Emmanuel, Tintin et Descartes



Bertrand Duplantier IPhT 15 mai 2025

Des membranes hexatiques aux membranes extatiques From hexatic to ecstatic membranes At the crossroads of physics and mathematics : the joy of integrable combinatorics A conference in the honor of Philippe Di Francesco's 60th birthday Institut de Physique Théorique CEA Paris-Saclay June 24-26, 2024





L'esprit des cartes Une conférence en l'honneur d'Emmanuel Guitter Institut de Physique Théorique CEA Paris-Saelay 15-16 mai 202



At the crossroads of physics and mathematics : the joy of integrable combinatorics A conference in the honor of Philippe Di Francesco's 60th birthday Institut de Physique Théorique CEA Paris-Saclay June 24-26, 2024













Philippe's Honda Prelude

Emmanuel's Cadillac Coupe de Ville

PhD 1989: « Physique statistique et propriétés critiques des membranes » (under the supervision of F. David)



Bending rigidity

$$E = \sigma \int dA + \frac{\kappa}{2} \int H^2 dA$$

Surface energy





Renormalization of the bending energy κ by thermal fluctuations

 \rightarrow coupled to internal order within the membrane



- Liquid \rightarrow F. David and E. Guitter. Instabilities in membrane models. Europhys. Lett., 3, 1169–1174, (1987).
- Hexatic \rightarrow F. David, E. Guitter, and L. Peliti. Critical properties of fluid membranes with hexatic order. J. Physique, 48, 2059–2066, (1987).
- Crystal \rightarrow F. David and E. Guitter. Rigid random surfaces at large d. Nucl. Phys.B, 295, 332-62, (1988).

F. David and E. Guitter. Crumpling transition in elastic membranes: renormalization group treatment. Europhys. Lett., 5, 709–713, (1988).

E. Guitter, F. David, S. Leibler, and L. Peliti. Crumpling and buckling transitions in polymerized membranes. *Phys. Rev. Lett.*, 61, 2949–2952, (1988).

E. Guitter, F. David, S. Leibler, and L. Peliti. Thermodynamical behavior of polymerized membranes. J. Physique, 50, 1787–1819, (1989).

E. Guitter, S. Leibler, A.C. Maggs, and F. David. Stretching and buckling of polymerized membranes: a Monte Carlo study. J. Physique, 51, 1055–1060, (1989).

5th Jerusalem Winter School for Theoretical Physics

Statistical mechanics of membranes and surfaces

28 Dec 1987 - 6 Jan 1988





Santa Barbara (1989-1990)



Post-doc (VSNA) with Fyl Pincus



E. Guitter and M. Kardar. Tethering, crumpling, and melting transition in hexatic membranes. *Europhys. Lett.*, 13, 441–446, (1990).

E. Guitter. Anharmonic theory of a stack of tethered membranes. J. *Physique*, 51, 2407–2420, (1990).

E. Guitter and S. Leibler. On supercoiling instability in closed DNA. *Europhys. Lett.*, 17, 643–648, (1992).

E. Guitter and J. Palmeri. Tethered membranes with long-range interactions. *Phys. Rev. A*, 45, 734–744, (1992).

. . .

E. Guitter and E. Orlandini. Monte Carlo results for projected self-avoiding polygons: a two-dimensional model for knotted polymers. J. Phys. A, 32, 1359–1385, (1999), arXiv:cond-mat/9901041.

From polymers to membranes



S.F. Edwards





J. Legrand des Cloizeaux

Edwards's model for **polymers** (1965)

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int_0^S \mathrm{d}s \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} \right) + \frac{b}{2} \int_0^S \mathrm{d}s \int_0^S \mathrm{d}s' \,\delta^d \left(\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(s') \right).$$

P.-G. de Gennes

De Gennes's n=0 limit of the O(n) model (PGG 1972, JdC 1975)

$$H \{ \varphi \} = \frac{1}{2} \int d^{d}r \sum_{j=1}^{N} \sum_{l=1}^{n} \left\{ \frac{1}{2} \left[\nabla \varphi_{j,l}(\mathbf{r}) \right]^{2} + m_{j}^{2} \left[\varphi_{j,l}(\mathbf{r}) \right]^{2} \right\} + \frac{b}{8} \int d^{d}r \left\{ \sum_{j=1}^{N} \sum_{l=1}^{n} \left[\varphi_{j,l}(\mathbf{r}) \right]^{2} \right\}^{2}$$

Des Cloizeaux's direct renormalization (1981)



Renormalization of interacting crumpled **membranes**

$$\beta \mathcal{H} = \frac{1}{2} \int d^D x \left(\nabla_x \vec{\mathbf{r}}(x) \right)^2 + \frac{b}{2} \int d^D x \int d^D x' \,\,\delta^d \left(\vec{\mathbf{r}}(x) - \vec{\mathbf{r}}(x') \right)$$



$$\nu = \frac{2-D}{2}$$
 $0 < D < 2$ $\epsilon = 2D - \nu d$

Pointwise interaction

Pointwise interaction

$$\beta \mathcal{H} = \frac{1}{2} \int d^{D}x \left(\nabla_{x} \vec{\mathbf{r}}(x) \right)^{2} + b \int d^{D}x \, \delta^{d}(\vec{\mathbf{r}}(x)) = 0$$

 $\epsilon = D - \nu d$

Nuclear Physics B394 (1993) 555–664 North-Holland NUCLEAR PHYSICS B

Renormalization theory for interacting crumpled manifolds

François David,¹ Bertrand Duplantier¹ and Emmanuel Guitter

Service de Physique Théorique C.E. Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France²

Received 19 November 1992 Accepted for publication 10 December 1992

VOLUME 70, NUMBER 15

PHYSICAL REVIEW LETTERS

12 APRIL 1993

Renormalization of Crumpled Manifolds

François David, Bertrand Duplantier, and Emmanuel Guitter Service de Physique Théorique, Centre d'Etudes de Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette, France (Received 18 December 1992)

We consider a model of a *D*-dimensional tethered manifold interacting by excluded volume in \mathbb{R}^d with a single point. By use of intrinsic distance geometry, we first provide a rigorous definition of the analytic continuation of its perturbative expansion for arbitrary *D*, 0 < D < 2. We then construct explicitly a renormalization operation **R**, ensuring renormalizability to all orders. This is the first example of mathematical construction and renormalization for an interacting extended object with continuous internal dimension, encompassing field theory.

PHYSICAL REVIEW LETTERS

VOLUME 72

17 JANUARY 1994

NUMBER 3

Renormalization and Hyperscaling for Self-Avoiding Manifold Models

François David, Bertrand Duplantier, and Emmanuel Guitter Service de Physique Théorique, Centre d'Etudes de Saclay, F-9/191 Gif-sur-Yvette, France (Received 29 July 1993)

The renormalizability of the self-avoiding manifold Edwards model is established. We use a new short distance multilocal operator product expansion, which extends methods of local field theories to a large class of models with nonlocal singular interactions. This validates the direct renormalization method introduced before, as well as scaling laws. A new general hyperscaling relation is derived. Manifolds at the Θ point and long-range Coulomb interactions are briefly discussed.

MOPE: *Multilocal Operator Product Expansion*





The ecstasy of distance geometry



Cayley-Menger determinant

$$P_{\mathcal{G}}(a) \equiv \frac{(-1)^{N}}{2^{N-1}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ 1 & a_{12} & 0 & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{1N} & a_{2N} & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Lettre de Descartes à la Princesse Elisabeth de Bohême (1643)

CCCXXVIII.

DESCARTES A ELISABETH.

[Egmond du Hoef, novembre 1643.]

Texte de Clerselier, tome III, lettre 81, p. 465-468.

« A M. la Princesse Elisabeth, etc. », dit Clerselier, sans donner de date. Mais Descartes répond à la CCCXXVII^e, du 21 novembre, et on peut croire qu'il n'a point fait attendre sa réponse. Elle serait donc de quelques jours après.

Madame,

15 La folution qu'il a plû à Vostre Altesse me faire l'honneur de m'enuoyer, est si iuste, qu'il ne s'y peut

a. Voir p. 43, l. 10.

H.S.M. Coxeter (1967)

CORRESPONDANCE.

48

III, 467.

trois AH, BH & CH, ce que n'ont pas les premieres. Et en fuiuant le calcul auec ces fix lettres, fans les changer ny en adjoûter d'autres, par le chemin qu'a



pris Voftre Altefle (car il eft meilleur, pour cela, que celuy que l'auois propofé), on doit venir à vne équation fort reguliere, & qui fournira vn Theoreme affez court. Car les trois lettres a, b, c, y font difpofées en meſme façon, & aufſi les trois d, e, f.

Mais, pour ce que le calcul en eft ennuyeux, fi Voftre Alteffe a defir d'en faire l'effay, il luy fera plus aifé, en fuppofant que les trois cercles donnez s'entretouchent, & n'employant, en tout le calcul, que les quatre lettres d, e, f, x, qui eftant les rayons des quatre cercles, ont femblable rapport l'vne à l'autre. Et, en premier lieu, elle trouuera

A K
$$\infty \frac{dd + df + dx - fx}{d + f}$$
, & A D $\infty \frac{dd + df + de - fe}{d + f}$

où elle peut defia remarquer que x est dans la ligne AK, comme e dans la ligne AD, pour ce qu'elle se

III, 467-468. CCCXXVIII. - NOVEMBRE 1643. 49

trouue par le triangle AHC, comme l'autre par le triangle ABC. Puis enfin, elle aura cette équation^a,

$$\begin{array}{rcl} ddeeff & \infty & 2 deffxx + 2 deeffx \\ + ddeexx & + 2 deefxx + 2 ddeffx \\ + ddffxx & + 2 ddefxx + 2 ddeefx \\ + eeffxx, \end{array}$$

de laquelle on tire, pour Theoreme, que les quatre fommes, qui fe produifent en multipliant enfemble les quarrez de trois de ces rayons, font le double de

- 10 fix, qui fe produifent en multipliant deux de ces rayons l'vn par l'autre, & par les quarrez des deux autres; ce qui fuffit pour feruir de regle à trouuer le rayon du plus grand cercle qui puisse estre décrit entre les trois donnez qui s'entretouchent. Car, fi les
- 15 rayons de ces trois donnez font, par exemple, ^d/₂ ^e/₃ ^f/₄, i'auray 576 pour ddeeff, & 36 xx pour ddeexx, & ainfi des autres. D'où ie trouueray

$$x \approx -\frac{156}{47} + \sqrt{\frac{31104}{2209}}$$

fi ie ne me fuis trompé au calcul que ie viens de faire.

Et Votre Alteffe peut voir icy deux procedures fort differentes dans vne meſme queſtion, ſelon les differentes deſſeins qu'on ſe propoſe. Car, voulant ſçauoir de quelle nature eſt la queſtion, & par quel biais on la peut ſoudre, ie prens pour données les lignes perpendiculaires ou paralleles, & ſuppoſe pluſieurs autres quantitez inconnuës, aſin de ne ſaire aucune multiplication ſuperſluë, & voir mieux les plus courts chemins; au lieu que, la voulant acheuer, ie prens

a. Les signes + sont omis devant les deux premières colonnes. Correspondance, IV. 7



Emmanuel et Cécile



