manteau qui est assimilable à un fluide très visqueux), dont l'analyse permet de sonder la composition interne de la Terre ;
- en biologie et médecine, la propagation des *ondes ultrasonores dans les tissus biologiques* est impliquée par exemple dans les échographies. Les tissus biologiques étant majoritairement constitués d'eau elles sont assimilables à des ondes se propageant dans les fluides (mais néanmoins non homogènes) ;
- les *ondes sur les cordes vibrantes* sont dues au déplacement transversal d'une corde tendue par rapport à sa position d'équilibre ;
- les *ondes de gravité*, ou ondes de surface, sont des ondes à deux dimensions se propageant à l'interface de deux fluides, en présence de la gravité. L'exemple le plus commun de telles ondes est donné par les vagues à la surface de la mer, ou à une échelle plus réduite les rides émises par le jet d'un objet dans l'eau. Dans ce cas l'onde est évidemment confinée à deux dimensions car elle est liée au déplacement de la position de l'interface. La force responsable du retour à l'équilibre de l'interface est la poussée d'Archimède, générée en la présence du champ de pesanteur ;
- les *ondes océaniques et atmosphériques*. Ces ondes ne sont pas de nature fondamentalement différente de celles évoquées plus haut mais ont lieu à des très grandes échelles, tellles que la rotondité de la terre et son mouvement de révolution agissent de manière significative. Les exemples les plus connus sont les ondes de Rossby, qui influencent grandement la circulation de l'atmosphère aux latitudes tempérées, et les ondes de Kelvin qui sont des ondes de gravité sur l'océan parallèles aux côtes.

Il est courant de devoir tenir compte de plusieurs types d'ondes mécaniques pour décrire complètement un phénomène. Prenons l'exemple d'une guitare. En pinçant la corde le joueur produit une onde sur la corde vibrante. Ces vibrations seront transmises à la table de la guitare par le chevalet. Il faut alors considérer des ondes mécaniques dans le bois de la table. Les vibrations de la table mettront alors l'air en mouvement, générant des ondes sonores dans l'air.

Les phénomènes ondulatoires de la deuxième catégorie ne nécessitent pas de milieu matériel pour se propager. Elles diffèrent donc des ondes précédentes dans le sens où elles ne correspondent pas aux perturbations d'un système matériel. Il existe essentiellement deux sortes d'ondes de ce type :
- les *ondes électromagnétiques* correspondent aux variations locales, conjointes, des champs électriques et magnétiques. Ces ondes peuvent parfaitement se propager dans le vide, mais également dans les milieux matériels pourvu que ceux-ci soient suffisamment transparents. Lorsque ces ondes sont détectables par l'œil, c.-à.-d. dans le domaine de longueur d'onde *visible*, elles sont communément appelées *ondes lumineuses*. Il s'agit d'un des domaines principaux d'application

de la physique ondulatoire ;
- les *ondes gravitationnelles* sont de nature nettement plus exotique. Elles sont prédites par la théorie de la relativité générale d'Einstein et correspondent à la propagation de déformations de l'espace-temps, générées par des objets massifs sous certaines conditions. Bien que non encore detectées directement, leur existence est confirmée par plusieurs phénomènes astrophysiques.

1.2 Caractéristiques d'une onde

Après avoir mentionné quelques systèmes physiques dans lesquels se produisent des phénomènes ondulatoires, essayons maintenant d'en donner quelques caractéristiques générales. Nous ne pouvons au stade actuel définir ces notions avec une grande précision, mais elles réapparaitront naturellement par la suite lorsque nous aurons mis en place le formalisme nécessaire à la description mathématique des ondes. Cette liste n'est certainement pas exhaustive mais contient plusieurs notions très importantes qui seront développées par la suite.

Une onde est caractérisée par :

1. sa *dimensionnalité*. Elle est fixée par celle du milieu dans lequel l'onde peut se propager (que l'onde y soit liée, dans le cas des ondes mécaniques, ou non). Une onde sur une corde ne peut naturellement se propager qu'à une dimension, le long de la corde. Une onde de gravité à la surface de l'eau est naturellement bidimensionnelle. Une onde acoustique dans un fluide ou une onde électromagnétique sont a priori des ondes tridimensionnelles car elles existent dans un milieu qui a trois dimensions. Cependant des situations particulières peuvent contraindre, avec une bonne approximation, l'onde se propager à une ou deux dimensions. Nous pouvons évoquer la propagation d'ondes sonores dans un rail de chemin de fer (exemple bien connu des amateurs de western) ou bien des ondes lumineuses dans une fibre optique. Dans ces deux exemples l'onde est contrainte de ne se propager qu'à une dimension ;
2. la *vitesse* à laquelle elle se propage. La définition de cette vitesse est plus subtile qu'il n'y paraît comme cela sera expliqué par la suite. La notion de vitesse la plus simple est la suivante. On génère en un point donné une perturbation de courte durée (appelée alors impulsion), qui va ensuite se propager sous la forme d'une onde ; on peut alors mesurer la vitesse à laquelle l'impulsion se propage. La vitesse définie de cette manière s'appelle *vitesse de groupe* de l'onde. De manière générale, plus le milieu dans lequel se propage une onde mécanique « résiste » à des perturbations, plus cette vitesse sera élevée ;
3. la *grandeur physique* qui oscille autour de sa valeur d'équilibre lors de son passage. En général il existe plusieurs grandeurs associées à une onde, qui en fournissent des descriptions équivalentes ; par exemple la surpression et la vitesse dans le cas des ondes acoustiques, ou les champs électriques et magnétiques pour les ondes lumineuses ;
4. sa *direction de propagation*. Certaines ondes ont une direction de propagation unique et bien définie, comme le faisceau d'un laser. D'autres ondes se pro-

pagent dans toutes les directions, comme l'onde de gravité créée à la surface de l'eau lorsqu'on y jette un caillou. La direction de propagation de l'onde n'est pas nécessairement identique à la direction selon laquelle a lieu la perturbation. Lorsque ces deux directions sont orthogonales, l'onde est dite *transverse*. Dans le cas où ces directions sont parallèles, l'onde est dite *longitudinale*. Nous étudierons par la suite des représentants de ces deux familles d'ondes ;

5. Une notion étroitement liée à la précédente est celle de la *géometrie*, ou «forme» de l'onde. Dans l'exemple précdent des ondes à la surface de l'eau, l'onde à une géometrie circulaire, avec la source de l'onde en son centre. L'équivalent d'une telle onde à trois dimensions est une *onde sphérique*, qui se propage à partir d'une source ponctuelle située au centre des «sphères emboitées» correspondant à l'onde. Un autre type d'onde courant à trois dimensions est l'*onde plane* qui se propage dans une même et unique direction, quel que soit le point de l'espace où on l'observe. De manière générale la géometrie de l'onde est liée à la géometrie de la source, du moins si l'onde est libre de se propager dans toutes les directions jusqu'à l'infini ;
6. les ondes dans un certain système sont caractérisées par le fait qu'une perturbation, en se propageant, va ou non conserver sa forme initiale. Si la forme n'est pas conservée, nous sommes en présence du phénomène de *dispersion*. L'équation permettant de caractériser ce phénomène est appelée relation de dispersion.

1.3 À quelles conditions une onde peut-elle se propager ?

Il ne suffit pas de perturber un milieu matériel pour qu'une onde mécanique puisse se propager, ou du moins se propager efficacement. Il faut tout d'abord que le système se trouve en chaque point traversé par l'onde dans un état d'équilibre ; dans le cas contraire le passage de l'onde peut entraîner une brusque modification du milieu.

Ce système est maintenant perturbé localement. Son nouvel état peut être aussi un état d'équilibre ; il n'y a alors pas de propagation. Dans le cas contraire, il existe une *force de rappel* qui tend à ramener le système dans son état original. Dans le cas d'une corde vibrante, il s'agit simplement de la tension de la corde.[2]

Si la force de rappel va tendre à ramener le système à l'équilibre au point où il a été perturbé, propageant la perturbation de proche en proche, il faut que l'énergie contenue dans la perturbation ne soit pas « perdue » en étant transmise au milieu. Ce phénomène, appelé *dissipation*, est toujours présent lors de la propagation d'ondes mécaniques, lié par exemple à la viscosité des fluides (à l'exception notable de l'Helium superfluide). Il existe aussi pour les ondes lumineuses, sauf dans le vide.

On pourra négliger ce phénomène si l'attenuation de l'onde qui en résulte est

2. Le cas d'une onde acoustique dans un gaz est plus subtil. La force de rappel est due aux forces de pression qui s'opposent à la compression du fluide, plus précisément aux variations locales de la pression par rapport à sa valeur au repos. Ces forces sont dans un gaz parfait d'origine thermodynamique (elles sont dues uniquement à l'agitation thermique).

faible à des échelles caractéristiques correspondant à l'expérience considérée. Lorsque ces conditions ne peuvent pas être remplies (si la dissipation est trop importante) il n'y a alors pas de propagation d'ondes.[3]

1.4 Régime de validité

Lors de l'étude des ondes mécaniques nous supposons toujours que la perturbation est de faible amplitude. Dans ce régime les ondes sont alors de nature linéaire, car différentes ondes peuvent se « croiser » sans interagir entre elles. L'équation régissant la propagation des ondes est alors soluble en toute généralité.

Les ondes électromagnétiques dans le vide sont toujours de nature linéaire, quelle que soit leur amplitude ; par contre dans un milieu matériel ce n'est plus nécessairement vrai, car une onde électromagnétique de grande amplitude peut interagir suffisamment avec le milieu pour que celui-ci perturbe la forme de l'onde.

En analysant un système physique donné il faut toujours s'assurer que nous restons dans le régime de validité de cette approximation, en d'autres termes il faut vérifier que les ondes restent toujours d'amplitude plus faible qu'une valeur caractéristique au-delà de laquelle l'onde devient *non-linéaire*.

L'apparition de phénomènes non-linéaires dans les ondes mécaniques est relativement courante, et ne remet pas en compte leur nature ondulatoire, même si elle en change la nature. Un exemple très intéressant est constitué par les *ondes de choc* qui apparaissent en particulier lorsqu'un avion se meut à une vitesse supérieure à celle du son. Le long d'une onde de choc, la perturbation de l'air engendrée par l'avion est comprimée dans une zone extrêmement petite. Les gradients importants de vitesse et de pression rendent l'onde non-linéaire.

3. Une bonne analogie est fournie par l'étude de l'oscillateur harmonique amorti. Lorsque le coefficient d'amortissement est faible, nous avons un régime pseudo-périoque, tel que le mouvement du système est approximativement périodique lorsqu'il est étudié sur une petite période de temps. Par contre, au-delà d'une valeur critique, le système est dans le régime apériodique et n'oscille plus.

Chapitre 2

Équation d'onde et propagation

Nous avons vu dans le chapitre précédent que les phénomènes ondulatoires décrivent la propagation de perturbations à travers l'espace en fonction du temps. L'objectif de ce chapitre est d'en donner une description quantitative, en termes d'une *équation d'onde* dont les solutions décrivent les phénomènes ondulatoires qu'ils soient de nature mécanique ou lumineuse.

L'équation d'onde étudiée dans ce chapitre, appelée *équation de d'Alembert*, est exacte dans le cas des ondes électromagnétiques dans le vide mais n'est valable que pour de petites perturbations dans le cas des ondes mécaniques. Par hypothèse les perturbations se propagent sans attenuation (c.-à.-d. sans dissipation d'énergie) et sans dispersion. Les modifications à apporter pour tenir compte de ces effets seront évoquées à la fin du cours.

2.1 Équation d'onde

Nous nous restreindrons dans un premier temps aux ondes se propageant dans une seule dimension spatiale x. On considère que les variations d'une grandeur physique en jeu dans le phénomène ondulatoire sont décrites par une fonction $f(x,t)$ de l'espace et du temps. Par convention, en l'absence de perturbation, $f(x,t) = 0$, $\forall x,t$.

L'équation d'onde linéaire décrivant la propagation de l'onde est alors l'*équation de d'Alembert* à une dimension, donnée par l'équation au dérivées partielles suivante :

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = 0} \tag{2.1.1}$$

Il s'agit d'une *équation aux dérivées partielles* linéaire, du second ordre, à coefficients constants. Elle ne dépend que d'un paramètre réel positif c, dont la nature physique est donnée ci-dessous.

Il est commode d'introduire un opérateur différentiel $\Box$ appelé *d'alembertien*, défini par

$$\Box f(x,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}\,, \tag{2.1.2}$$

en termes duquel l'équation d'onde s'écrit simplement $\Box f = 0$.

Ondes transverses et longitudinales

La même équation d'onde (2.1.1) peut correspondre à des réalités différentes, suivant le problème physique étudié. La grande majorité des phénomènes ondulatoires peut être classifié selon deux catégories :

- dans le premier cas, la grandeur $f(x,t)$ correspond à une perturbation dans une direction orthogonale à la direction de propagation de l'onde Ox. L'onde est alors dite *transverse*. Par exemple les ondes lumineuses et les ondes sur les cordes vibrantes sont de ce type.
- Dans un deuxième cas, la perturbation est parallèle à la direction de propagation. Une telle onde est une *one longitudinale*. Les ondes acoustiques dans les fluides sont de ce type.

Notons que dans le cas des ondes mécaniques dans les solides, qui ne sera pas étudié ici, ces deux types d'ondes coexistent.

2.2 Célérité des ondes

L'équation d'onde dépend d'un unique paramètre c. Effectuons l'analyse dimensionnelle de l'éq. (2.1.1). Nous obtenons:

$$\frac{1}{[c]^2}\frac{[f]}{T^2} = \frac{[f]}{L^2} \implies [c] = \frac{L}{T} \tag{2.2.1}$$

Le paramètre c a donc la dimension du rapport d'une longueur sur un temps, soit une vitesse. Il est appelé *célérité* de l'onde.[1] Il dépendra des caractéristiques physiques du système considéré.

La célérité des ondes peut prendre des valeurs très différentes, selon le type d'ondes considéré. Donnons quelques exemples. Les ondes lumineuses dans le vide se propagent à la célérité $c \simeq 2{,}99792458 \cdot 10^8\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$. Les ondes sonores dans l'atmosphère ont une célérité de l'ordre de $c = 340\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$. Cette dernière valeur dépend des conditions comme nous le verrons plus loin. Une onde mécanique dans le fer se propage à $c = 5950\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

1. Notons que. l'équation étant linéaire, nous n'avons pas besoin de connaître la dimension de f pour arriver à ce résultat.

2.3 Solution générale de l'équation d'onde

Pour trouver la solution générale de l'éq. (2.1.1), nous remarquons tout d'abord que l'opérateur d'alembertien (2.1.2) peut se factoriser comme suit:[2]

$$\Box = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) . \tag{2.3.1}$$

Introduisons maintenant les variables $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, définies en fonction de x et t par

$$\begin{cases} u = x - ct \\ v = x + ct \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ t = \frac{v-u}{2c} \end{cases} \tag{2.3.2}$$

Les dérivées partielles par rapport aux nouvelles variables sont données par :

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) \tag{2.3.3a}$$

$$\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{1}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial v}\frac{1}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) \tag{2.3.3b}$$

de telle sorte que le d'Alembertien peut s'écrire en fonctions de u et v comme :

$$\Box = 4\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u} \tag{2.3.4}$$

Nous considérons maintenant f comme une fonction de u et de v:

$$\hat{f}(u,v) \equiv f(x,t) \qquad \forall (x,t,u,v) \in \mathbb{R}^4 \tag{2.3.5}$$

Il est maintenant très simple de résoudre l'équation d'onde pour $\hat{f}$, qui s'écrit:

$$\frac{\partial^2 \hat{f}(u,v)}{\partial v \partial u} = 0 \tag{2.3.6}$$

Nous avons premièrement:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial \hat{f}(u,v)}{\partial v}\right] = 0 \implies \frac{\partial \hat{f}(u,v)}{\partial v} = g(v) \tag{2.3.7}$$

avec g une fonction dérivable quelconque. En intégrant cette équation par rapport à la variable v, on trouve que la solution générale de cette équation est donnée par la somme d'une fonction de u uniquement et d'une fonction de v uniquement:

$$\hat{f}(u,v) = \hat{f}_-(u) + \hat{f}_+(v) \tag{2.3.8}$$

2. Strictement, cette opérateur ne peut se factoriser de la sorte que s'il est appliqué à des fonctions deux fois dérivables dans les variables x, t, dont les dérivées secondes sont continues, c.-à.-d. à $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Cela implique l'identité des dérivées croisées (dite *identité de Schwarz*): $\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t \partial x}$. Nous considérons à partir de maintenant que les solutions de l'équation d'onde font partie de cet espace de fonctions.

avec $\hat{f}_\pm \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Ces deux fonctions sont *arbitraires* et indépendantes entre elles.

En termes des variables originales du problème, la solution générale de l'équation d'onde (2.1.1) s'écrit

$$\boxed{f(x,t) = f_-(x - ct) + f_+(x + ct)} \tag{2.3.9}$$

Nous obtenons que la somme de deux fonctions à une variable deux fois dérivables *quelconques*, la première dépendant de $x - ct$ uniquement et la deuxième de $x + ct$ uniquement, est une solution de l'équation d'onde. Ainsi une onde générique n'est pas donnée par une simple vibration sinusoïdale.

Nous allons maintenant donner l'interprétation physique de cette solution générale de l'équation d'onde, en particulier élucider la signification des deux termes apparaissant dans la solution.

2.4 Ondes progressives

Considérons tout d'abord le premier terme de la solution, noté $f_-(x - ct)$. Il ne dépend que de la combinaison $x - ct$ de la coordonnée spatiale x et de la coordonnée temporelle t.

En un point et un instant arbitraire (x_1,t_1), la fonction f_- prend une certaine valeur, $f_-(x_1 - ct_1)$. À un instant ultérieur $t_2 > t_1$, la fonction va reprendre la même valeur en un point de coordonnée x_2 tel que l'argument de f_- soit identique, c.-à.-d. tel que :

$$x_1 - ct_1 = x_2 - ct_2 \implies x_2 = x_1 + c(t_2 - t_1) > x_1 \tag{2.4.1}$$

Cela correspond simplement à « décaler » la fonction f_- selon l'axe Ox, voir la figure 2.1. Le temps s'écoulant toujours vers les t croissants, on s'aperçoit que le profil de la fonction f_- se décale vers les x *croissants*.

Une telle solution est une onde *progressive*. Elle décrit une perturbation se déplaçant vers les x croissants. Une propriété cruciale de l'équation d'onde (2.1.1) est

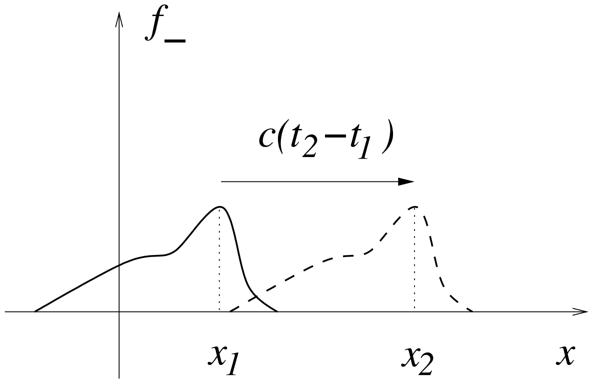

FIG. 2.1 – *Évolution d'une onde progressive entre deux instants t_1 et t_2.*

que la perturbation f_- se propage sans déformation. Cela correspond au fait que la propagation s'effectue sans *dispersion*. Le profil initial de la perturbation, spécifé par la fonction $f(x,t=0) = f_-(x)$ subit simplement une translation vers les x croissants d'une distance $c\Delta t$, pendant un intervalle de temps Δt donné.

Le deuxième terme de la solution générale de l'équation d'onde (2.3.9) a une interprétation similaire. La fonction f_+ subit dans ce cas une translation de x_1 à x_2 entre les instants t_1 et t_2 donnée par:

$$x_1 + ct_1 = x_2 + ct_2 \implies x_2 = x_1 - c(t_2 - t_1) < x_1 \tag{2.4.2}$$

Nous voyons ainsi que la perturbation représentée par f_+ se déplace vers les x *décroissants*. Une telle onde est appelée *onde régressive.*[3]

2.5 Ondes sinusoïdales

Une catégorie particulièrement importante de solutions de l'équation d'onde (2.1.1) correspond aux ondes sinusoïdales. Ces dernières sont données par des fonctions trigonométriques et présentent donc des propriétés de periodicité.

Une onde *progressive sinusoïdale* à une dimension est de la forme générique:

$$f(x,t) = \mathcal{A} \cos\left[\omega t - kx + \phi\right] \tag{2.5.1}$$

Insistons sur le fait qu'une onde progressive générique n'est *pas* une onde sinusoïdale de la forme (2.5.4). Ce n'est qu'un exemple particulier parmi une infinité d'autres.

Détaillons les différents paramètres ω, k, $\mathcal{A}$ et ϕ entrant dans l'expression de l'onde sinusoïdale (2.5.1) :

1. la quantité ω, exprimée en $\mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$, est la *pulsation* de l'onde (positive par convention) ;
2. le *nombre d'onde* k, exprimé en $\mathrm{rad} \cdot \mathrm{m}^{-1}$, qui est l'analogue spatial de la pulsation. Pour une onde à une dimension il s'agit d'une quantité algébrique (positive ou négative) ;
3. l'*amplitude* de l'onde $\mathcal{A}$ qui quantifie la « taille » de la perturbation ;
4. la quantité ϕ est le *déphasage* de l'onde par rapport à une phase de référence.

2.5.1 Relation de dispersion

Parmi les paramètres de l'onde progressive sinusoïdale (2.5.1), seul le nombre d'onde n'est pas choisi librement. Vérifions en effet à quelle condition la fonction (2.5.1) est une solution de l'équation d'onde (2.1.1). On obtient la contrainte suivante :

$$\left(-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2\right) \mathcal{A} \cos\left[\omega t - kx + \phi\right] = 0 \quad \forall t \ , \ \forall x \tag{2.5.2}$$

Nous en déduisons que, pour une pulsation donnée, le nombre d'onde et la pulsation sont liés par l'équation

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}} \qquad \implies \qquad k = \pm\frac{\omega}{c} \ , \tag{2.5.3}$$

3. On utilise parfois le terme d'onde progressive pour l'un ou l'autre cas.

qui constitue la *relation de dispersion* du système. Pour une onde à une dimension, cette équation a deux solutions, une positive et une négative (nous rappelons que le nombre d'onde est une grandeur algébrique dans ce cas).

L'onde *progressive* correspond à la racine positive de l'équation (2.5.3), donnée par $k = \omega/c$. Nous pouvons alors réecrire la fonction (2.5.1) comme

$$f(x,t) = \mathcal{A}\cos\left[\omega\Big(t - \frac{x}{c}\Big) + \phi\right] = f_-(x - ct) \tag{2.5.4}$$

On reconnaît bien la forme caractéristique d'une onde progressive, correspondant à la propagation de la perturbation vers les x croissants.

On obtient une onde régressive en choisissant la solution négative de l'équation (2.5.3), c.-à.-d. $k = -\omega/c$. On peut alors écrire la solution comme

$$f(x,t) = \mathcal{A}\cos\left[\omega\Big(t + \frac{x}{c}\Big) + \phi\right] = f_+(x + ct) \tag{2.5.5}$$

La superposition d'une onde progressive sinusoïdale et d'une onde régressive sinusoïdale n'est ni une onde progressive ni une onde régressive.

2.5.2 Amplitude et phase

Le coefficient constant $\mathcal{A}$, qui est *toujours positif*, est l'amplitude de l'onde et donne l'échelle de la perturbation considérée. Il a la même dimension que la perturbation $f(x,t)$ elle-même, le cosinus étant sans dimension. Par convention, l'amplitude d'une onde est toujours *positive.*

La phase de l'onde, qui dépend du temps et de l'espace, correspond à l'argument du cosinus dans l'équation (2.5.1). Elle est donnée par

$$\boxed{\Phi(x,t) = \omega t - kx + \phi} \tag{2.5.6}$$

et est définie modulo 2π. La partie constante ϕ de cette quantité correspond au *déphasage* de l'onde par rapport à la phase d'une onde de référence (qui est choisie arbitrairement).

2.5.3 Périodicités

Ces solutions sont à la fois périodiques dans le temps et dans l'espace, en raison de leur forme sinusoïdale. Il s'agit de leur propriété principale.

Par définition, la *période* temporelle de l'onde est la plus petite solution positive T de l'équation

$$f(x,t+T) = f(x,t)\ , \quad \forall t\ ,\ \forall x\,. \tag{2.5.7}$$

On obtient à partir de (2.5.1) que la période est donnée en termes de la pulsation suivant

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}\,, \tag{2.5.8}$$

qui a bien la dimension d'un temps. La *fréquence* de l'onde est donnée par l'inverse de sa période :

$$\boxed{\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}}, \tag{2.5.9}$$

et s'exprime en Hertz (Hz), équivalents à des s^{-1}. L'une de ces trois quantités (période, fréquence, pulsation) peut être indifféremment utilisée pour caractériser l'onde sinusoïdale.

La période spatiale, appelée *longueur d'onde* λ, est définie de manière analogue à la période temporelle comme la plus petite solution positive de l'équation

$$f(x+\lambda,t) = f(x,t)\ , \quad \forall t\ ,\ \forall x\,. \tag{2.5.10}$$

On obtient à partir de (2.5.1)

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{|k|}}. \tag{2.5.11}$$

On vérifie dans cette équation que λ a bien la dimension d'une longueur. En utilisant la relation de dispersion (2.5.3), ou de manière équivalente en partant des formes (2.5.4,2.5.5) de la solution, on peut exprimer la longueur d'onde en fonction de la période et de la fréquence :

$$\boxed{\lambda = cT = \frac{c}{\nu}}. \tag{2.5.12}$$

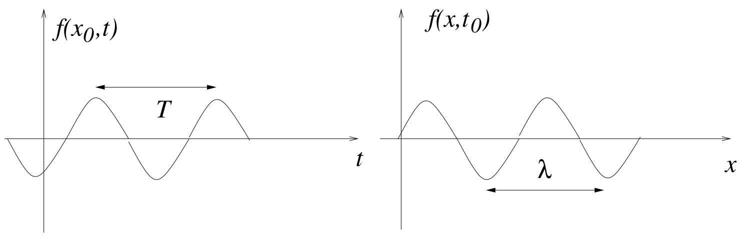

FIG. 2.2 – *Représentation d'une onde sinusoïdale à x fixé (gauche) et t fixé (droite).*

Pour illustrer ces périodicités nous pouvons représenter premièrement l'onde mesurée en une position précise x_0, en fonction du temps. Alternativement nous pouvons représenter l'onde figée à un instant t_0, en fonction de la position x. Dans les deux cas nous obtenons des sinusoïdes, dont les périodes sont données ci-dessus, voir fig. 2.2.

2.5.4 Vitesse de phase

On considère une onde sinusoïdale, progressive ou régressive. La vitesse à laquelle se « déplace » la phase de l'onde est appelée *vitesse de phase* v_ϕ.

Cherchons la position x telle que, à un instant donné, la phase de l'onde $\Phi(x,t)$ soit égale à une constante Φ_0 :

$$\Phi(x,t) = \phi_0 \implies x = \frac{\omega}{k}t + \frac{\phi - \phi_0}{k} \tag{2.5.13}$$

On en déduit la vitesse de phase

$$v_\phi = \frac{\omega}{|k|} = c \tag{2.5.14}$$

On obient donc, en utilisant la relation de dispersion (2.5.3), que la vitesse de phase est égale à la célérité de l'onde c.

2.5.5 Représentation complexe

Bien que la fonction $f(x,t)$ décrivant l'onde soit un nombre réel, il est commode de décrire l'onde sinusoïdale en notation complexe.[4]

Nous considérons donc des solutions complexes de l'équation d'onde, dénotées $\tilde{f}(x,t)$. Nous insistons sur le fait que les quantités physiques qui nous intéressent sont réelles ; les quantités complexes sont uniquement un intermédiaire de calcul. À la fin du calcul, la solution physique est déterminée en prenant la partie réelle de $\tilde{f}$:

$$f(x,t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{f}(x,t)\right] \tag{2.5.15}$$

Une onde complexe sinusoïdale progressive ou régressive est en toute généralité de la forme :

$$\tilde{f}(x,t) = \tilde{\mathcal{A}} e^{i(\omega t - kx)} \tag{2.5.16}$$

L'amplitude complexe $\tilde{\mathcal{A}}$ se décompose en module et argument selon:

$$\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} e^{i\phi}\,, \tag{2.5.17}$$

de telle sorte que son module est l'amplitude réelle $\mathcal{A}$ et son argument le déphasage ϕ. Nous vérifions bien que

$$\mathrm{Re}\left[\tilde{f}(x,t)\right] = \mathrm{Re}\left[\tilde{\mathcal{A}} e^{i(\omega t - kx)}\right] = \mathrm{Re}\left[\mathcal{A} e^{i(\omega t - kx + \phi)}\right] = \mathcal{A}\cos[\omega t - kx + \phi]\,, \tag{2.5.18}$$

qui est similaire à (2.5.1). Ainsi la représentation complexe contient bien la même information que l'onde réelle.

2.6 Ondes à trois dimensions

Nous avons jusqu'à présent considéré des ondes se propageant uniquement à une dimension, le long d'un axe Ox. Cette description, si elle est suffisante pour décrire les ondes sur les cordes vibrantes, est trop restrictive concernant les ondes acoustiques et lumineuses. Dans ces deux cas les ondes peuvent a priori se propager dans toutes les directions. Nous introduisons ici la généralisation de l'équation d'onde à trois dimensions et ses solutions.

4. Cette notation favorise en particulier l'étude de la superposition d'ondes sinusoïdales.

2.6.1 Équation d'ondes à trois dimensions

L'équation d'onde (2.1.1) se généralise naturellement à trois dimensions. On considère maintenant que la grandeur physique concernée est décrite par une fonction $f(\vec{x},t)$ de la position $\vec{x}$ dans l'espace est du temps.[5] Cette fonction est alors solution d'une équation aux dérivées partielles appelée équation de d'Alembert à trois dimensions :

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f(\vec{x},t)}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 f(\vec{x},t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(\vec{x},t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(\vec{x},t)}{\partial z^2}\right) = 0} \tag{2.6.1}$$

Nous pouvons reconnaître dans le second membre de cette équation l'opérateur Laplacien défini en coordonnées cartésiennes par $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$. Il généralise la dérivée seconde par rapport à x qui apparaît dans l'équation (2.1.1) à une dimension.

La forme de la solution générale de l'équation d'onde à trois dimensions dépend des symétries du problème, liées à la forme de la source émettrice de l'onde.

2.6.2 Ondes planes

Le premier type d'onde correspond à une onde se déplaçant selon un axe particulier, que nous pouvons choisir selon l'axe Ox. Elle ne dépend pas alors de la position dans le plan (Oy,Oz) tangent à cet axe, c.-à.-d. des coordonnées y et z.

Cela revient à ne donner à la fonction f décrivant la perturbation qu'une dépendance en x :

$$f(\vec{x},t) = f(x,t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = 0 \tag{2.6.2}$$

Nous nous ramenons donc au cas de l'équation d'onde à une dimension (2.1.1), étudiée plus haut. La solution générale est alors

$$f(\vec{x},t) = f_-(x - ct) + f_+(x + ct) \tag{2.6.3}$$

indépendamment de y et z. Les deux termes représentent respectivement une onde progressive et une onde régressive.

2.6.3 Ondes sphériques

Le deuxième type d'onde est une onde à symétrie sphérique. Ce type d'ondes intervient lorsque nous considérons une source ponctuelle, ou bien une source sphérique.[6] Nous pouvons alors choisir un système de coordonnées sphériques, tel que l'origine des coordonnées $r = 0$ est confondu avec le centre de la source.

5. Dans le cas des ondes lumineuses la quantité physique est elle-même un vecteur. Ce point sera développé plus loin.

6. Nous obtenons aussi une onde sphérique, mais confinée à l'intérieur d'un cône, pour une source en forme de calotte sphérique comme un haut-parleur (en négligeant les effets de diffraction au bord).

Il est naturel de chercher des solutions à l'équation d'onde (2.6.1) respectant les symétries du problème, c.-à.-d. ne dépendant que de la coordonnée radiale r des coordonnées sphériques, qui représente la distance à la source située à l'origine. Nous avons alors

$$f(\vec{x},t) = f(r,t)\,. \tag{2.6.4}$$

Pour trouver la forme de l'équation d'onde à trois dimensions en coordonnées sphériques il faut exprimer le laplacien dans ces coordonnées. Lorsque comme ici la fonction considérée ne dépend que de la coordonnée radiale r on peut montrer qu'on obtient l'*équation d'onde radiale* (qui n'a bien sur pas de sens pour $r = 0$) :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f(r,t)}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \frac{\partial f(r)}{\partial r}\right] = 0 \tag{2.6.5}$$

Nous voyons que la dépendance spatiale de cette équation est plus compliquée que dans le cas précédent. Néanmoins il est toujours possible de trouver la solution générale.

Pour résoudre l'équation d'onde (2.6.1), introduisons une fonction auxiliaire $g(r,t)$ définie par

$$f(r,t) = \frac{1}{r} g(r,t)\ ,\ \ \forall t\ ,\ \ \forall r > 0\,. \tag{2.6.6}$$

La fonction g obéit alors à l'équation

$$\frac{1}{c^2}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 g(r,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial g(r,t)}{\partial r} - g(r,t)\right] = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 g(r,t)}{\partial^2 r} \tag{2.6.7}$$

En multipliant finalement par r, on obtient l'équation d'ondes à une dimension (2.1.1), dans les variables (r,t):

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 g(r,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 g(r,t)}{\partial^2 r} = 0 \tag{2.6.8}$$

En utilisant la solution (2.3.9) de l'équation d'ondes à une dimension, on obtient la solution générale pour une onde sphérique

$$g(r,t) = g_-(r-ct) + g_+(r+ct) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{f(r,t) = \frac{1}{r}\, g_-(r-ct) + \frac{1}{r}\, g_+(r+ct)} \tag{2.6.9}$$

où les fonctions $g_\pm$ sont arbitraires. Notons que cette solution n'est naturellement définie que pour r strictement positif.

La premier terme de la solution correspond à une onde dite *sortante*, se propageant vers les r croissants. Elle représente l'onde émise par une source ponctuelle située en $r = 0$.

Par contre, le deuxième terme, qui correspond à une onde *rentrante* se propageant vers les r décroissants n'est pas physique dans la majorité des situations. Il faut en effet imaginer qu'on prépare une onde a l'infini très précisément pour qu'elle converge en un point précis de l'espace.

2.6.4 Ondes sinusoïdales tridimensionnelles

Pour les deux types d'ondes considérées au-dessus, ondes planes et sphériques, il est possible de définir l'analogue des ondes sinusoïdales étudiées dans le cas unidimensionnel. Elles sont caractérisées par une périodicité temporelle, mais pas nécessairement spatiale.

Ondes planes sinusoïdales

Commençons par définir une onde plane sinusoïdale. Une onde plane sinusoïdale progressive est obtenue, en notation complexe, en choisissant le premier terme de la solution (2.6.3) avec une exponentielle complexe:

$$\tilde{f}(\vec{x},t) = \tilde{\mathcal{A}} e^{i(\omega t - kx)} \tag{2.6.10}$$

Cette onde se propage selon les x croissants. Tous les points situés à une valeur donnée de x, c.-à.-d. dans le plan (y,z) correspondent à la même phase de l'onde ; il s'agit des *plans d'ondes*.

Nous pouvons généraliser la forme de l'onde plane pour autoriser une direction arbitraire de propagation. Nous avons alors

$$\tilde{f}(\vec{x},t) = \tilde{\mathcal{A}} e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \tag{2.6.11}$$

où le vecteur $\vec{k}$ est appelé *vecteur d'onde*. Sa norme est contrainte par l'équation d'onde à trois dimensions (5.2.21) à obéir à la *relation de dispersion*

$$\frac{\omega^2}{c^2} = ||\vec{k}||^2 \tag{2.6.12}$$

La direction donnée par le vecteur d'onde $\vec{k}$ correspond à la direction de propagation de l'onde.

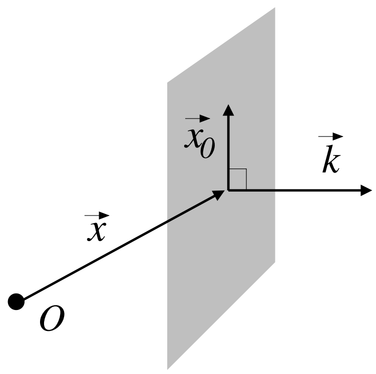

FIG. 2.3 – *Représentation d'un plan d'onde.*

Un plan orthogonal au vecteur d'onde est appelé *plan d'onde*. Il est tel que la phase de l'onde sinusoïdale en tout point d'un tel plan est identique.

Pour démontrer cette propriété nous pouvons chercher l'ensemble (connexe) des points tels que la phase de l'onde $\Phi(\vec{x},t)$ soit constante à un instant donné. Nous avons pour cela à résoudre (avec ϕ_0 constant) :

$$\Phi(\vec{x},t) = \omega t - \vec{k}\cdot\vec{x} = \phi_0 \implies \vec{k}\cdot\vec{x} = \omega t - \phi_0 \tag{2.6.13}$$

Si on ajoute au vecteur $\vec{x}$ un vecteur $\vec{x}_0$ orthogonal au vecteur $\vec{k}$ (tel que $\vec{k}\cdot\vec{x}_0 = 0$), cette relation est inchangée, voir fig. 2.3. Ainsi la phase de l'onde reste constante par translation orthogonale au vecteur $\vec{k}$, c.-à.-d. le long d'un plan d'onde. Remarquons que l'onde plane possède une infinité de plans d'onde.

Périodicités L'onde plane définie par l'équation (2.6.11) est périodique dans le temps, avec une période $T = 2\pi/\omega$, mais également dans l'espace. Comme précédemment, nous cherchons une translation du vecteur $\vec{x}$ d'un vecteur de la plus petite norme possible non nulle, telle que la fonction f prenne la même valeur. Naturellement cette translation sera choisie dans la direction du vecteur d'onde $\vec{k}$, qui est la seule direction privilégiée du problème.

Nous pouvons alors vérifier que, pour une onde plane donnée par l'éq. (2.6.11), nous avons

$$\tilde{f}\left(\vec{x} + \tfrac{2\pi}{||\vec{k}||^2}\vec{k},t\right) = \tilde{f}(\vec{x},t) \quad \forall \vec{x},t \tag{2.6.14}$$

définissant la longueur d'onde

$$\lambda = \frac{2\pi}{||\vec{k}||} \tag{2.6.15}$$

Ondes sphériques sinusoïdales

En examinant la solution générale de l'équation d'onde pour une onde sphérique, il est naturel de considérer des solution sinusoïdales de la forme (en notation complexe)[7]

$$\tilde{f}(\vec{x},t) = \frac{1}{r}\,\tilde{\mathcal{A}}\,e^{i(\omega t - \kappa r)} \tag{2.6.16}$$

qui fait apparaître le nombre d'onde radial κ. La forme réelle de cette onde est donnée par :

$$f(\vec{x},t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{f}(\vec{x},t)\right] = \frac{1}{r}\,\mathcal{A}\cos(\omega t - \kappa r + \phi)\,. \tag{2.6.17}$$

Comme la fonction $\tilde{g}(r,t) = r\tilde{f}(\vec{x},t)$ satisfait l'équation d'onde à une dimension (2.1.1), la relation de dispersion s'écrit :

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \kappa^2\,. \tag{2.6.18}$$

Les *surfaces d'ondes*, c.-à.-d. pour lesquelles la phase de l'onde est constante à un instant donné, sont données par

$$\Phi(r,t) = \omega t - \kappa r + \phi = \phi_0 \implies r = \frac{\omega t + \phi - \phi_0}{\kappa} = ct + \frac{\phi - \phi_0}{\kappa} \tag{2.6.19}$$

7. Avec ces conventions, si $f(r,t)$ est de dimensions D, l'amplitude $\mathcal{A}$ est de dimension $D \times L$.

Ce sont donc des sphères, centrées en $r = 0$.

Le vecteur d'onde est parallèle au vecteur normé radial $\vec{e}_r$ des coordonnées sphériques:

$$\vec{k}(M) = \kappa\,\vec{e}_r \ , \quad ||\vec{k}|| = \kappa. \tag{2.6.20}$$

Sa direction dépend donc du point M de l'espace où l'on se situe. Le vecteur d'onde est orthogonal au plan tangent à la surface d'onde passant par ce même point M ; en effet ce vecteur est radial, alors que les surfaces d'onde sont des sphères centrées à l'origine, voir figure 2.4.

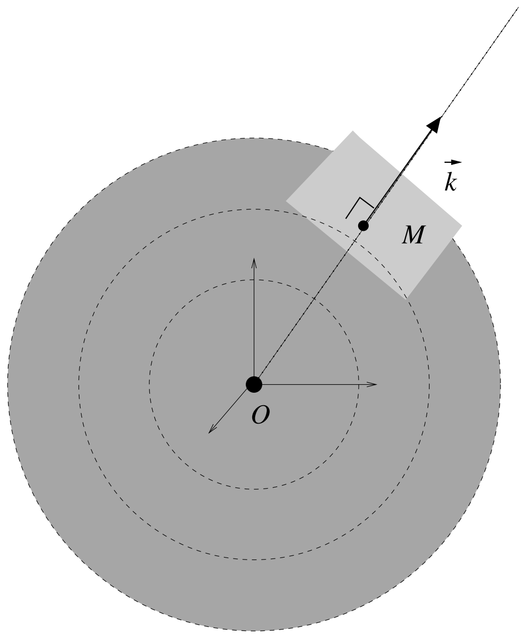

FIG. 2.4 – *Surfaces d'onde d'une onde sphérique. Le plan tangent à la surface d'onde au point M, orthogonal au vecteur d'onde $\vec{k}$ passant par ce point, est aussi représenté.*

Contrairement à l'onde plane, l'onde sphérique n'est *pas* périodique dans l'espace. Si l'exponentielle complexe dans l'équation (2.6.16) est bien sûr périodique en r, l'amplitude décroît comme $1/r$. Nous verrons plus loin une interprétation naturelle de ce phénomène, en considérant l'énergie contenue dans cette onde.[8]

Notion de surface d'onde

La notion de surface d'onde que nous avons rencontrée dans ces deux exemples particuliers est généralisable à n'importe quelle forme d'onde de pulsation donnée. On considère une onde progressive sinusoïdale dans le temps, dont la dépendance par rapport aux coordonnées spatiales peut être compliquée. On peut toujours définir en notation complexe la phase de l'onde, comme l'argument du nombre complexe $\tilde{f}(\vec{x},t)$.

8. Dans la limite statique $\omega \to 0$, nous retrouvons le potentiel électrostatique dû à une charge ponctuelle.

Une surface d'onde est alors décrite comme une surface $\mathcal{S}$ *connexe* telle que

$$\Phi(\vec{x},t) = \Phi_0 \quad \forall t\ ,\ \ \forall M \in \mathcal{S} \tag{2.6.21}$$

où le point M a pour coordonnées $\overrightarrow{OM} = \vec{x}$. Cette définition signifie qu'en se déplaçant le long d'une surface d'onde à un instant fixé, la phase de l'onde ne change pas. Le vecteur d'onde $\vec{k}$ en un point donné de l'espace est toujours orthogonal à la surface d'onde passant par ce point.

2.6.5 Approximation d'une onde sphérique par une onde plane

Une onde sphérique est générée par une source ponctuelle, ou plus généralement à symétrie sphérique. Du point de vue d'un observateur situé à très grande distance, les surfaces d'onde provenant de cette source sont des sphères de très grand rayon.[9] Il est alors légitime, localement, de se placer dans l'approximation où les surfaces d'ondes sont des plans d'ondes, tangents à la sphère correspondant à la surface d'onde véritable en ce point.

Examinons ce phénomène de manière quantitative. On considère une source d'ondes progressives sphériques sinusoïdales, de la forme (2.6.17), placée à l'origine des coordonnées sphériques, en $r = 0$. L'observateur est placé à une grande distance R, au point M. La surface d'onde passant par l'observateur à un instant donné est alors une sphère de rayon R centrée à l'origine. Pour une onde plane, nous aurions à la place un plan d'onde contenant l'observateur, que nous choisissons naturellement tangent à la sphère de rayon R centrée à l'origine.

Nous considérons maintenant que l'observateur de déplace d'une distance $\delta\ell$ parallèlement à ce plan, jusqu'au point noté M'. L'approximation d'onde plane est correcte à cette échelle $\delta\ell$ si *la phase de l'onde ne diffère pas significativement de celle obtenue pour l'onde sphérique* au nouveau point d'observation M'.

La phase de l'onde sphérique au point M, à une distance R de la source, est donnée par :

$$\Phi_s(M,t) = \omega t - \kappa R + \phi \tag{2.6.22}$$

Si on se déplace d'une distance $\delta\ell$ le long du plan tangent, on se retrouve à une distance $R + \delta R$ de l'origine des coordonnées. Dans la limite $\delta\ell \ll R$ (voir figure 2.5) nous avons :

$$R^2 + (\delta\ell)^2 = (R + \delta R)^2 \simeq R^2 + 2R\delta R \tag{2.6.23}$$

On obtient donc

$$\delta R \simeq \frac{(\delta\ell)^2}{2R} \tag{2.6.24}$$

La différence de phase de l'onde sphérique entre ces deux points est donnée, à tout instant, par

$$\delta\Phi = \Phi_s(M',t) - \Phi_s(M,t) = -\kappa\delta R \simeq -\frac{\pi(\delta\ell)^2}{\lambda R} \tag{2.6.25}$$

où nous avons introduit la longueur d'onde λ.

9. Si on observe une étoile avec un télescope, ce rayon se compte en années-lumière !

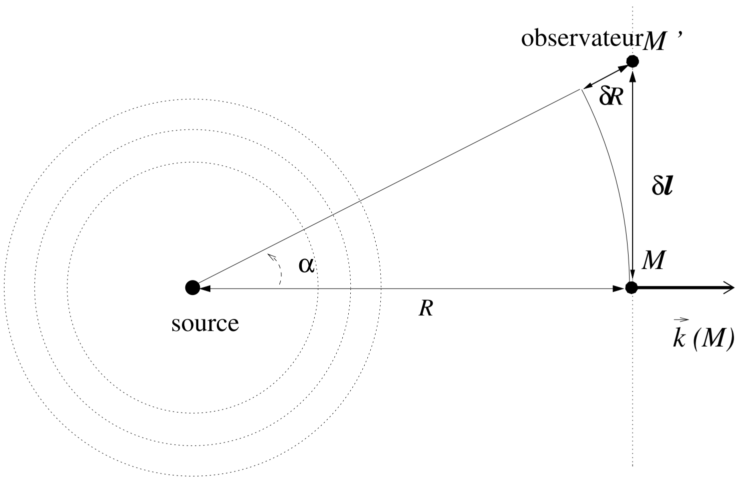

FIG. 2.5 – *Approximation d'une onde sphérique par une onde plane.*

Si l'onde considérée était plane au lieu d'être sphérique, la phase de l'onde ne changerait pas lorsque l'observateur se déplace du point M au point M', car ces deux points sont situés dans le même plan d'onde (les plans d'onde de cette onde plane étant orthogonaux au vecteur d'onde au point M, noté $\vec{k}(M)$ sur la figure 2.5).

Le déphasage entre l'onde sphérique et l'onde plane qui en est *localement* une approximation est donc donné par l'équation (2.6.25).

On en déduit que l'onde plane est une bonne approximation de l'onde sphérique si cette différence de phase est petite devant π. Ainsi, à une distance R de la source, cette approximation est valable dans une zone de dimension linéaire $\delta\ell$ vérifiant

$$\boxed{\delta\ell \ll \sqrt{\lambda R}} \qquad (2.6.26)$$

On pourra remarquer que nous ne nous sommes pas préoccupés du fait que l'amplitude de l'onde sphérique va aussi changer lorsqu'on se déplace le long d'un plan tangent. Cette correction est de manière générale moins importante que la variation de phase que nous avons calculée. En effet la variation relative d'amplitude est donnée par $\delta R/R \simeq (\delta\ell/R)^2/2$. Si l'équation (2.6.26) est satisfaite nous avons

$$\frac{\delta R}{R} \ll \frac{\lambda}{2\pi R}\,, \qquad (2.6.27)$$

qui est en pratique négligeable.