# Quelques applications de l'approche «*problèmes inverses*» en reconstruction d'image et en astronomie.

Eric Thiébaut

Centre de Recherche Astrophysique de Lyon
Université Claude Bernard Lyon I
Ecole Normale Supérieure de Lyon

15 septembre 2008, Marseille

# Approche *problèmes inverses*

# Quelques notations...

équation modèle des observables :

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{m}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{e}$$

$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ données

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ paramètres

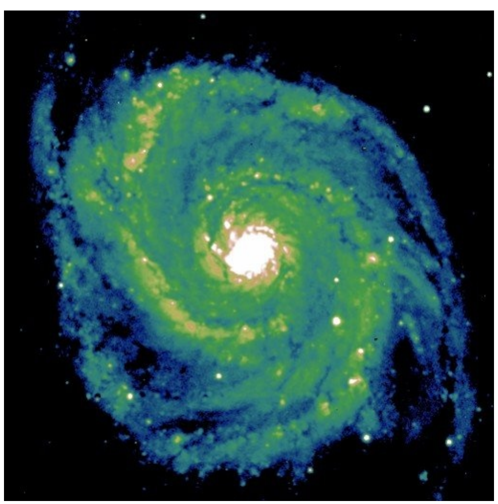
$\boldsymbol{m} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ modèle

$\boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^m$ erreurs (bruits + erreurs de modélisation)

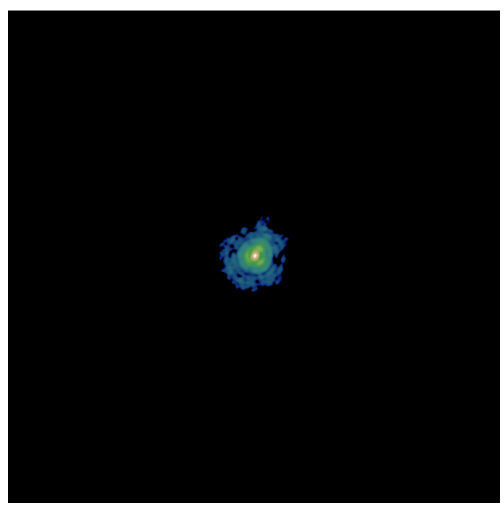
# Exemple : Formation d'image

objet — FEP — bruit — image observée

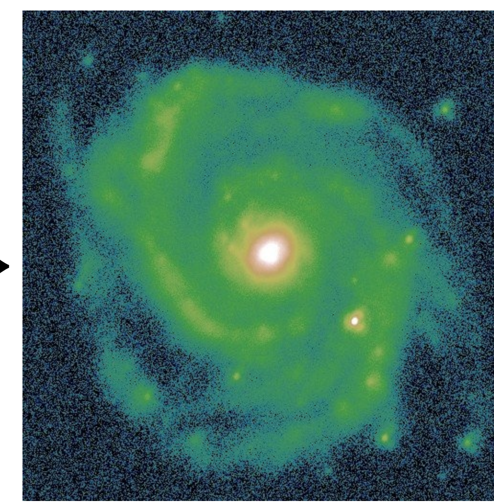
$$\iint x(\boldsymbol{\omega}')\; h(\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega}')\; \mathrm{d}^2\boldsymbol{\omega}' \;+\; e(\boldsymbol{\omega}) \;=\; y(\boldsymbol{\omega})$$



$*$



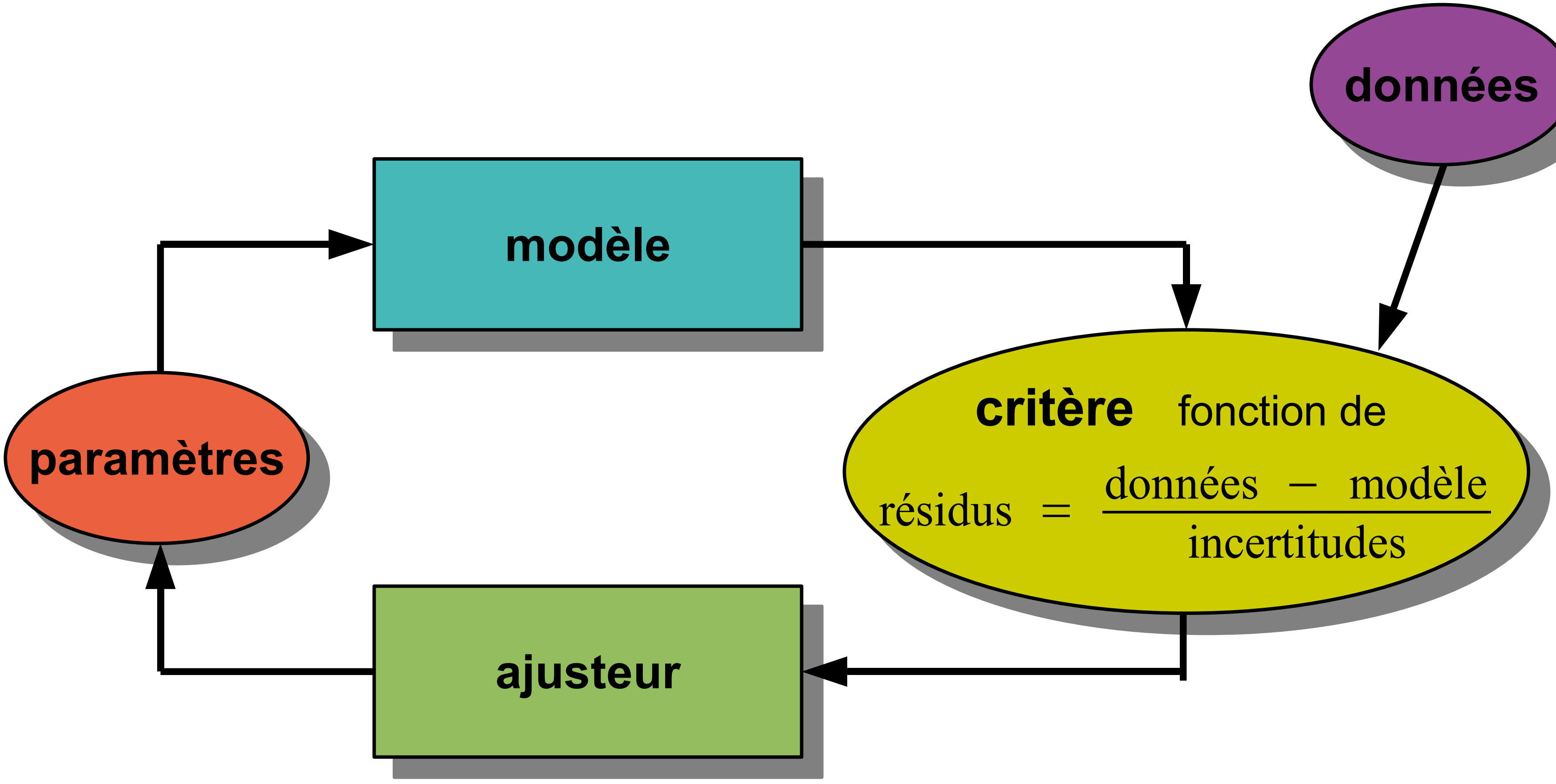
$+$ bruit $\longrightarrow$



# Approche Inverse



Quels sont les ***meilleurs*** paramètres compte tenu des données ?



# La déconvolution c'est facile : (1) la théorie



modélisation :

$$y(\boldsymbol{\omega}) = \iint h(\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega}')\ x(\boldsymbol{\omega}')\ \mathrm{d}^2\boldsymbol{\omega}' + e(\boldsymbol{\omega})$$

transformation de Fourier :

$$\hat{y}(\boldsymbol{\nu}) = \hat{h}(\boldsymbol{\nu})\,\hat{x}(\boldsymbol{\nu}) + \hat{e}(\boldsymbol{\nu})$$

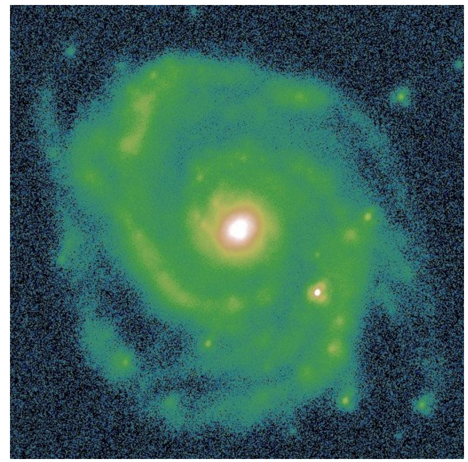
inversion :

$$\boxed{\hat{x}_{\mathrm{direct}}(\boldsymbol{\nu}) = \frac{\hat{y}(\boldsymbol{\nu})}{\hat{h}(\boldsymbol{\nu})}}$$

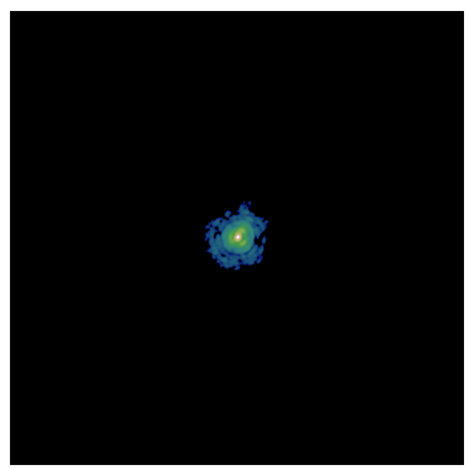
# La déconvolution c'est facile : (2) la pratique

$x_{\text{direct}} = \text{FFT}^{-1}$

FFT



FFT



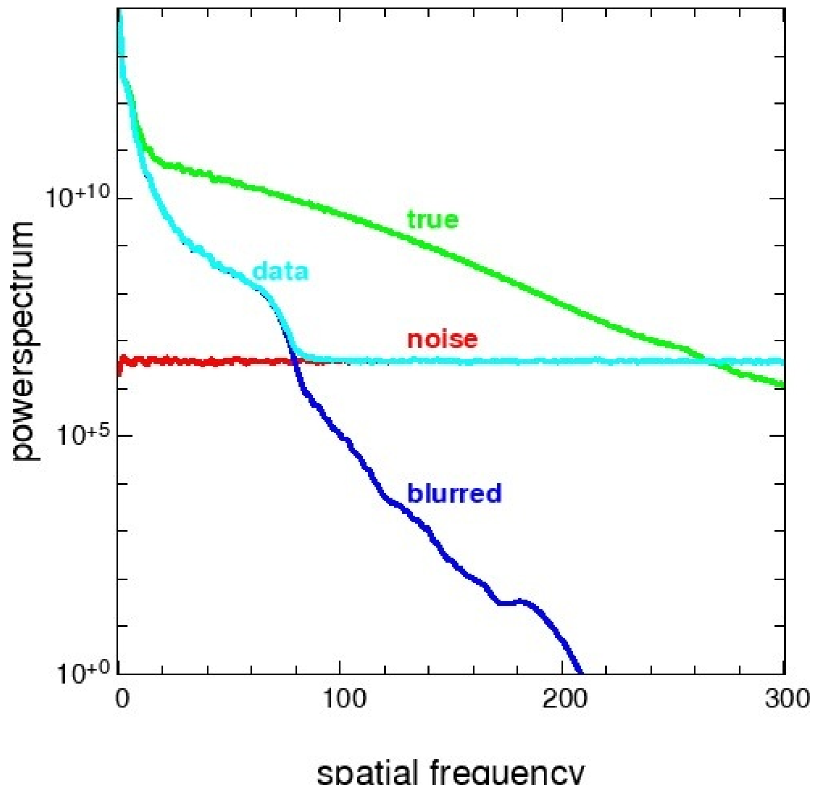
=

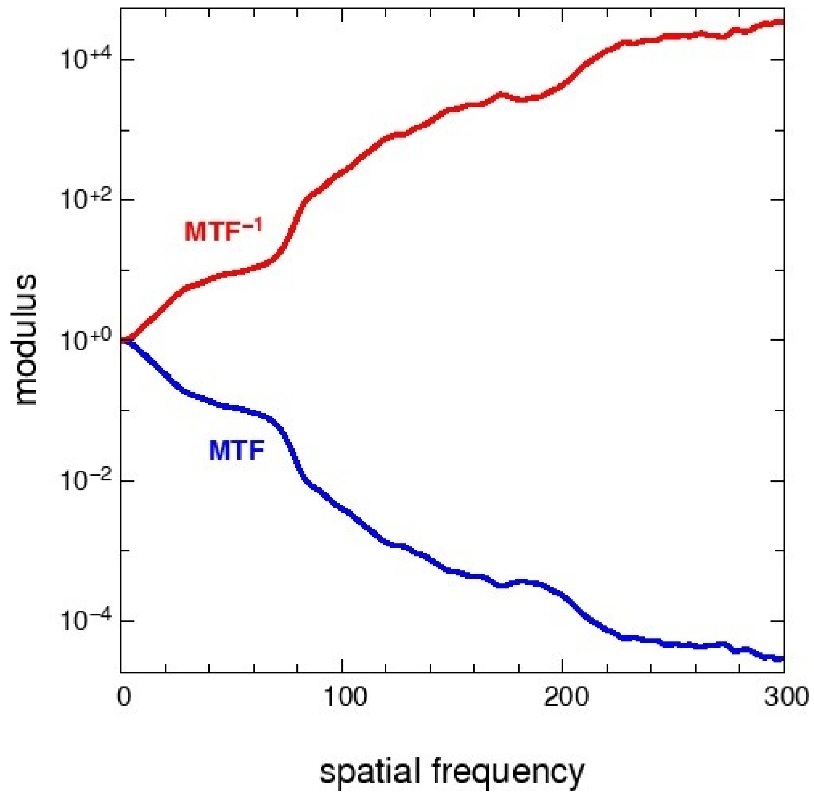

... la déconvolution ça n'est pas si facile que ça !

# Qu'est-ce qui cloche ?



$$\hat{x}_{\mathrm{direct}}(\boldsymbol{\nu}) = \frac{\hat{y}(\boldsymbol{\nu})}{\hat{h}(\boldsymbol{\nu})} = \frac{\hat{h}(\boldsymbol{\nu})\;\hat{x}(\boldsymbol{\nu}) + \hat{e}(\boldsymbol{\nu})}{\hat{h}(\boldsymbol{\nu})} = \hat{x}(\boldsymbol{\nu}) + \frac{\hat{e}(\boldsymbol{\nu})}{\hat{h}(\boldsymbol{\nu})}$$



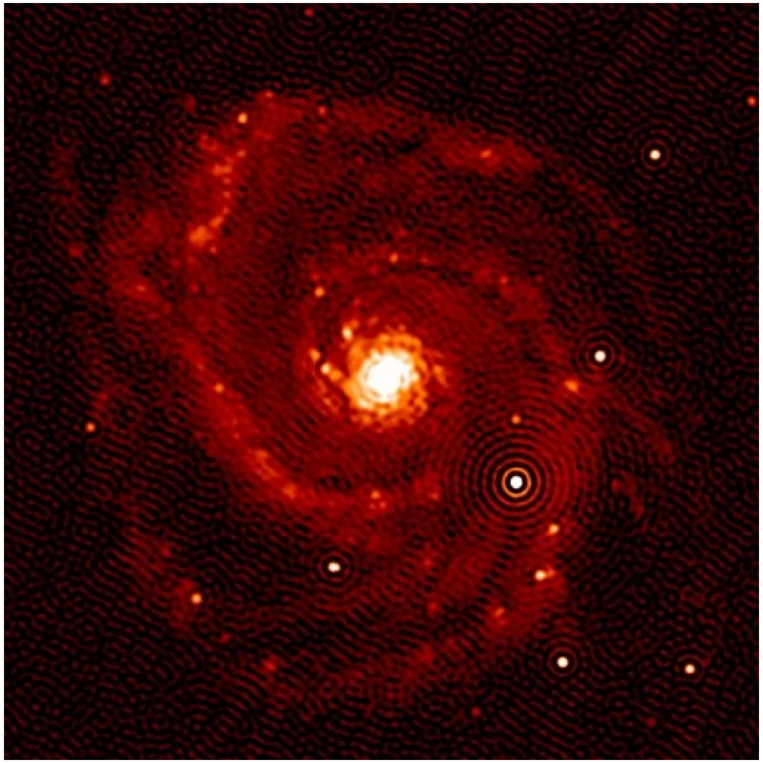

inversion directe (exacte ?) ➔ ***amplification du bruit***

# Solution brutale : troncature



$$\hat{x}_{\text{trunc}}(\boldsymbol{\nu}) = \begin{cases} \dfrac{\hat{y}(\boldsymbol{\nu})}{\hat{h}(\boldsymbol{\nu})} & \text{si } |\boldsymbol{\nu}| \leqslant \nu_{\text{cut}} \\ \cdot & \text{sinon} \end{cases}$$

avec coupure à ≈ 80 fréquels



# Approche problèmes inverses



> **modèle direct**

- modèle général : $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{e}$ ou modèle linéaire : $\boldsymbol{y}=\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}$
- $\boldsymbol{y}$ = données
- $\boldsymbol{x}$ = paramètres (image reconstruite, ...)
- $\boldsymbol{h}$, $\mathbf{H}$ = réponse instrumentale
- $\boldsymbol{e}$ = erreurs (bruits et erreurs de modélisation)

> **inversion directe interdite lorsque**

- $\boldsymbol{h}^{-1}$ (ou $\mathbf{H}^{-1}$) n'existe pas à moins d'approximations grossières
- amplification du bruit : $\tilde{\boldsymbol{x}}=\mathbf{H}^{-1}\cdot\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+\mathbf{H}^{-1}\cdot\boldsymbol{e}$

> **approche problèmes inverses**

- prise en compte de contraintes *a priori* (régularité)

$$\tilde{\boldsymbol{x}}=\arg\min_{\boldsymbol{x}}\|\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{y}\|_{\mathbf{W}}^2+\mu\, f_{\text{prior}}(\boldsymbol{x})$$

# Quels sont les meilleurs paramètres ?



les meilleurs paramètres (au sens du ***maximum de vraisemblance***) sont ceux qui maximisent la probabilité d'avoir observé les données :

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{ML}} = \arg\max_{\boldsymbol{x}} \Pr\left(\boldsymbol{y} \middle| \boldsymbol{m}(\boldsymbol{x})\right)$$

où : ***x*** sont les paramètres

***m***(***x***) est le modèle

***y*** sont les données

de façon équivalente :

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{ML}} = \arg\min_{\boldsymbol{x}} f_{\mathrm{ML}}(\boldsymbol{x})$$

avec :

$$f_{\mathrm{ML}}(\boldsymbol{x}) \propto -\log \Pr\left(\boldsymbol{y} \middle| \boldsymbol{m}(\boldsymbol{x})\right)$$

ML = *Maximum Likelihood*

# Maximum a posteriori : approche Bayesienne



- on maximise la probabilité du modèle étant donné les mesures (MAP = *maximum a posteriori*) :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_{\mathrm{MAP}} &= \arg\max_{\boldsymbol{x}} \Pr\left(\boldsymbol{m}(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{y}\right) \\
&= \arg\max_{\boldsymbol{x}} \frac{\Pr(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})\ \Pr(\boldsymbol{x})}{\cancel{\Pr(\boldsymbol{y})}} \qquad \text{(théorème de Bayes)} \\
&= \arg\min_{\boldsymbol{x}} \Big\{ \underbrace{-\log\Pr(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})}_{f_{\mathrm{ML}}(\boldsymbol{x})} \underbrace{-\log\Pr(\boldsymbol{x})}_{f_{\mathrm{prior}}(\boldsymbol{x})} \Big\} \\
&= \arg\min_{\boldsymbol{x}} f_{\mathrm{MAP}}(\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

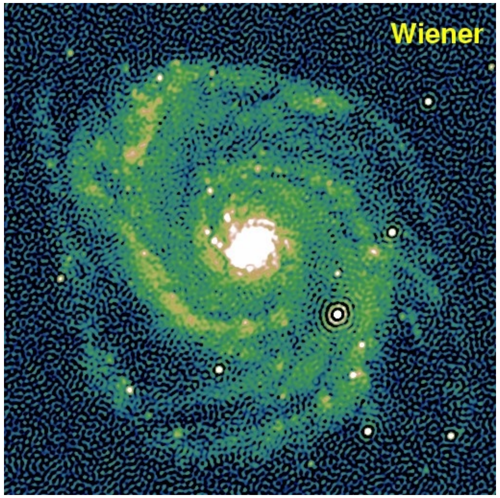
$$f_{\mathrm{MAP}}(\boldsymbol{x}) = f_{\mathrm{ML}}(\boldsymbol{x}) + f_{\mathrm{prior}}(\boldsymbol{x}) \qquad \text{(fonction pénalisante)}$$

# Filtrage de Wiener



filtre de Wiener *canonique* (MAP)

$$\hat{x}_{\text{Wiener}}(\boldsymbol{\nu}) = \frac{\hat{h}^*(\boldsymbol{\nu})\,\hat{y}(\boldsymbol{\nu})}{|\hat{h}(\boldsymbol{\nu})|^2 + \frac{\langle|\hat{e}(\boldsymbol{\nu})|^2\rangle}{\langle|\hat{x}(\boldsymbol{\nu})|^2\rangle}}$$



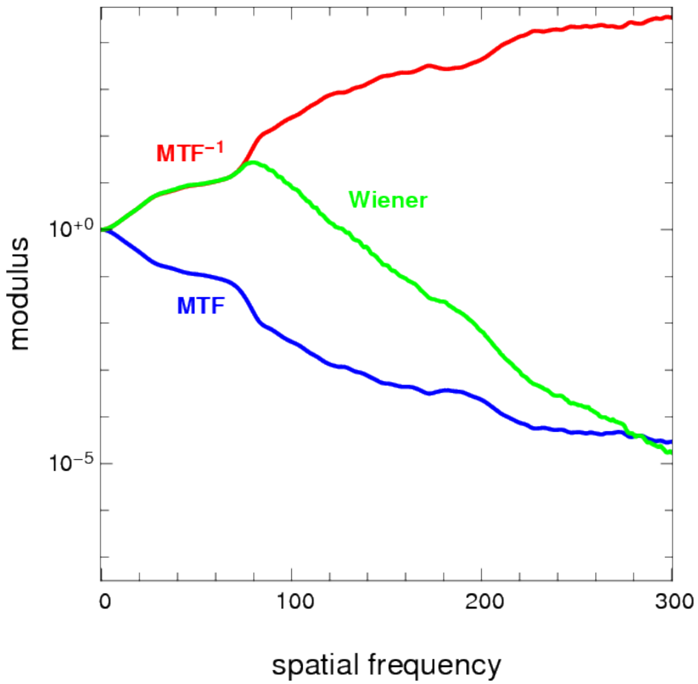

filtre de Wiener approché

$$\boxed{\hat{x}_{\text{MAP}}(\boldsymbol{\nu}) \simeq \frac{\hat{h}^*(\boldsymbol{\nu})\,\hat{y}(\boldsymbol{\nu})}{|\hat{h}(\boldsymbol{\nu})|^2 + \alpha\,|\boldsymbol{\nu}|^\beta}}$$

$$\Leftrightarrow \quad f_{\text{prior}}(\boldsymbol{x}) = \mu \sum_u w_u \, |\hat{x}_u|^2$$

avec $\alpha = \mu\,\sigma^2_{\text{bruit}}\,N_{\text{pixels}}$

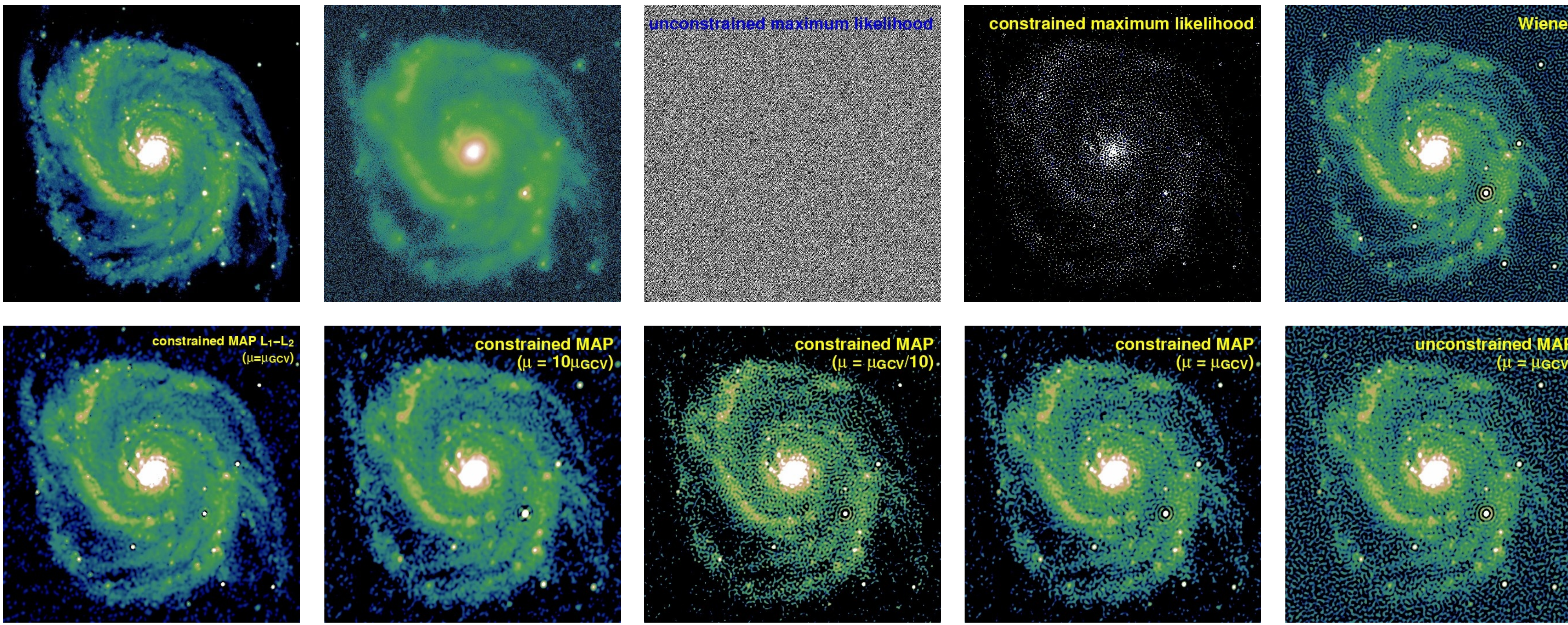
et $w_u = |\boldsymbol{u}|^\beta$



# Résultats des méthodes de déconvolution



Richardson-Lucy /
Expectation-Maximization (EM)



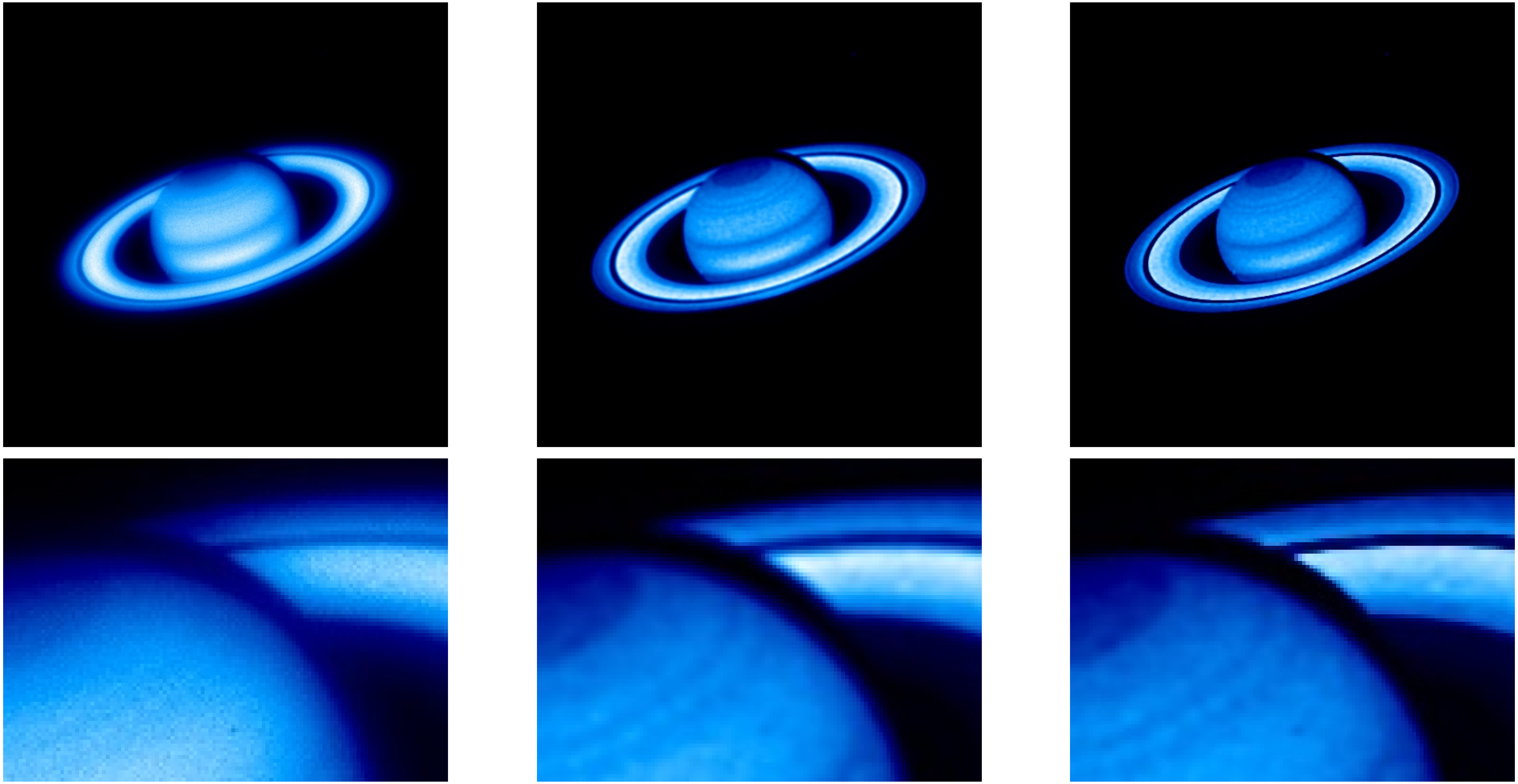
# Image HST de Saturne

Eric Thiébaut – *Applications problèmes inverses* – CPPM, Marseille 15/09/2008

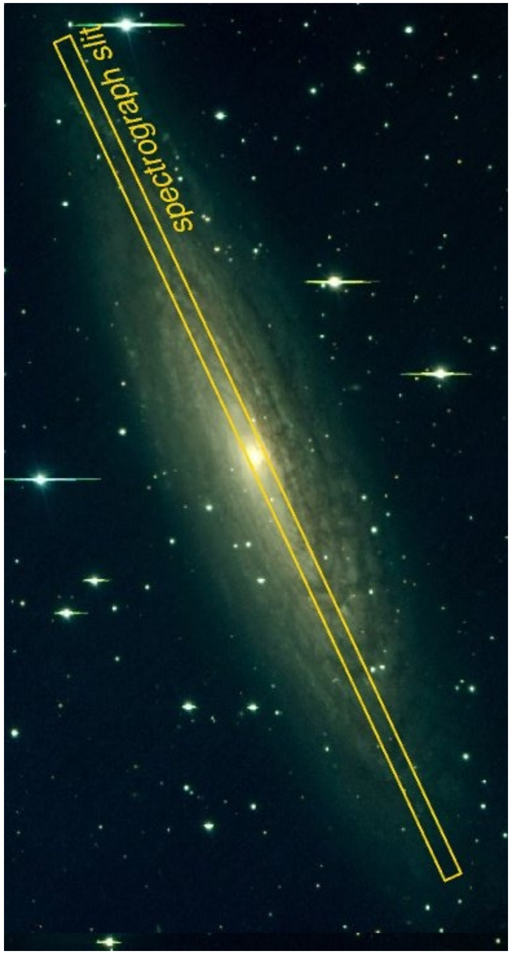
image brute

régularisation quadratique ($\ell_2$)

régularisation $\ell_2$-$\ell_1$



# Dynamique dans un disque galactique mince




**observables :** LOSVD's

➡ distribution des vitesses (cinématique) $F_\phi(R, v_\phi)$

**inconnues :** distribution des orbites $f(\epsilon, R\, v_\phi)$

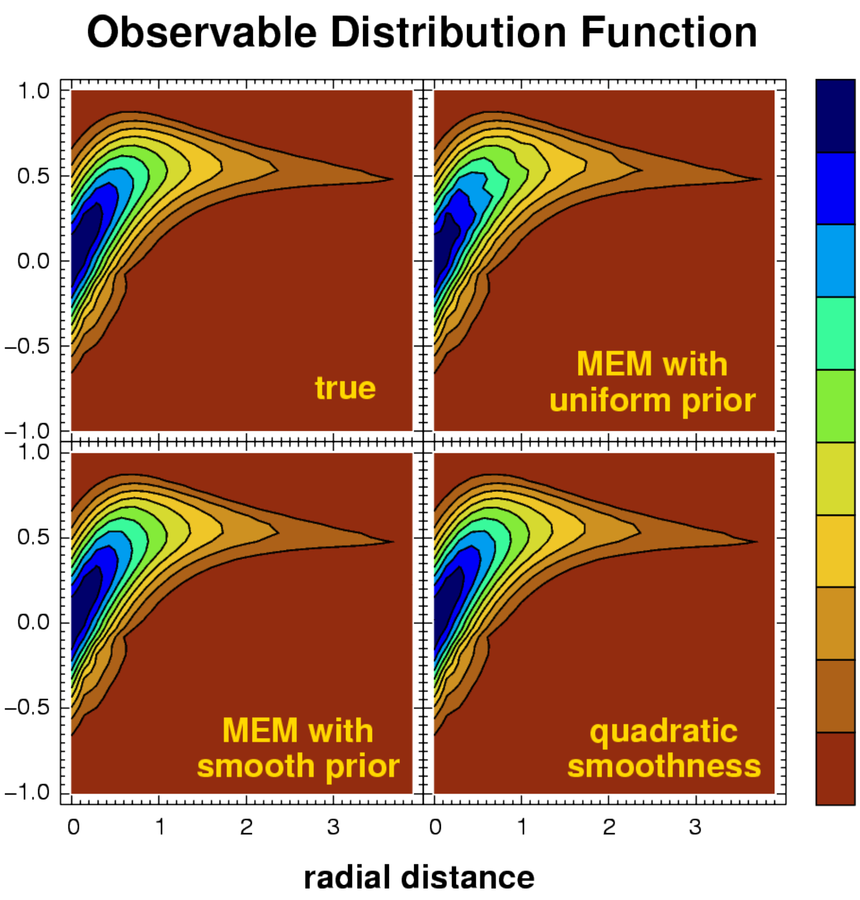
**hypothèses :**

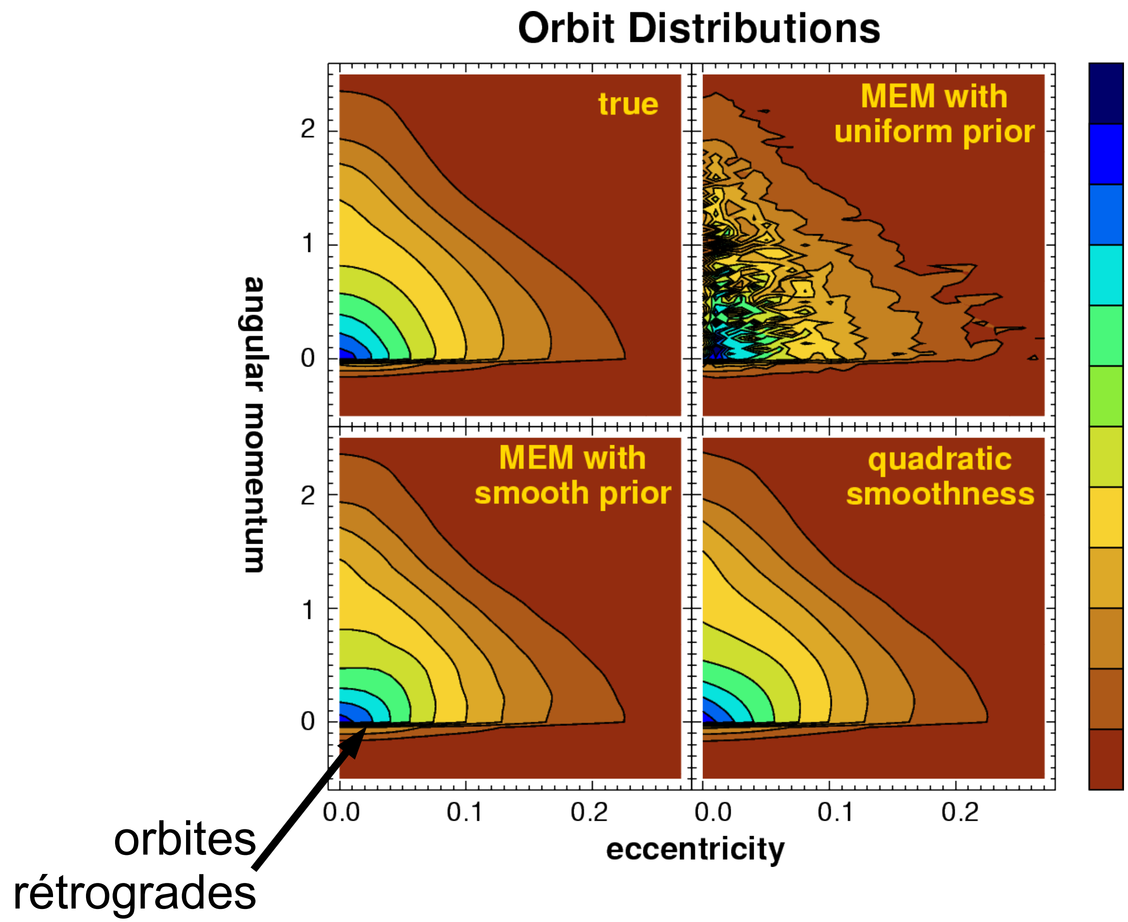
- disque mince (équation d'Abel)
- cinématique du gaz HI
  ➡ potentiel gravitationnel $\psi(R)$

$$F_\phi(R, v_\phi) = \sqrt{2} \int_{\frac{1}{2} v_\phi^2 - \psi(R)}^{0} \frac{f(\epsilon, R\, v_\phi)}{\sqrt{\epsilon + \psi(R) - \frac{1}{2} v_\phi^2}} \, \mathrm{d}\epsilon$$

# Pertinence du ***type*** de régularisation






**observables :** $F_\phi(R, v_\phi)$

**paramètres :** $f(\epsilon, R\, v_\phi)$

Pichon & Thiébaut, MNRAS **301**, 419 (1998)

# Déconvolution aveugle

# Déconvolution classique, myope, ou ... aveugle



## Problème de **calibration** :

- réponse du système (FEP) parfaitement connue

  → déconvolution *classique*

- FEP imparfaitement connue

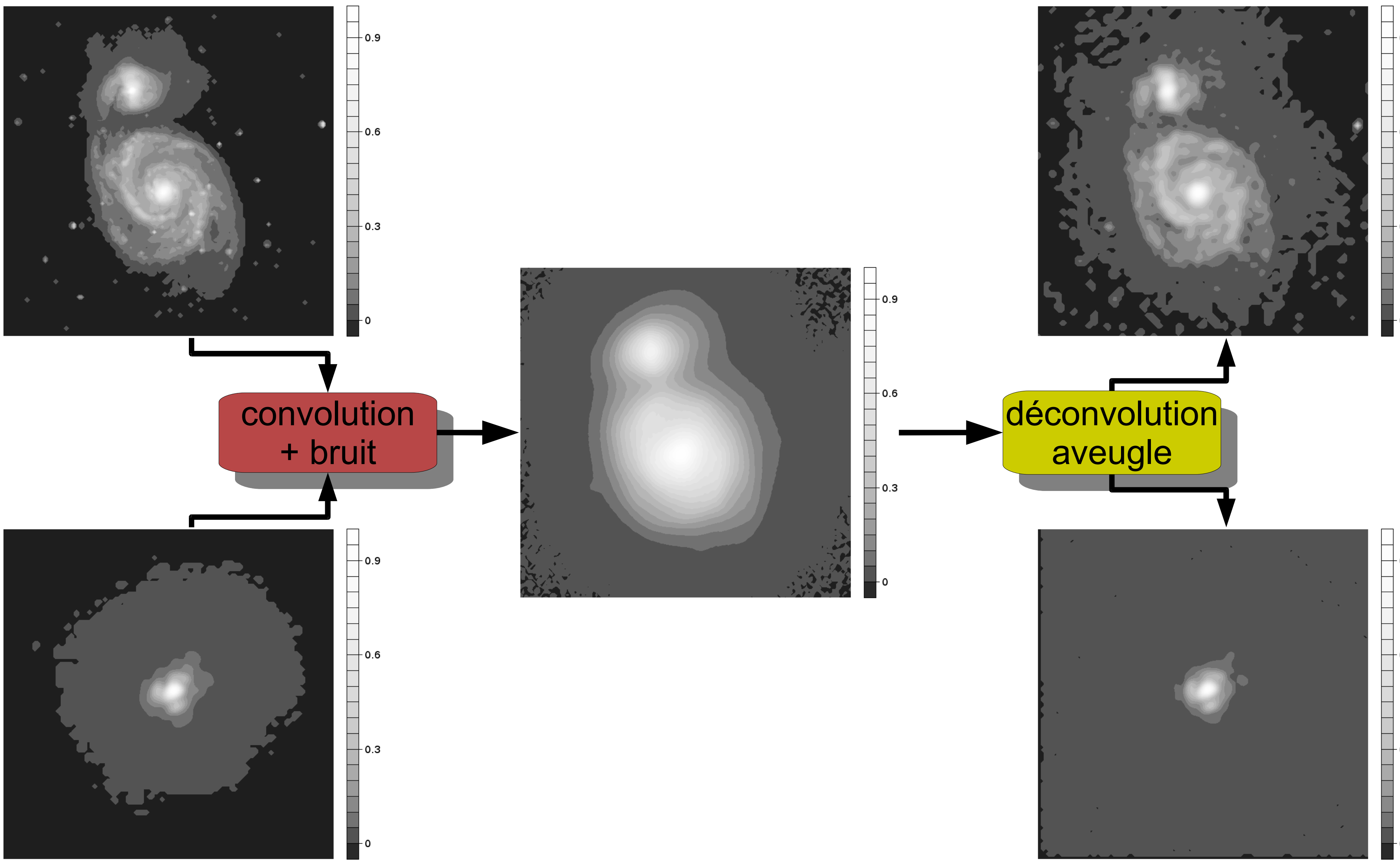
  → déconvolution *myope*

- FEP parfaitement inconnue

  → déconvolution *aveugle*

# La déconvolution aveugle à l'oeuvre





# Déconvolution aveugle appliquée en biologie

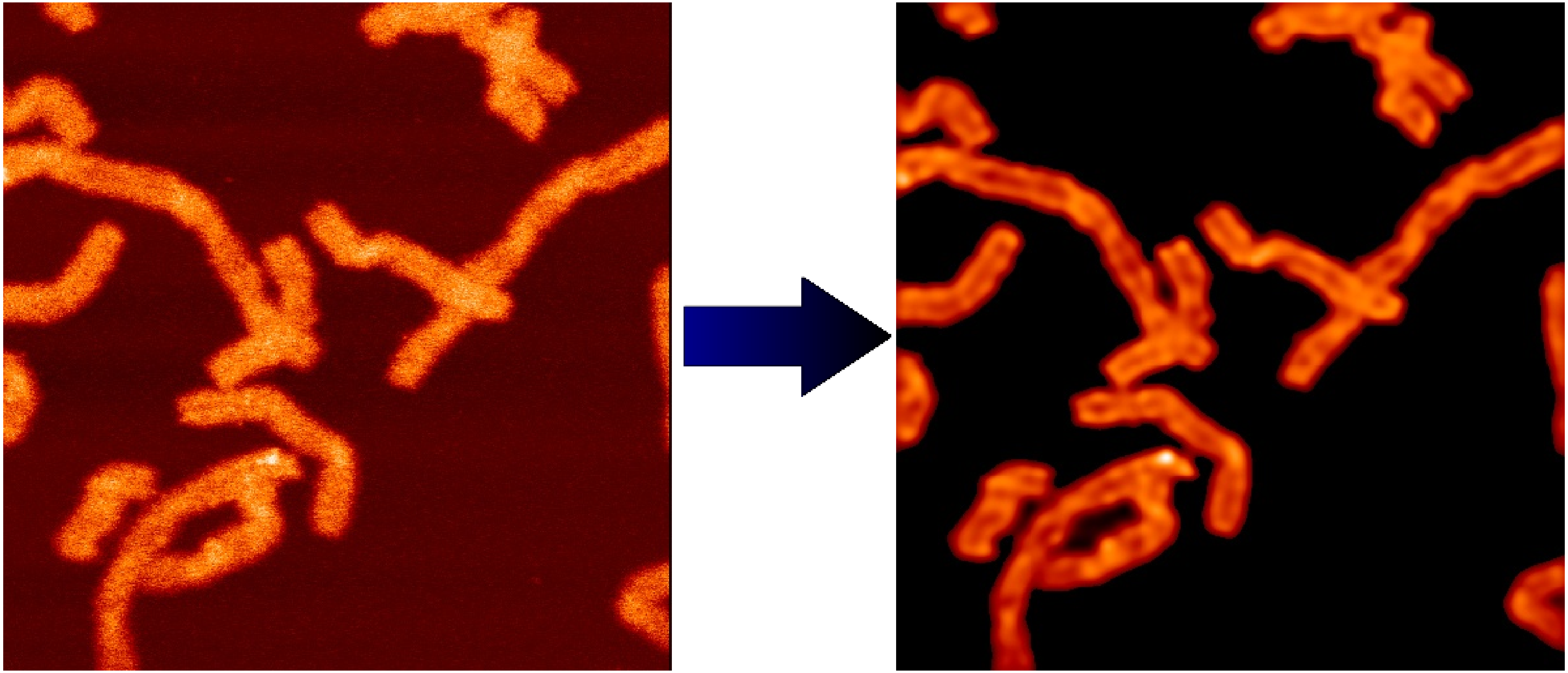
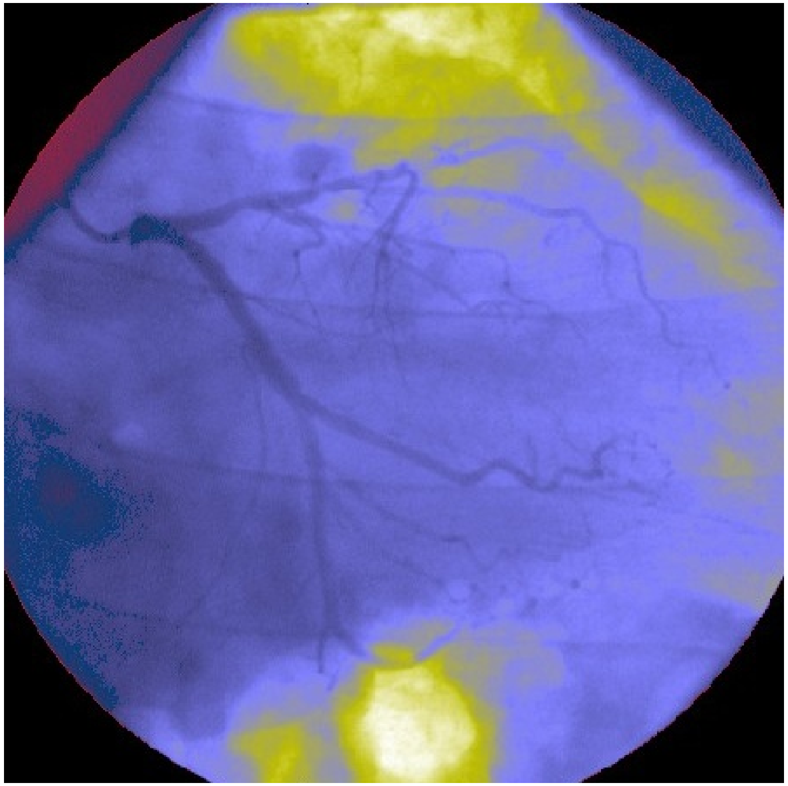
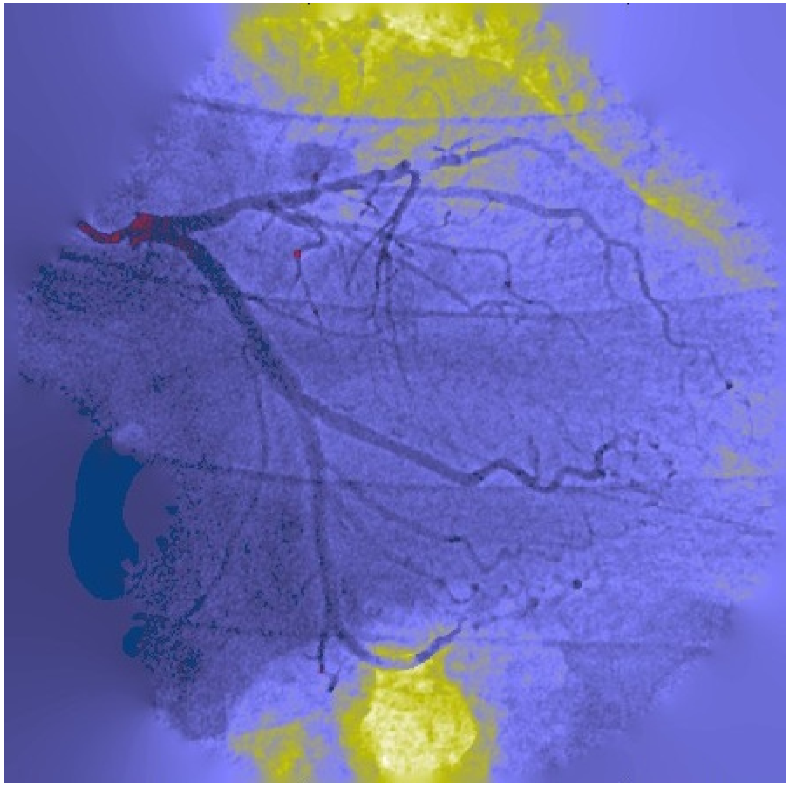


**Image de chromosomes par microscopie confocale.** Source : Jean-Claude Bernengo (Centre Commun de Quantimétrie, Université Claude Bernard, Lyon, France). Reconstruction par logiciel ***MAAD*** (CRAL).

# Déconvolution aveugle appliquée en imagerie médicale



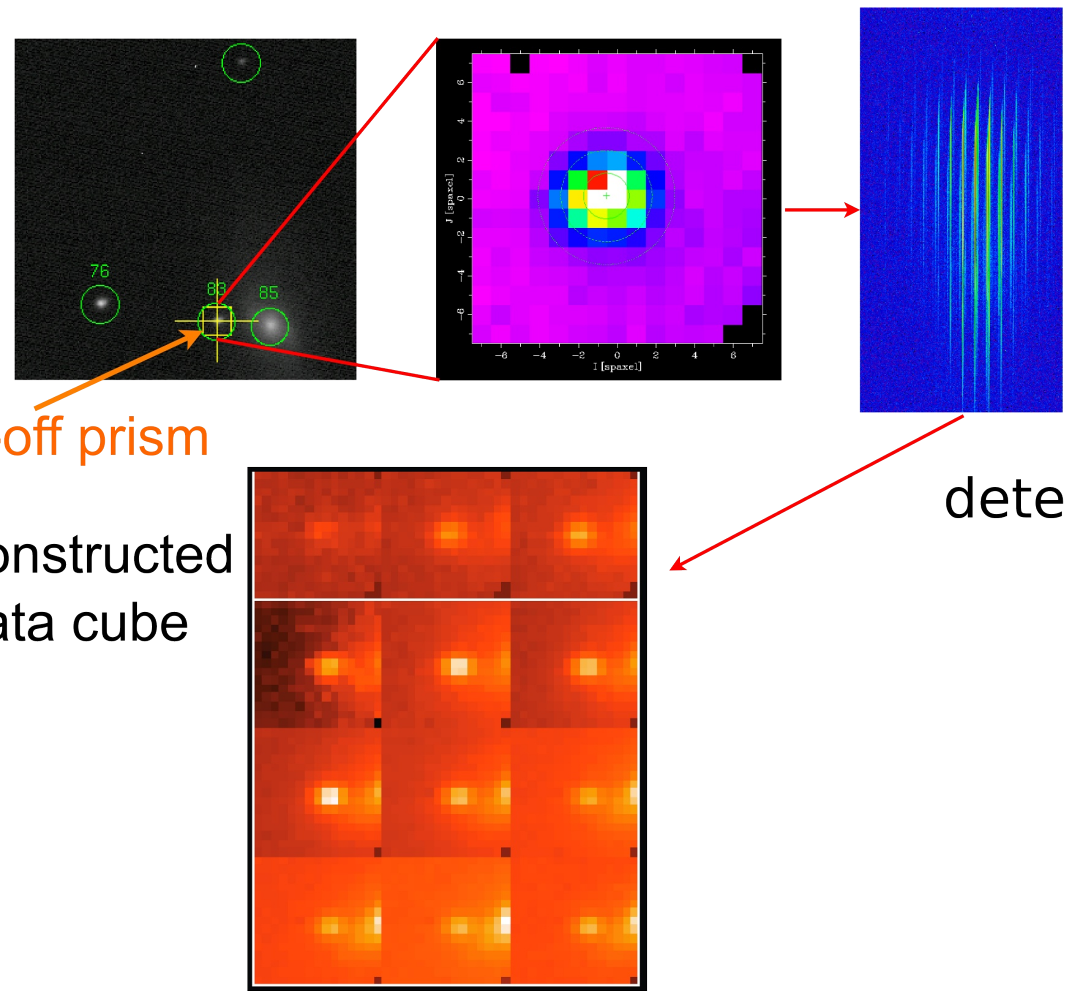


données/modèle 3-D (x,y,t)

**Vidéo coronarographique** obtenue à l'hôpital de la Croix-Rousse (Lyon). Traitement : Ferréol Soulez (CRAL/LHC/CPE).

# Recontruction multi-dimensionnelle hétérogène

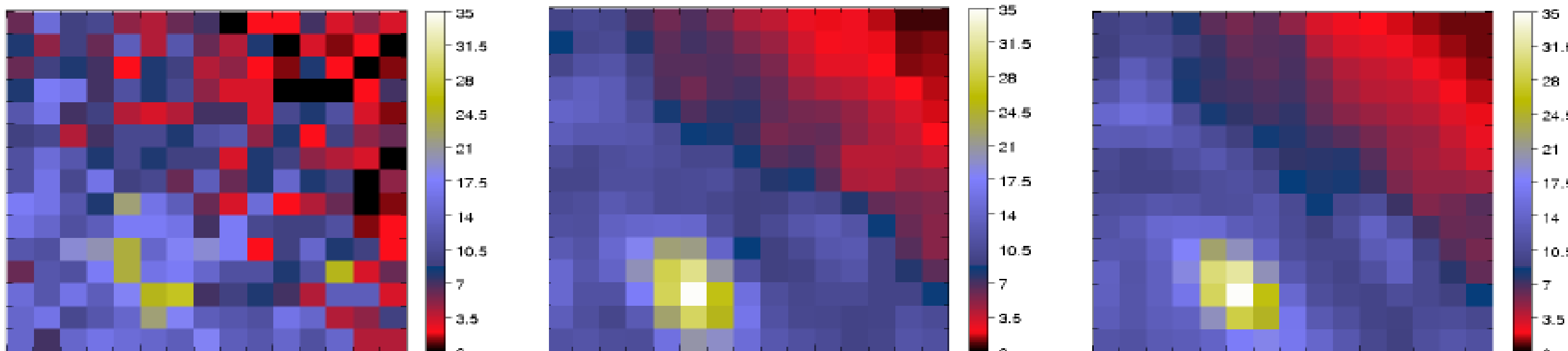
# SNIFS : spectrographe intégral de champ pour les super novae



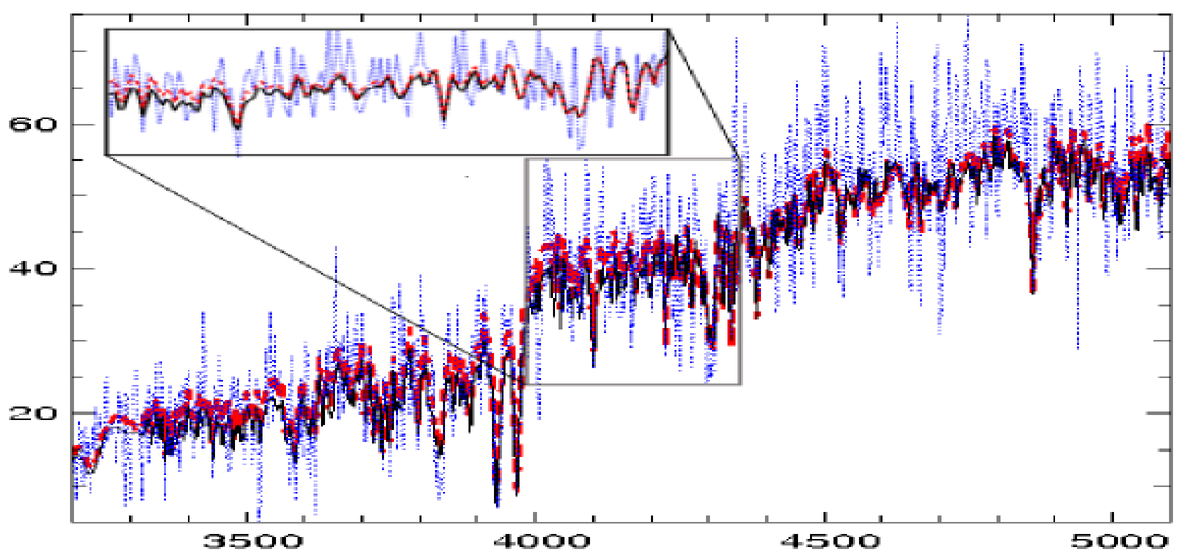
# Reconstruction 3-D (x,y,λ)



## Results on Supernovae Factory Simulation




**data (3975Å)** **reconstruction** **ground truth**

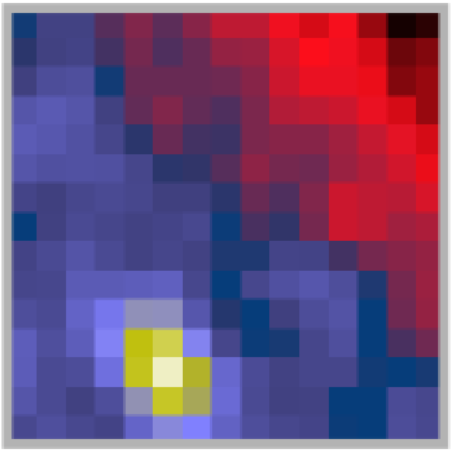



**spectrum**

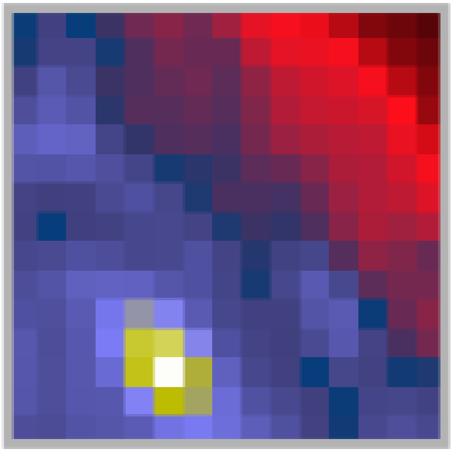
**blue: data**
**black: truth**
**red: reconstruction**

# Extrapolation du champ de vue (0)





reconstruction (3975Å)

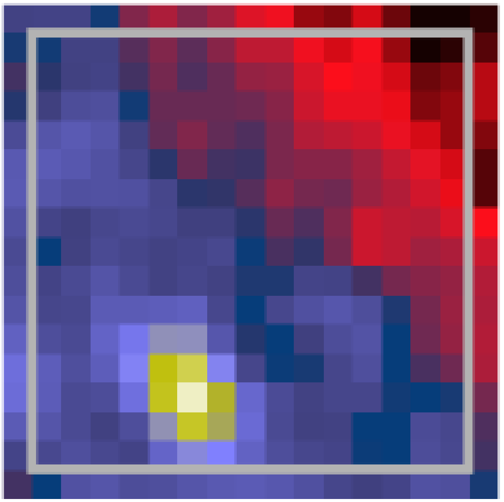


ground truth

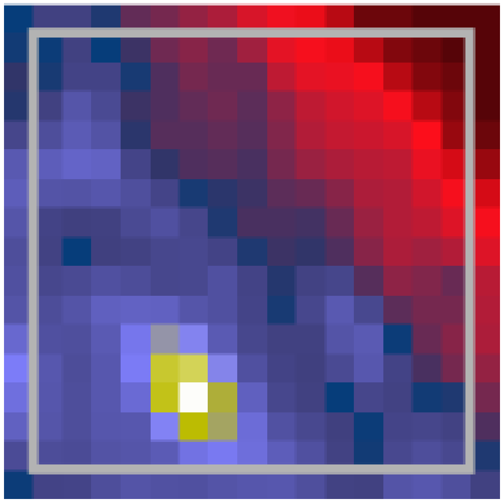
*F. Soulez et al. (ADAV 2008)*

# Extrapolation du champ de vue (1)





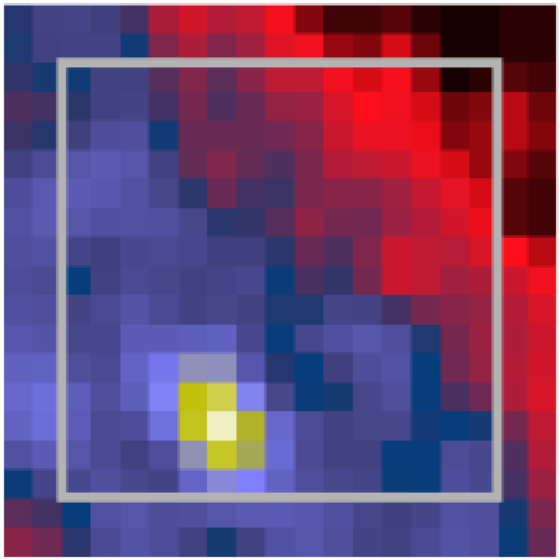
reconstruction (3975Å)



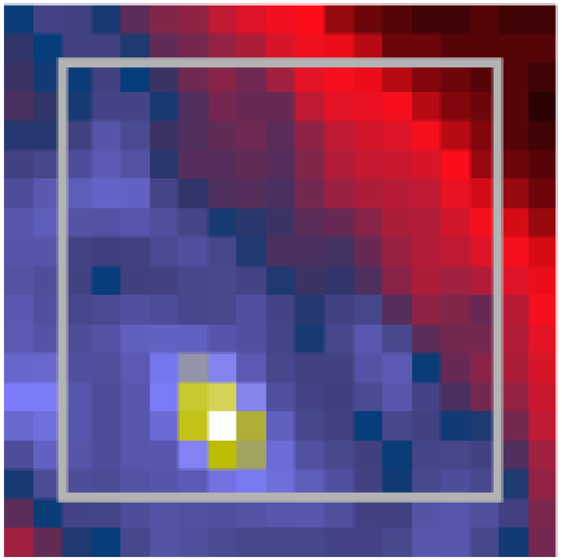
ground truth

*F. Soulez et al. (ADAV 2008)*

# Extrapolation du champ de vue (2)



reconstruction (3975Å)

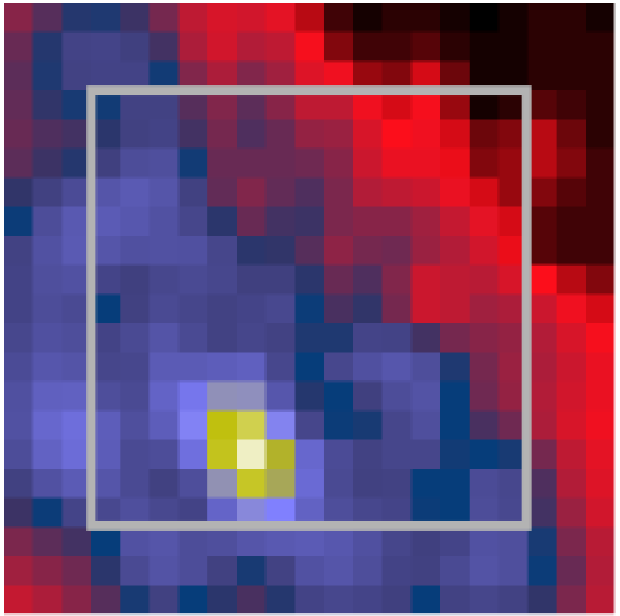


ground truth

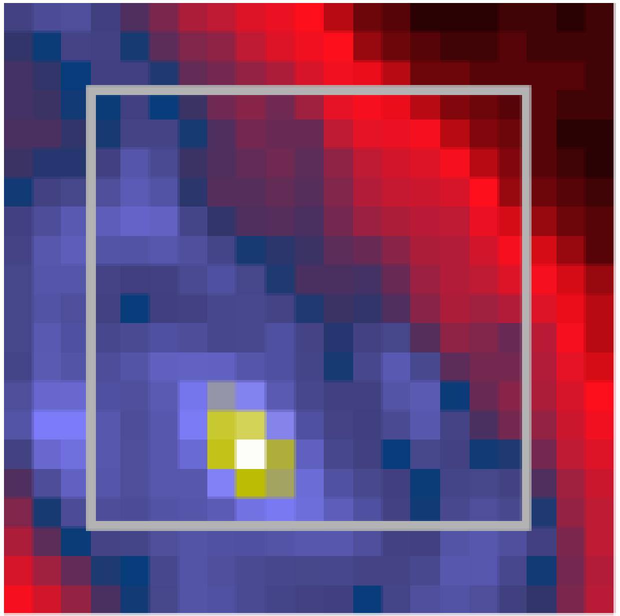
F. Soulez et al. (ADAV 2008)

# Extrapolation du champ de vue (3)





reconstruction (3975Å)

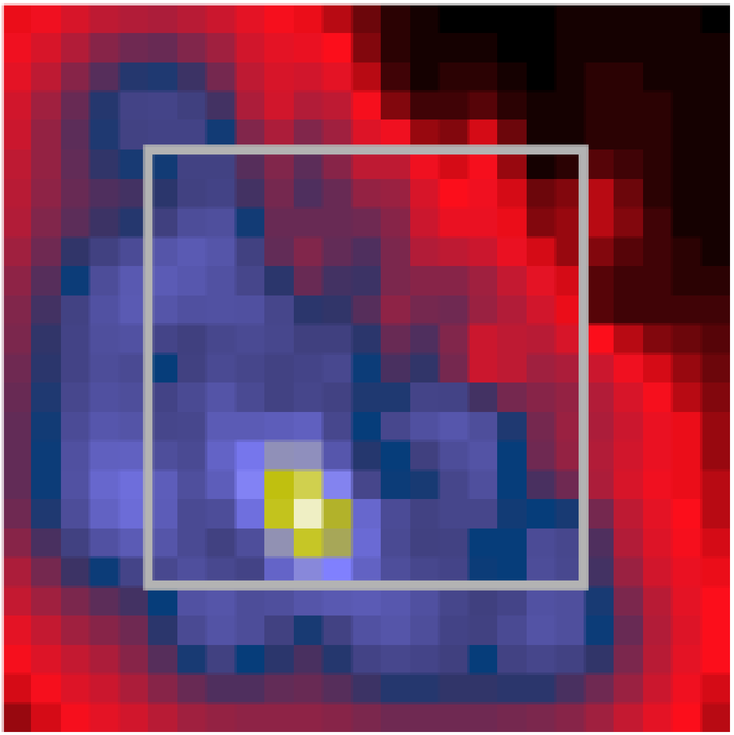


ground truth

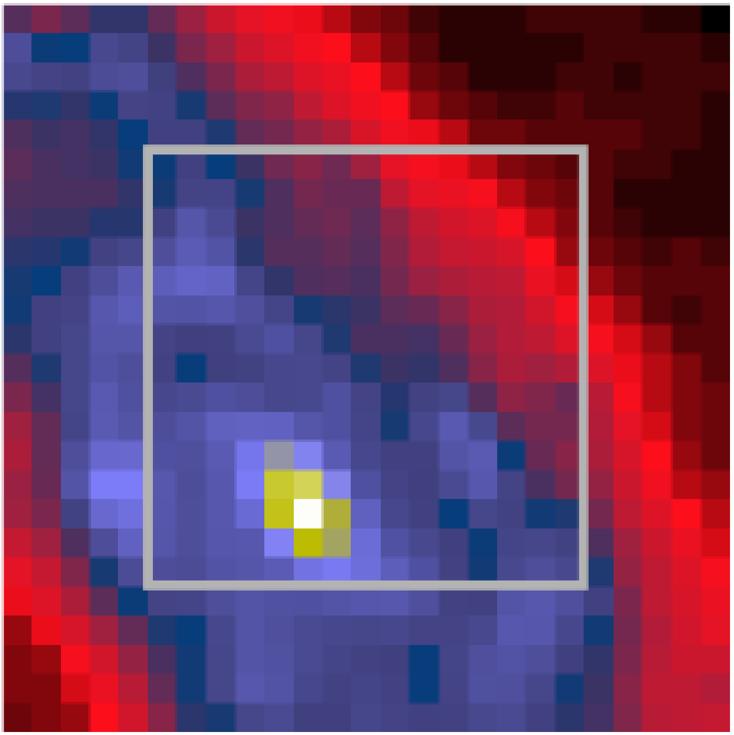
*F. Soulez et al. (ADAV 2008)*

# Extrapolation du champ de vue (5)





reconstruction (3975Å)

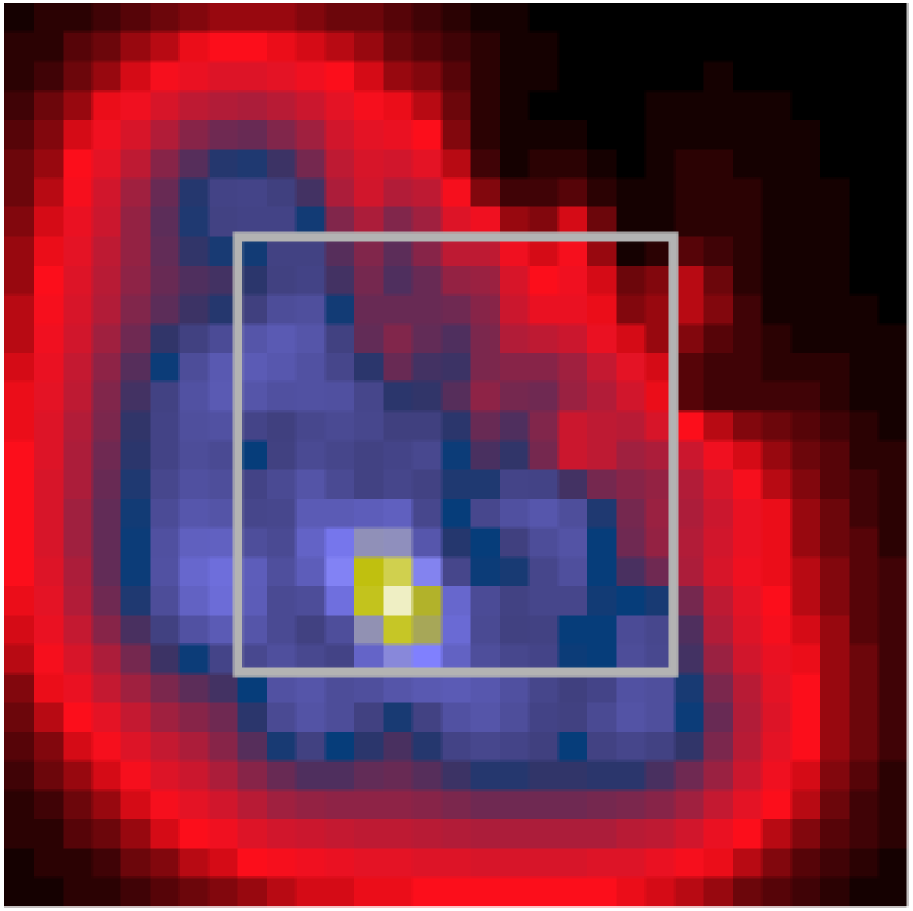


ground truth

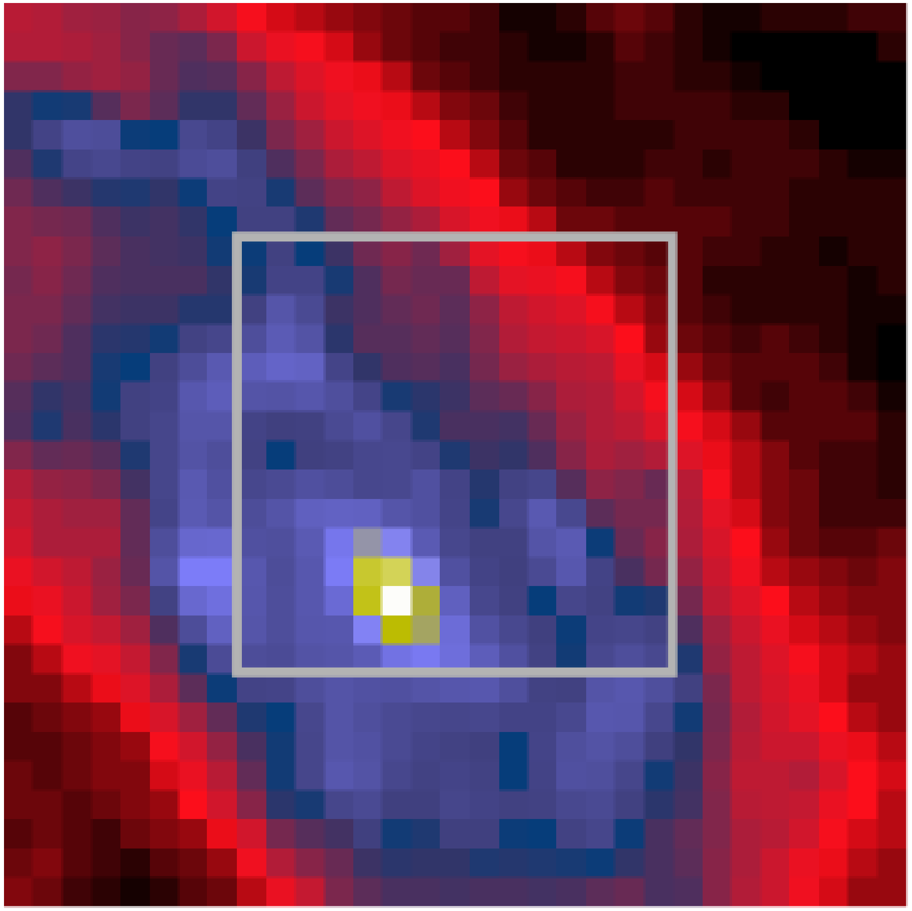
*F. Soulez et al. (ADAV 2008)*

# Extrapolation du champ de vue (8)





reconstruction (3975Å)

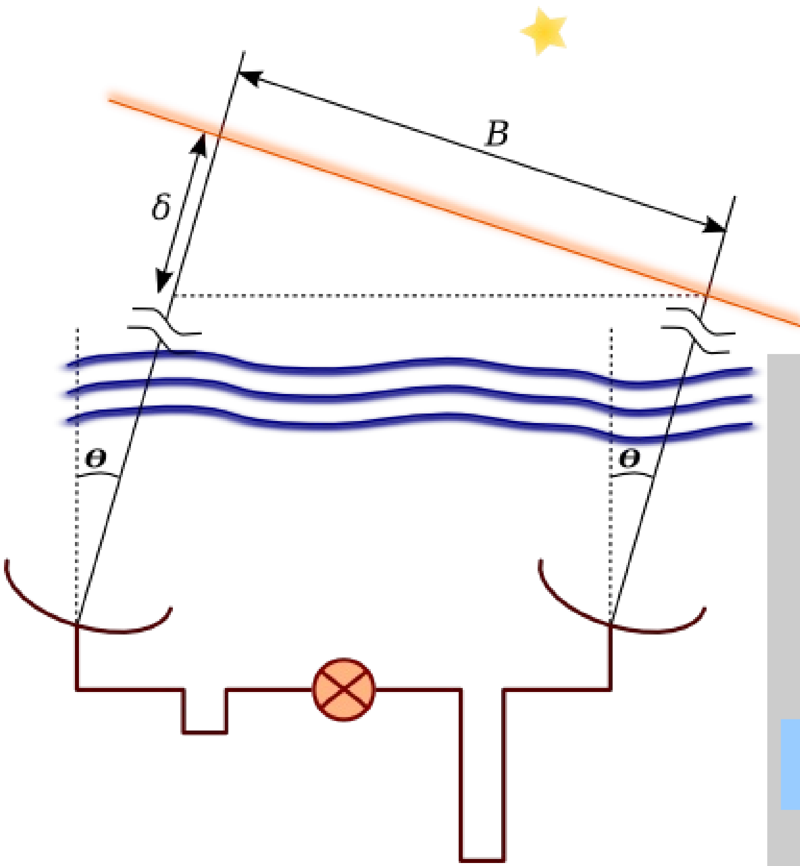


ground truth

*F. Soulez et al. (ADAV 2008)*

# Interférométrie

# Principe de l'interférométrie optique




mesure = **visibilité complexe** *instantanée* :

$$V_{1,2}(t) = \hat{I}(\boldsymbol{\nu}_{1,2})\, T_1^*(t)\, T_2(t)$$

transformée de Fourier de la distribution d'intensité de l'objet

fonctions de transfert de l'amplitude complexe des télescopes

fréquence spatiale :

$$\boldsymbol{\nu}_{1,2} = \frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{\lambda}$$

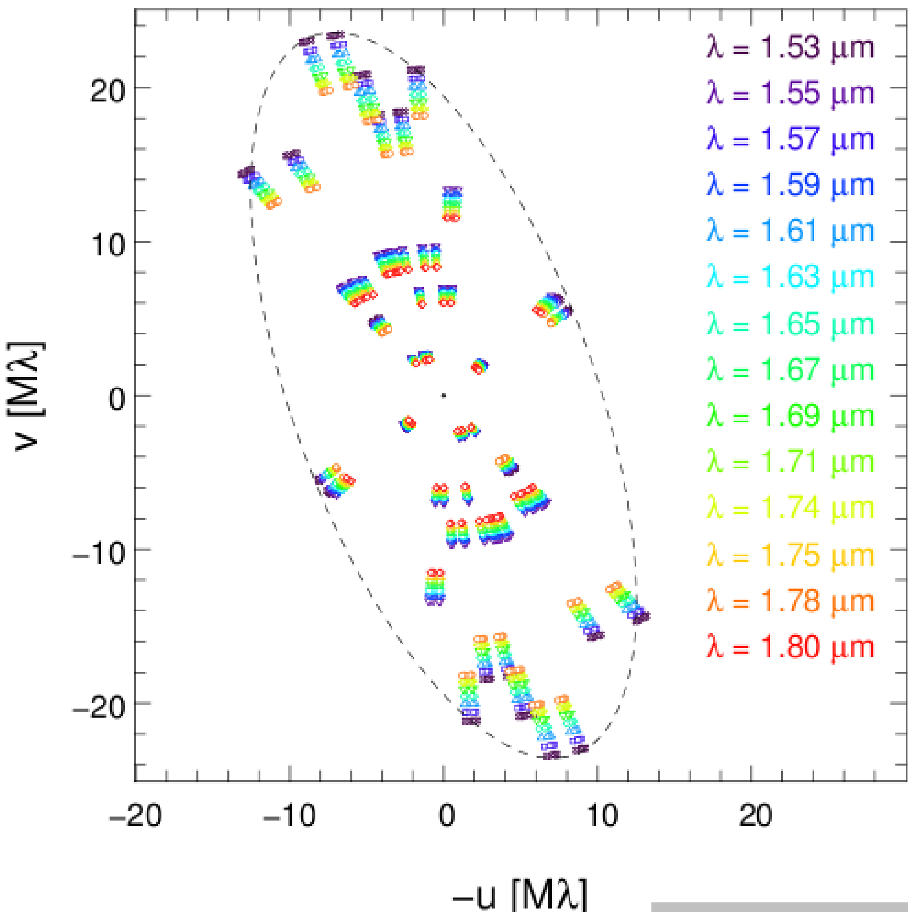
base projetée ($\boldsymbol{B}$)

longueur d'onde

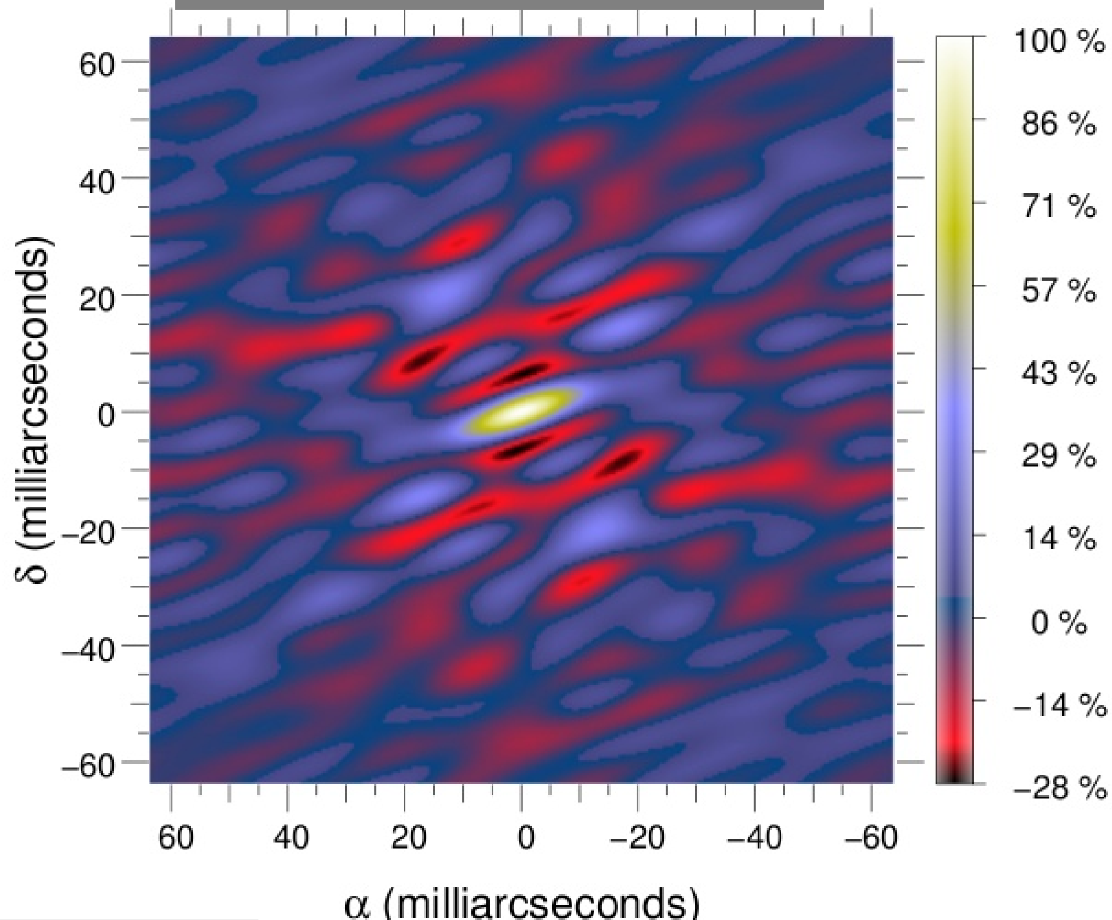
# Réponse impulsionnelle brute, couverture $(u,v)$



fréquences spatiales observées




réponse impulsionnelle brute




objet : α Boo (Arcturus)
IOTA/IONIC interferometer
source : S. Lacour *et al.* (2007)

# Le problème de la turbulence



mesure de **visibilité complexe** *instantanée* : $V_{1,2}(t) = \hat{I}(\boldsymbol{\nu}_{1,2})\, T_1^*(t)\, T_2(t)$

fonction de transfert d'amplitude complexe : $T_k(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi_k(t)}$ (après calibration photométrique)

déphase aléatoire : $\phi_k(t) = \dfrac{2\,\pi\,\delta_k(t)}{\lambda}$

temps de cohérence de la turbulence ~ 1 ms

en ***intégrant*** pendant une pause : $\langle V_{1,2}(t)\rangle = \hat{I}(\boldsymbol{\nu}_{1,2})\, \underbrace{\langle T_1^*(t)\, T_2(t)\rangle}_{0} = 0$

il faut trouver des estimateurs ***non-linéaires*** insensibles à la turbulence

# Mesures en interférométrie optique

visibilité complexe *instantanée* :

$$V_{j,k}(t) = \hat{I}(\boldsymbol{\nu}_{j,k})\, T_j^*(t)\, T_k(t)$$

$$T_k(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi_k(t)}$$

$$\langle V_{1,2}(t)\rangle = \hat{I}(\boldsymbol{\nu}_{1,2})\, \langle T_1^*(t)\, T_2(t)\rangle = 0$$

**spectre de puissance** :

$$\langle |V_{1,2}(t)|^2\rangle = |\hat{I}(\boldsymbol{\nu}_{1,2})|^2$$

**bispectre** :

$$\begin{aligned}\langle V_{1,2}(t)\, V_{2,3}(t)\, V_{3,1}(t)\rangle &= \hat{I}(\boldsymbol{\nu}_{1,2})\, \hat{I}(\boldsymbol{\nu}_{2,3})\, \hat{I}(\boldsymbol{\nu}_{3,1})\, \langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}[\phi_2(t)-\phi_1(t)]+\mathrm{i}[\phi_3(t)-\phi_2(t)]+\mathrm{i}[\phi_1(t)-\phi_3(t)]}\rangle \\ &= \hat{I}(\boldsymbol{\nu}_{1,2})\, \hat{I}(\boldsymbol{\nu}_{2,3})\, \hat{I}^*(\boldsymbol{\nu}_{1,2}+\boldsymbol{\nu}_{2,3})\end{aligned}$$

# Difficultés



- non-linéarités
- pauvreté de la couverture du plan (u,v)
- manque de mesures de phase de Fourier
  (*e.g.* 1 clôture de phase pour 3 amplitudes)
- contraintes
  - positivité
  - normalisation (calibration)
- transformation de Fourier (échantillonnage spectral irrégulier)

# MIRA : reconstruction d'image par l'approche *Problèmes Inverses*

**modèle direct** :

$$I(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{k=1}^{k=N} x_k \, b_k(\boldsymbol{\theta}) \quad \xrightarrow[\text{interpolation spectrale}]{\text{T.F.}} \quad \hat{I}(\boldsymbol{\nu}_j) = \sum_{k=1}^{k=N} A_{j,k} \, x_k$$

paramètres

base de fonctions

reconstruction d'image reformulée comme un problème d'***optimisation sous contraintes*** :

$$\boldsymbol{x}_{\text{best}} = \arg\min_{\boldsymbol{x}} \{ f_{\text{data}}(\boldsymbol{x}) + f_{\text{prior}}(\boldsymbol{x}) \} \quad \text{tel que :} \quad x_k \geq 0, \forall k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{k=N} x_k = 1$$

**attache aux données**
(cohésion du modèle avec les données, *e.g.* chi-2 : $\chi^2$)

**régularisation**
(cohésion du modèle avec les a priori, *e.g.* champ de vue limité)

**positivité**

**normalisation**

# Terme d'attache aux données



**radio-astronomie**

mesures de visibilités complexes :

$$f_{\text{data}}(\boldsymbol{x}) = (\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{x}-\boldsymbol{d})^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{W}\cdot(\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{x}-\boldsymbol{d})$$
$$= \frac{1}{\sigma^2}\,\|\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{x}-\boldsymbol{d}\|^2$$

hypothèse : bruit Gaussien (2D)
pour une mesure complexe

**interférométrie optique (visible / IR)**

mesures de bispectre :

$$f_{\text{data}}(\boldsymbol{x}) = \sum_k \frac{1}{\sigma_k^2}\left|\hat{x}_{j_{1,k}}\,\hat{x}_{j_{2,k}}\,\hat{x}^*_{j_{3,k}} - d_k\right|^2$$

avec $\hat{\boldsymbol{x}} \equiv \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{x}$

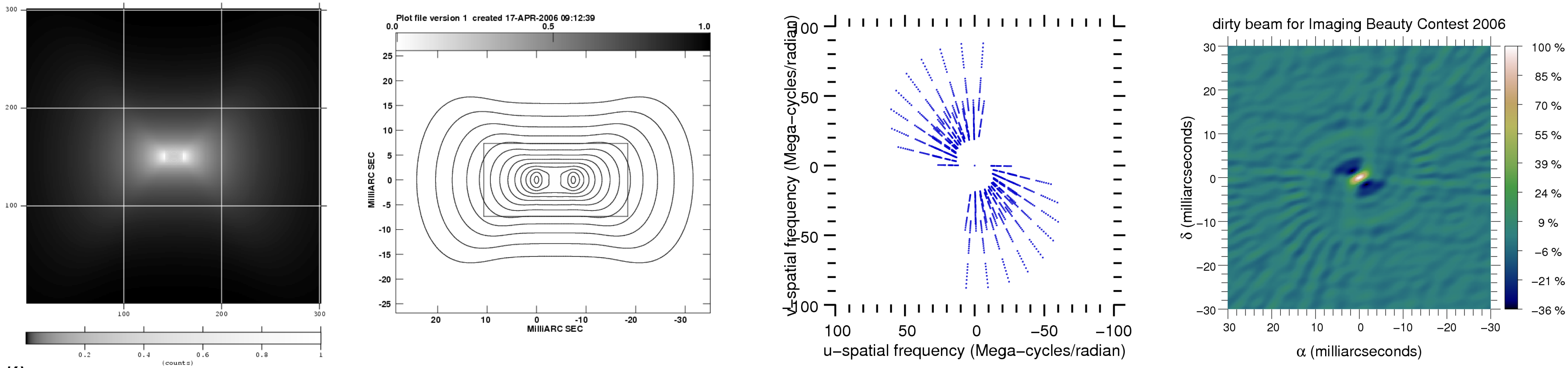
séparation des mesures de module et de phase (***enroulement de phase***)

***non-convexe***

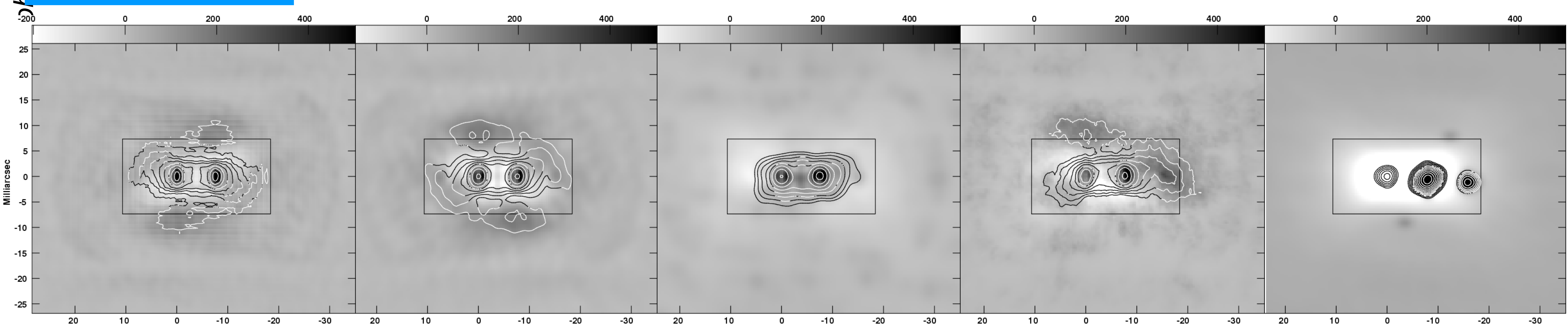
# Imaging Beauty Contest 2006

objet

(Lawson *et al.*, 2006)

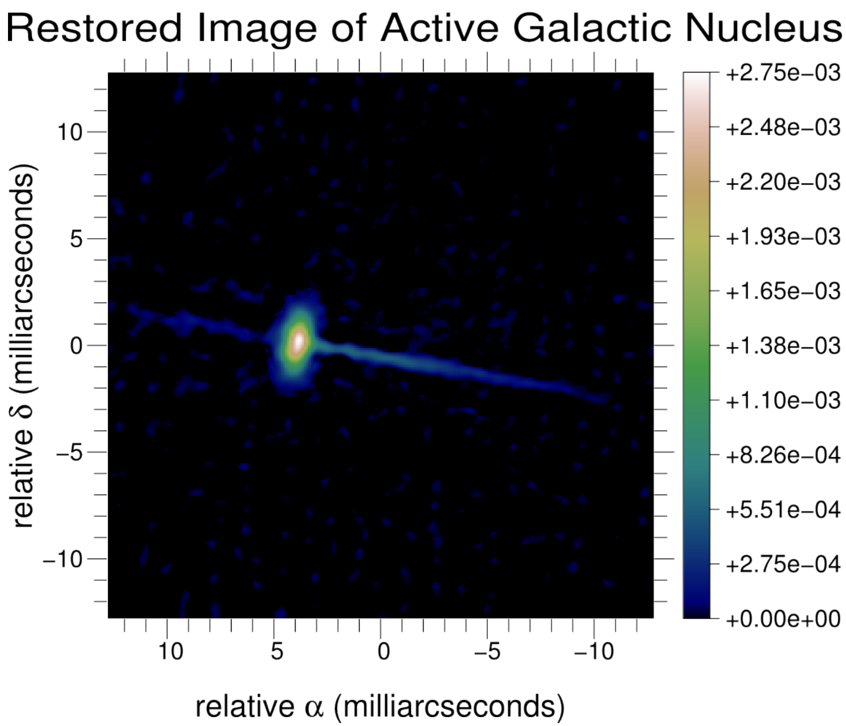


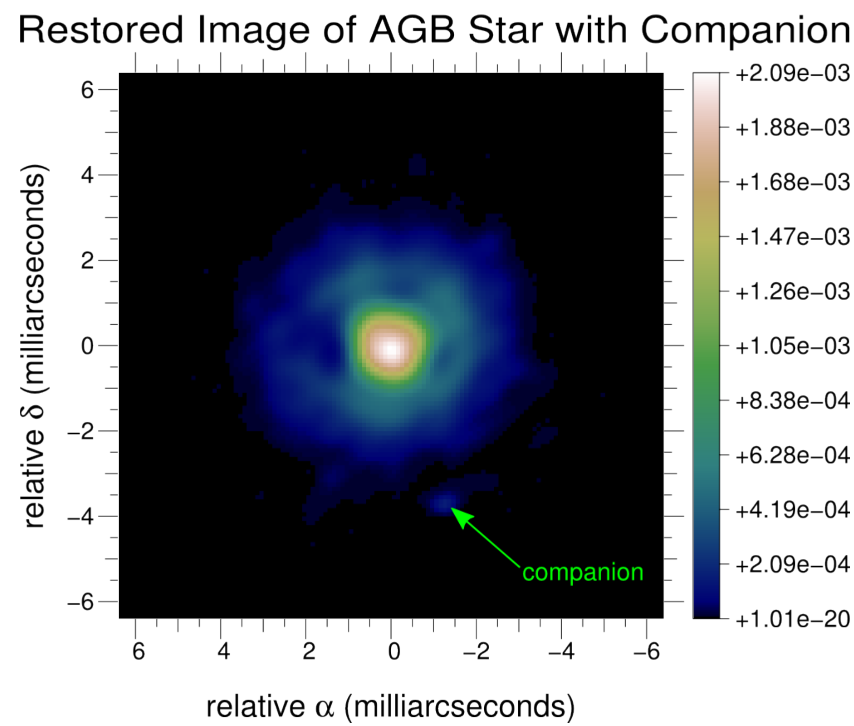

reconstructions

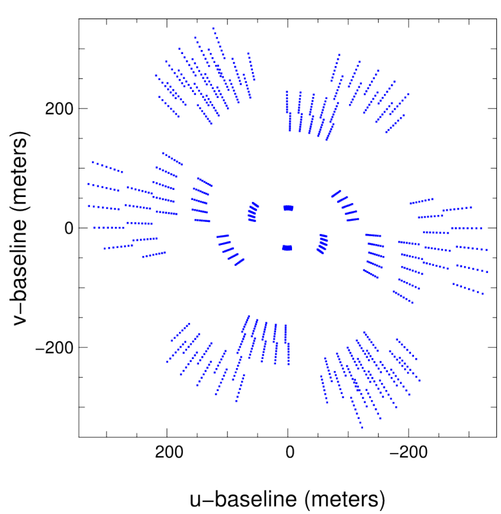



BSMEM MIRA building-blocks MACIM recursive phase reconstruction

# MIRA Results for Imaging Beauty Contest 2008



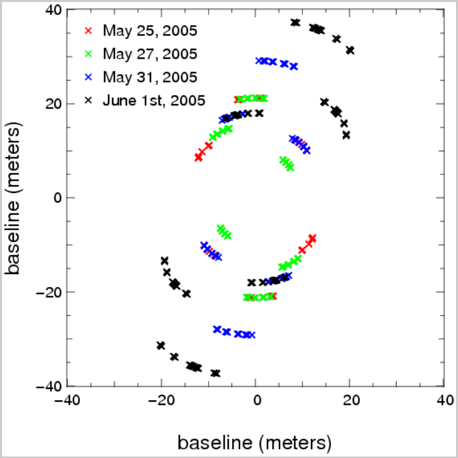



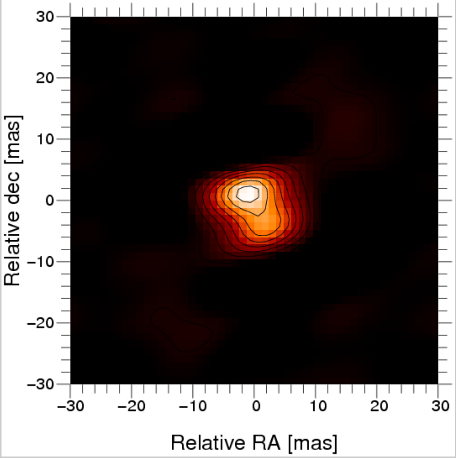

MIRA = Multi-aperture Image Reconstruction Algorithm
(Thiébaut, 2002 ; Thiébaut, 2008)

# Application à des données *réelles*

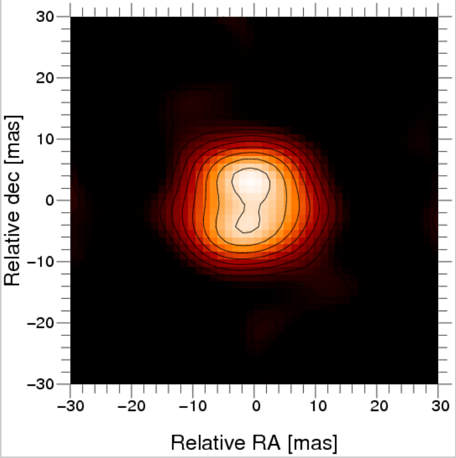


## Chi-Cygni



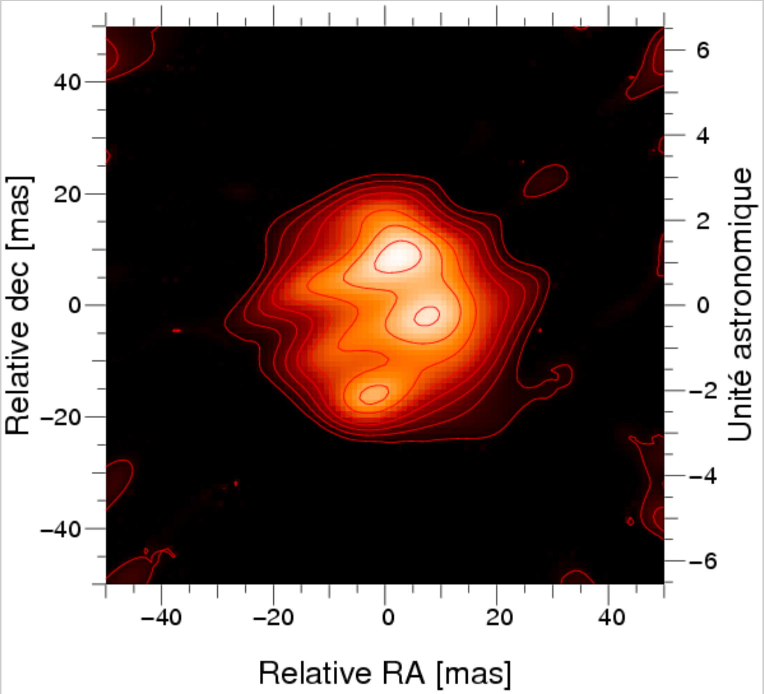



(mai-juin 2005)



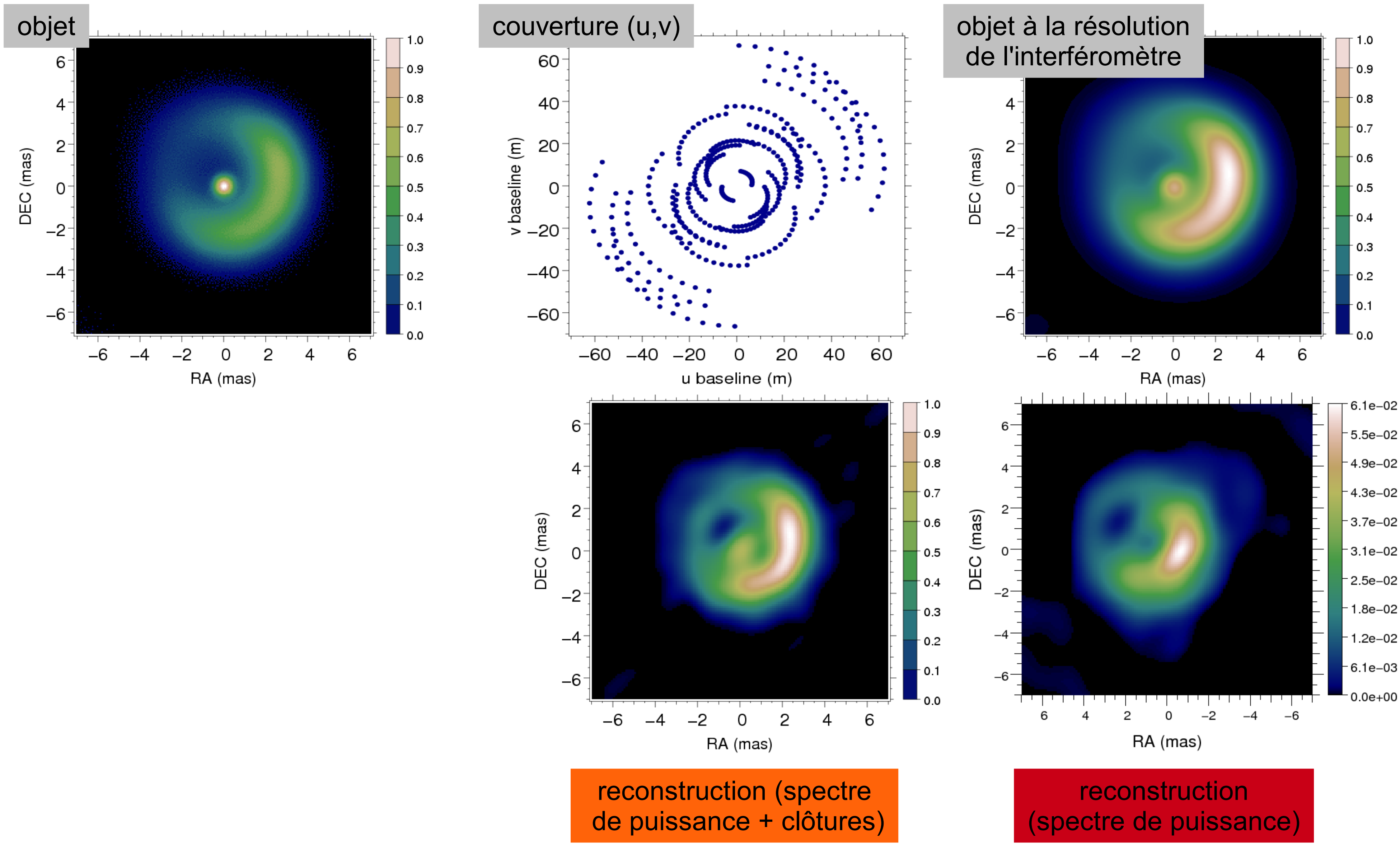
(octobre 2005)

## Bételgeuse



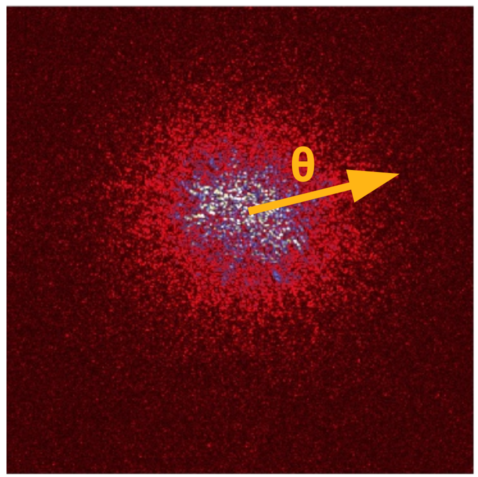

Source : **S. Lacour** *et al.*
Instrument : **IOTA** (H band 1,65µm)
Algorithme : **MIRA**

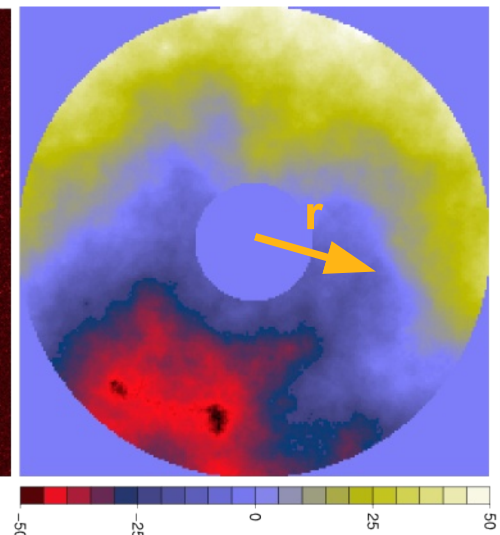
# Reconstruction avec/sans information de phase



# Restoration de phase

# Restoration de phase : modèle direct




image

carte de phase
(différence de marche)

fonction pupille (normalisée)

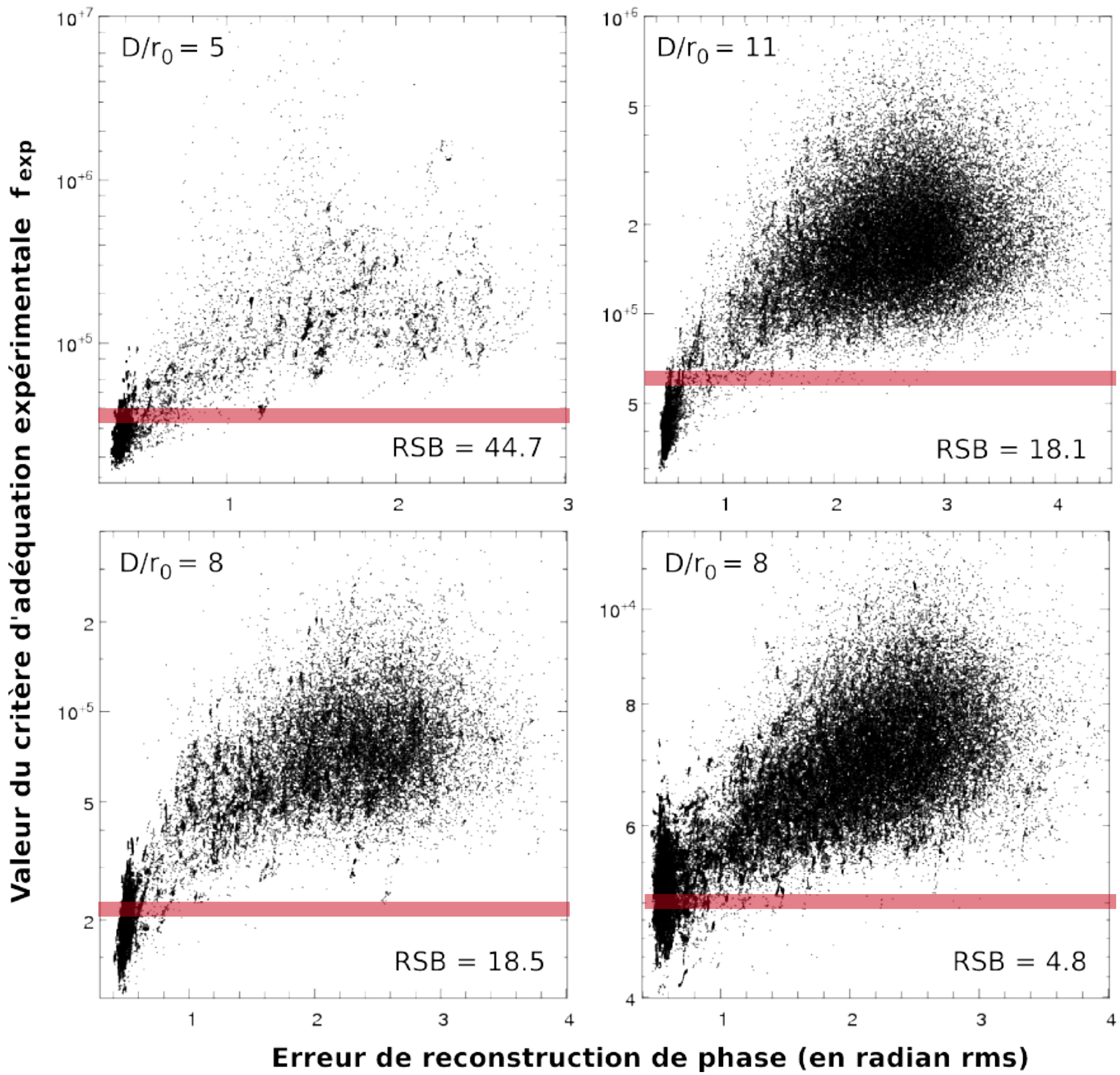
longueur d'onde

problème de restoration de phase ***très non-linéaire*** et ***multi-modal***
➔ ***optimisation globale*** à grand nombre de paramètres (>$10^3$)

# Pertinence du critère expérimental

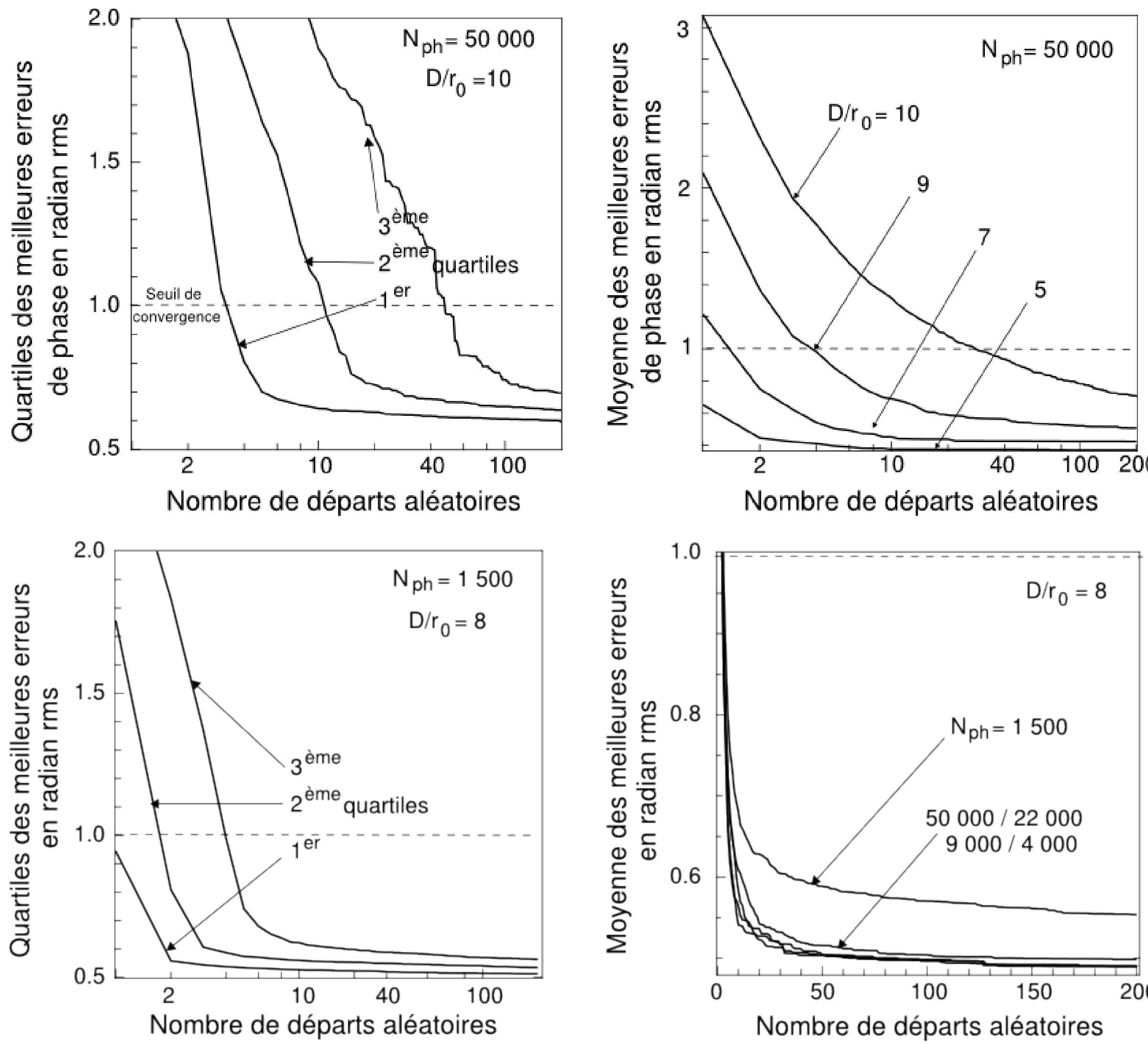


$\| \text{model} - \text{data} \|^2$




$\| \varphi_{\text{true}} - \varphi_{\text{model}} \|$

# Convergence de l'optimisation globale



# Algorithme de restoration de phase



- **Stratégie d'optimisation globale :**

  **1** tirage aléatoire d'une phase (selon statistique Kolmogorov)

  **2** optimisation locale limitée à quelques (50-75) pas et contrôlée par la régularisation

  **3** si $\chi^2 < \chi^2$-seuil, alors on poursuit l'optimisation et fin ; sinon retirage

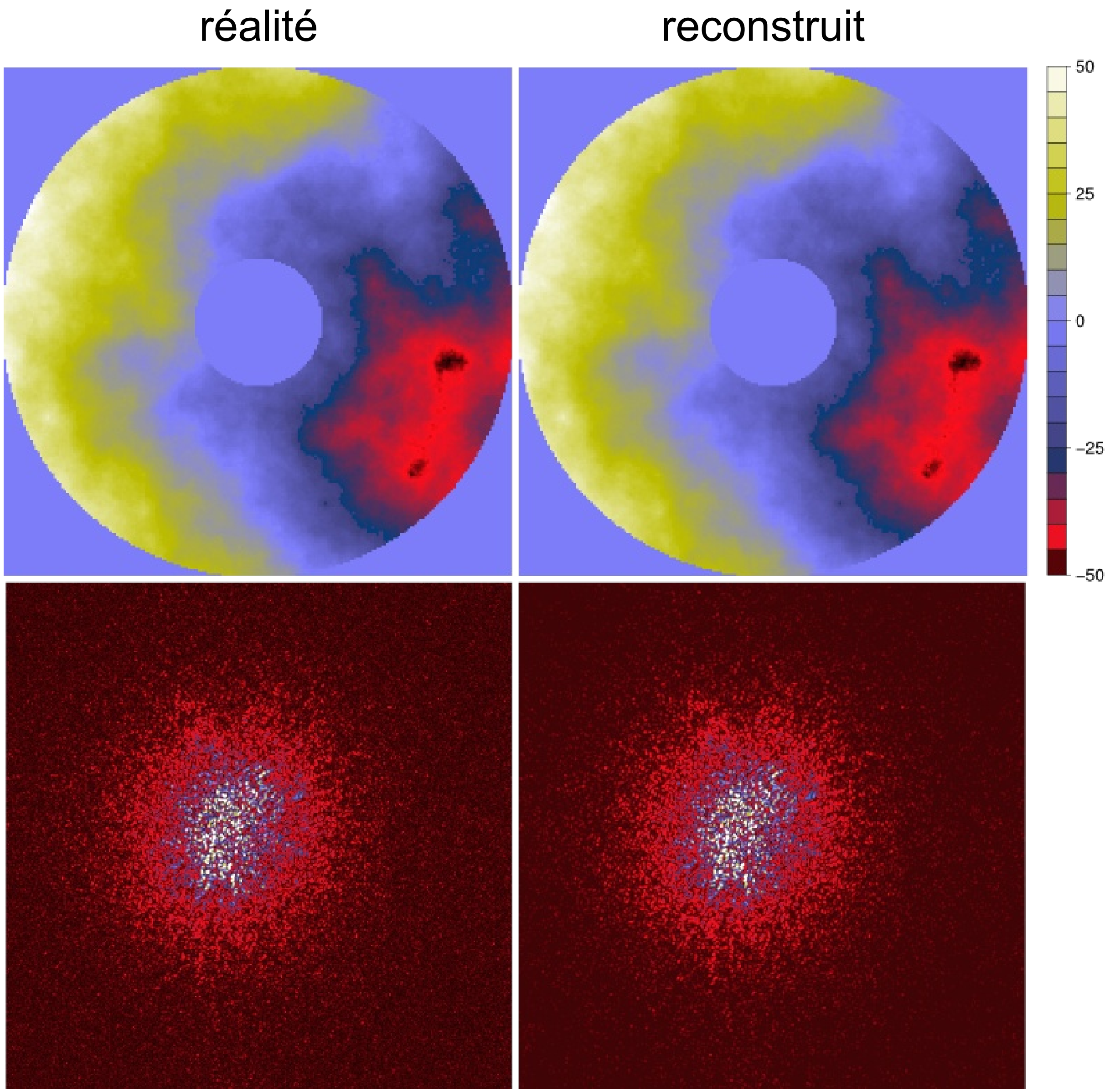
- Restoration monochromatique jusqu'à D/ro = 11.

Rondeau, Thiébaut, Tallon & Foy,
J. Opt. Soc. Am. A **24**, 3354 (2007).

- Restoration par diversité de phase chromatique, restoration jusqu'à D/ro = 70.

Rondeau, PhD thesis (2007).

# Restoration par diversité chromatique sous très forte turbulence



# Détection

# Problèmes de détection

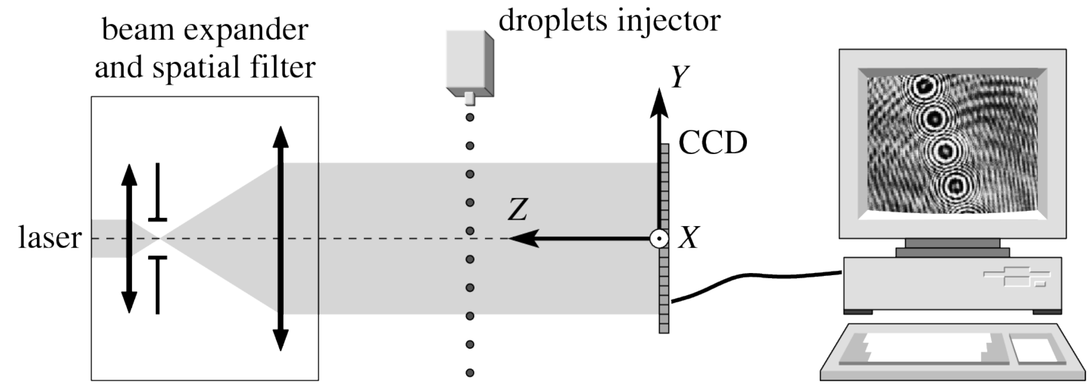


- holographie numérique
  - détection 4-D ($x,y,z,r$)
  - extension du champ utile
- détection d'exoplanètes
  - interférométrie à annulation de phase
  - approche Bayesienne
  - problème 3-D ($x,y,\lambda$)
  - détection et caractérisation des planètes

# Holographie numérique : principe

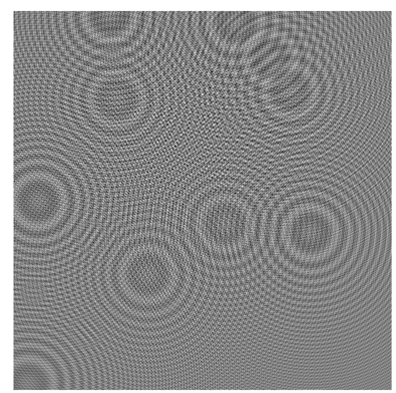


Montage en ligne de type Gabor

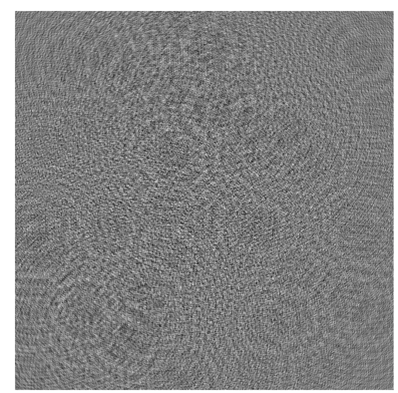



Modèle analytique dans l'approximation de Fresnel et des faibles densités

10 particules



100 particules

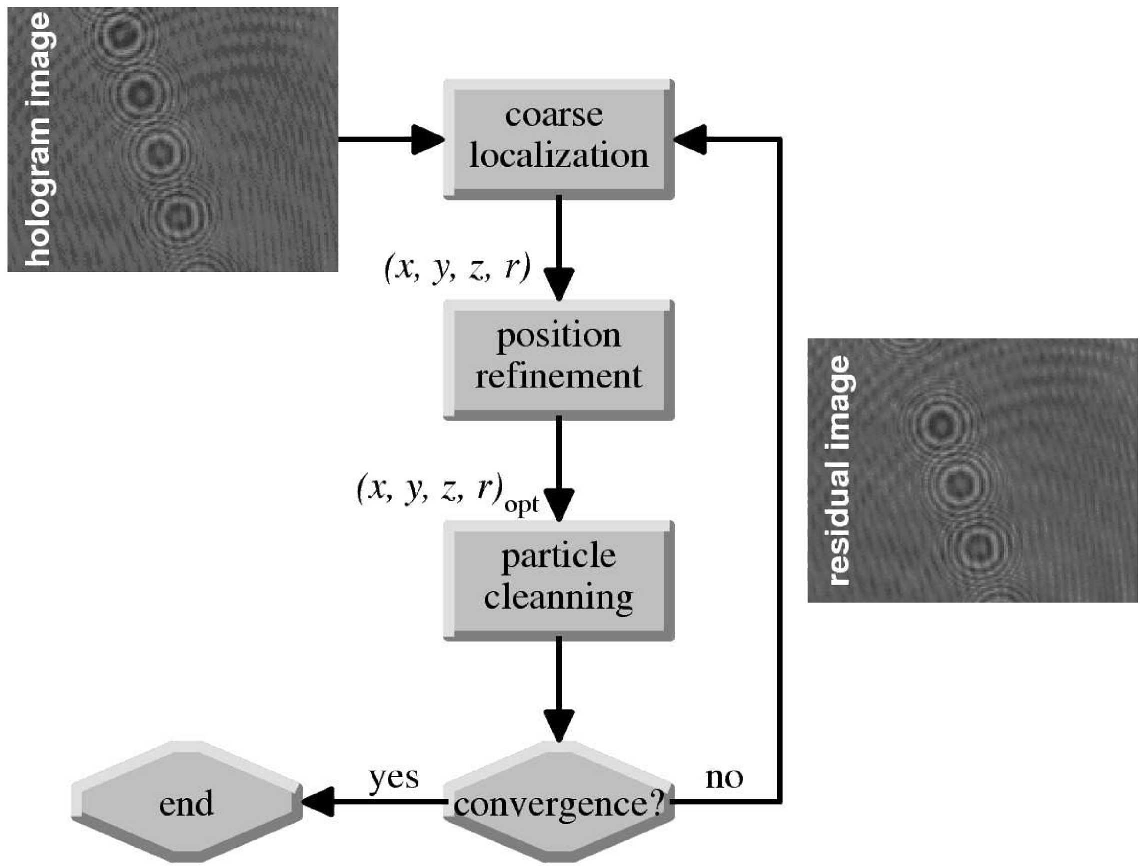


Position de la figure de diffraction → (x,y), forme → (z,r)

Applications : détection, comptage et vélocimétrie de particules

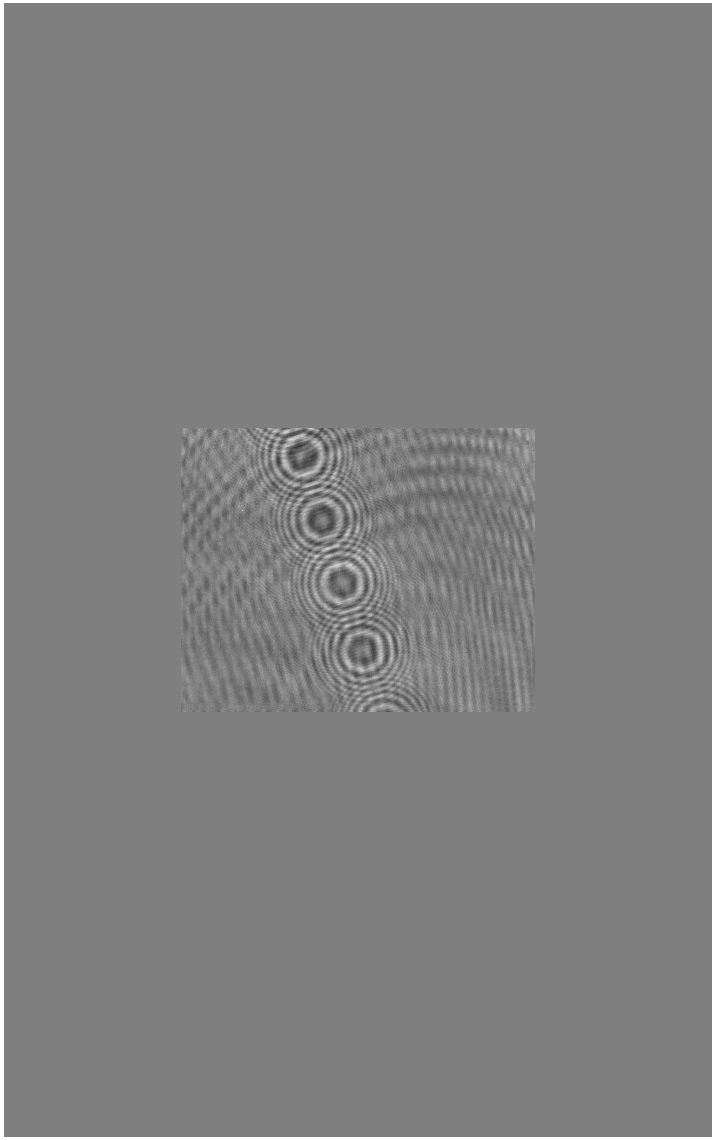
# Holographie numérique : algorithme



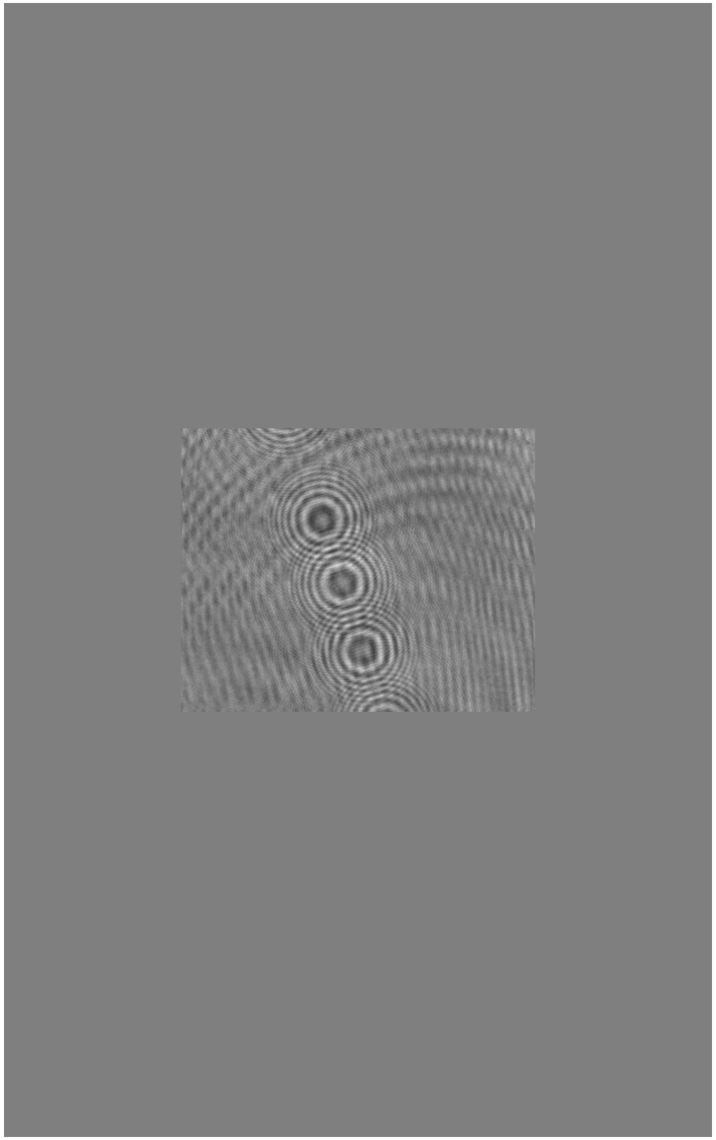


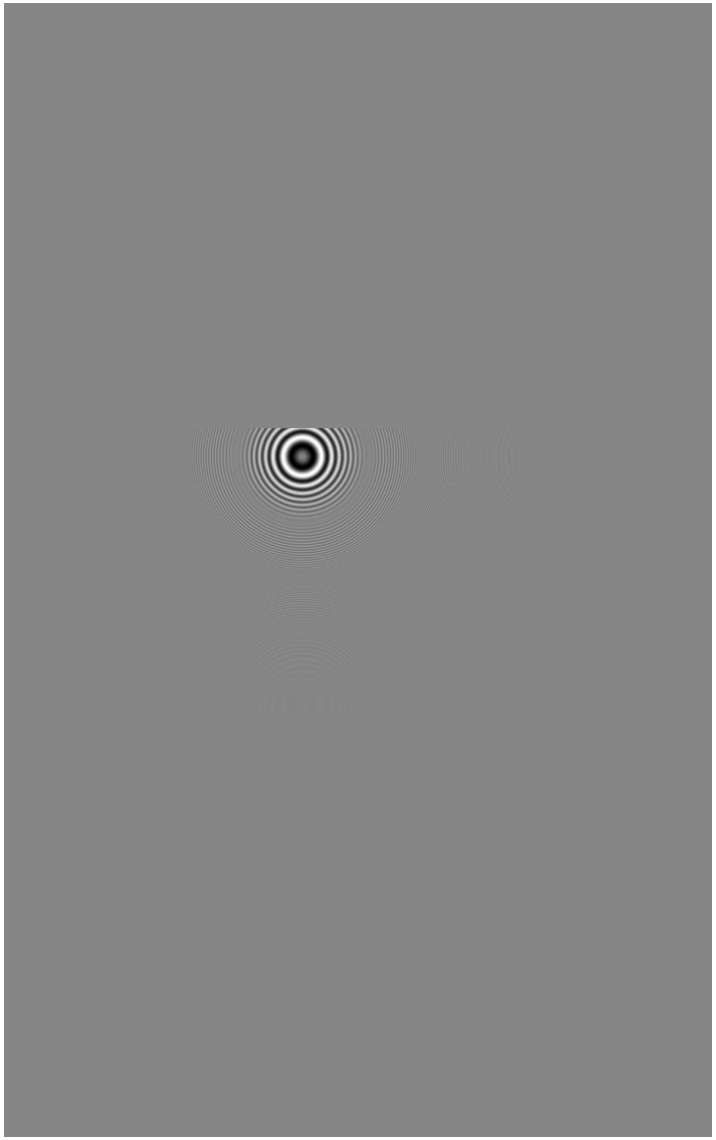

Soulez, Denis, Thiébaut, Fournier & Goepfert, JOSA-A **24**, 3708 (2007).

# Holographie numérique : détection

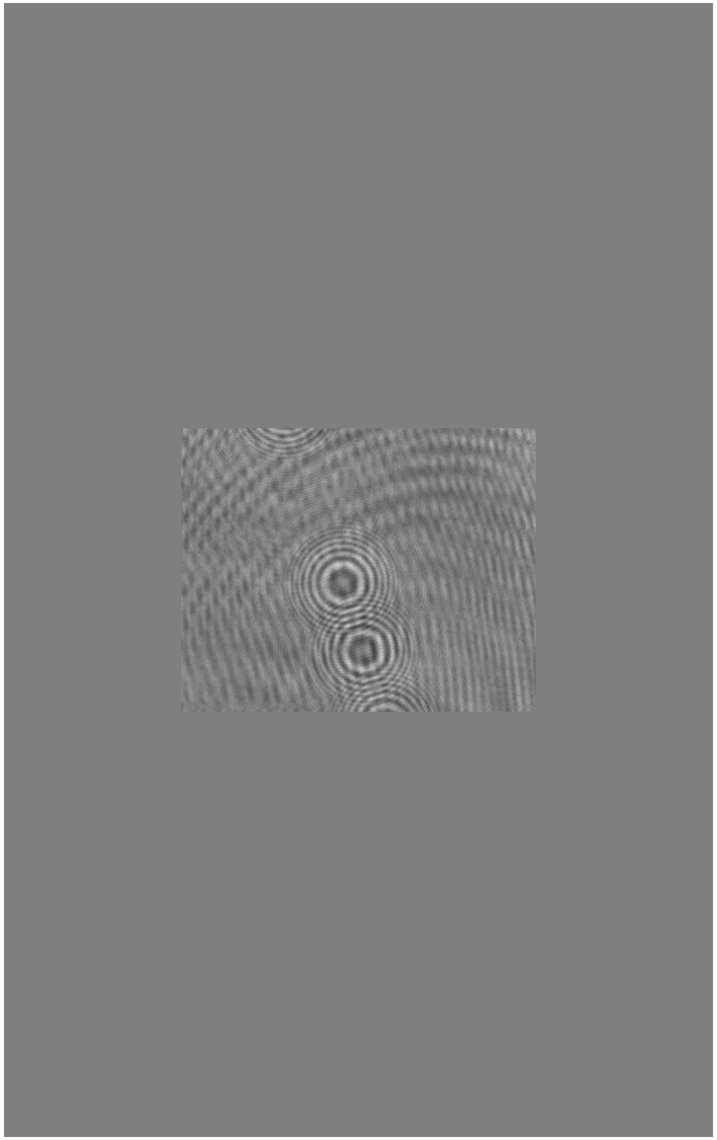


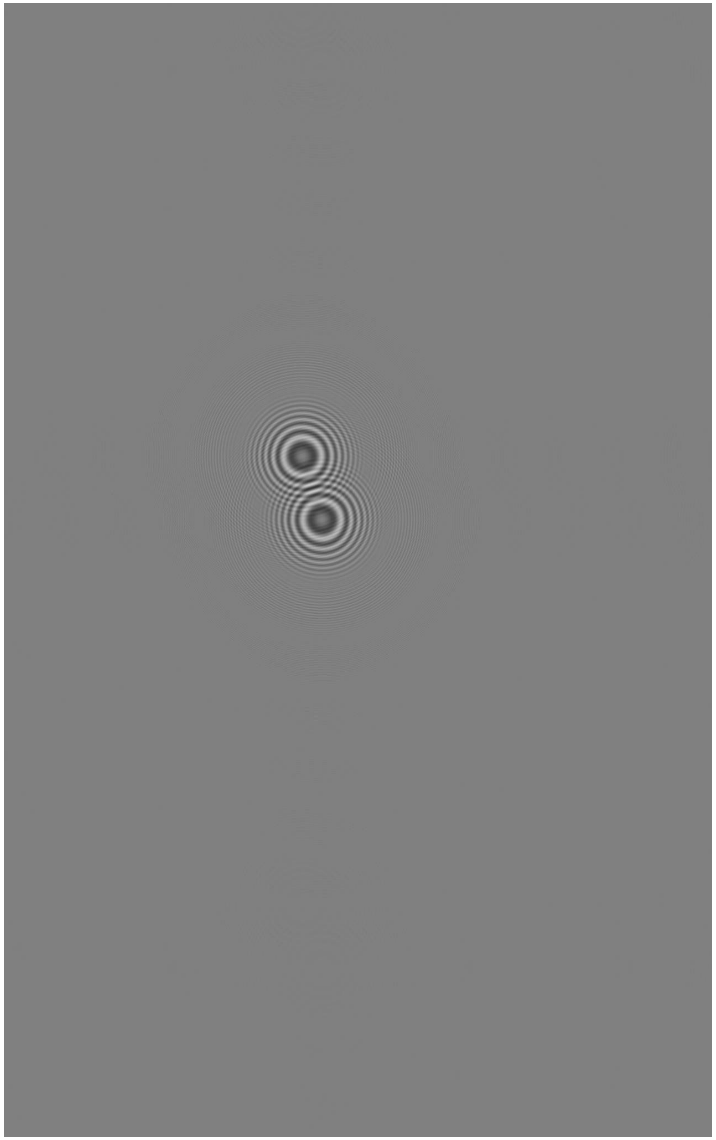
# Holographie numérique : détection



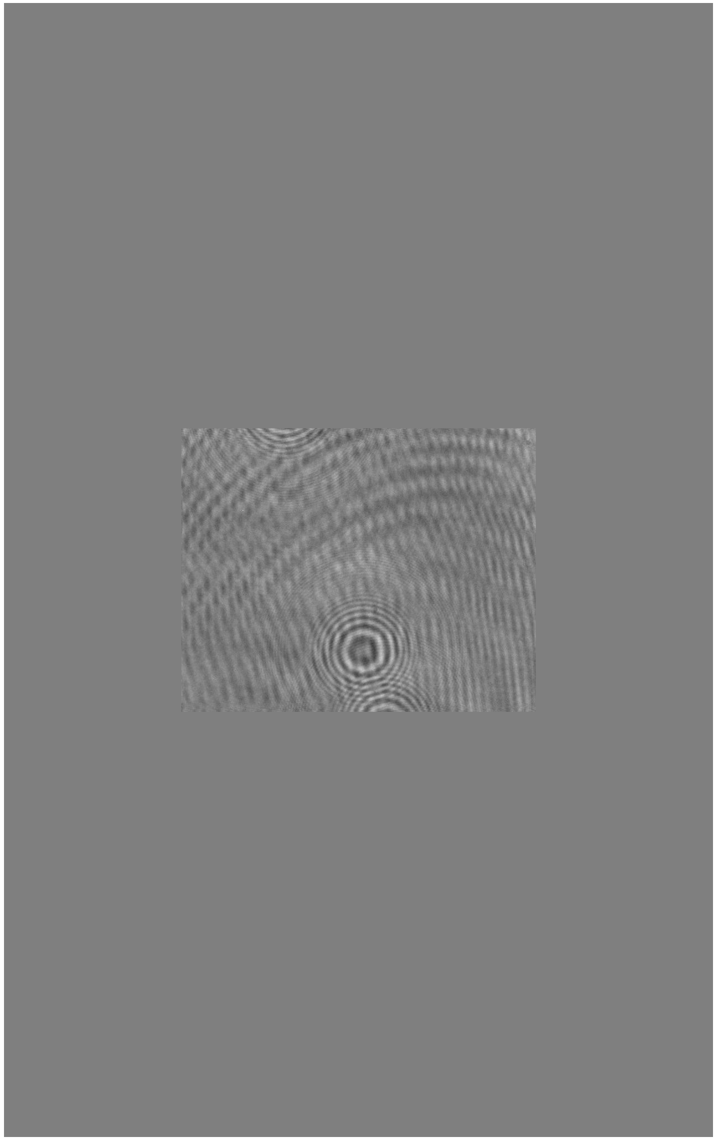


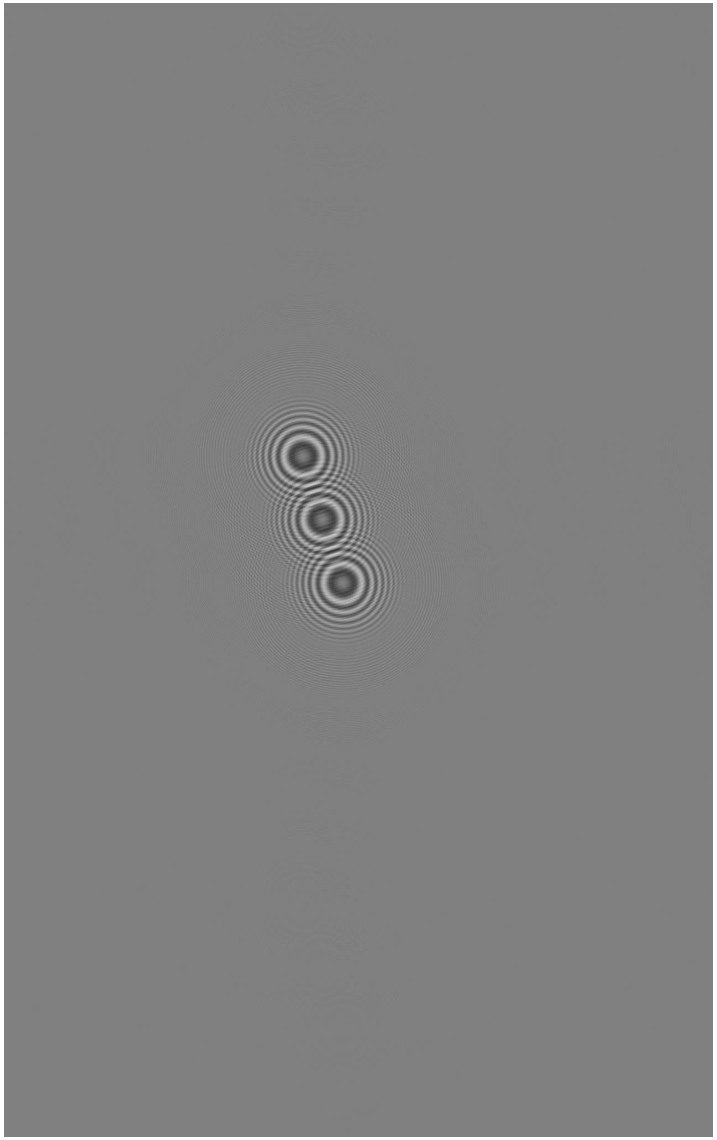
# Holographie numérique : détection



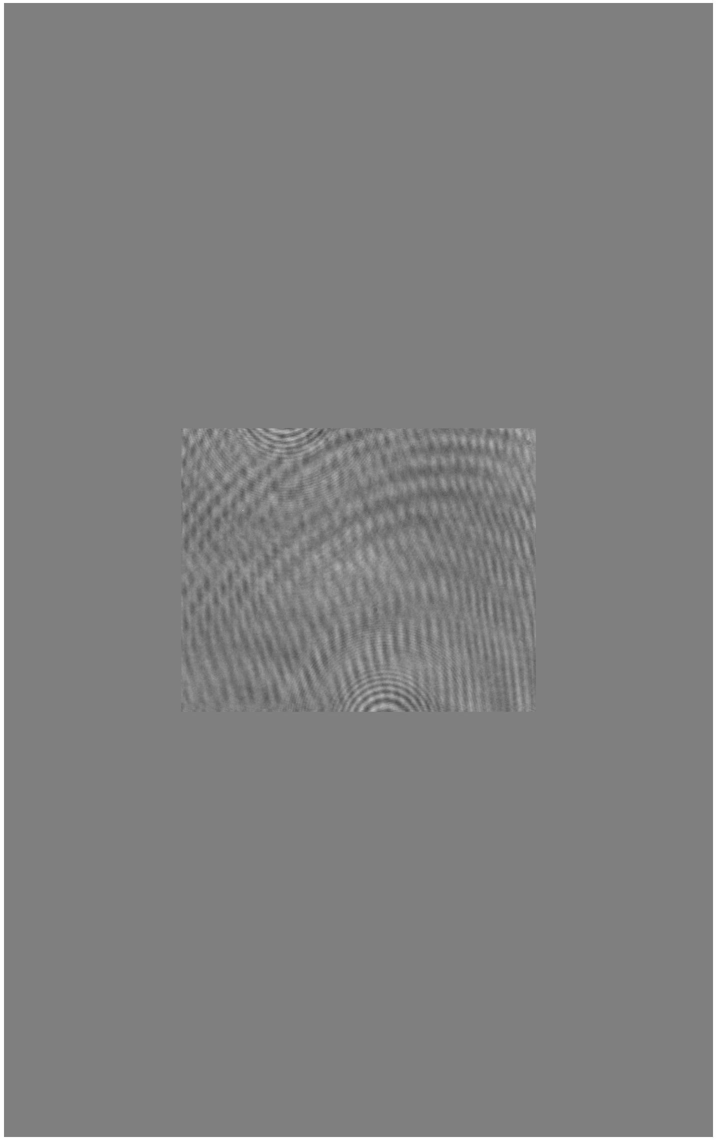


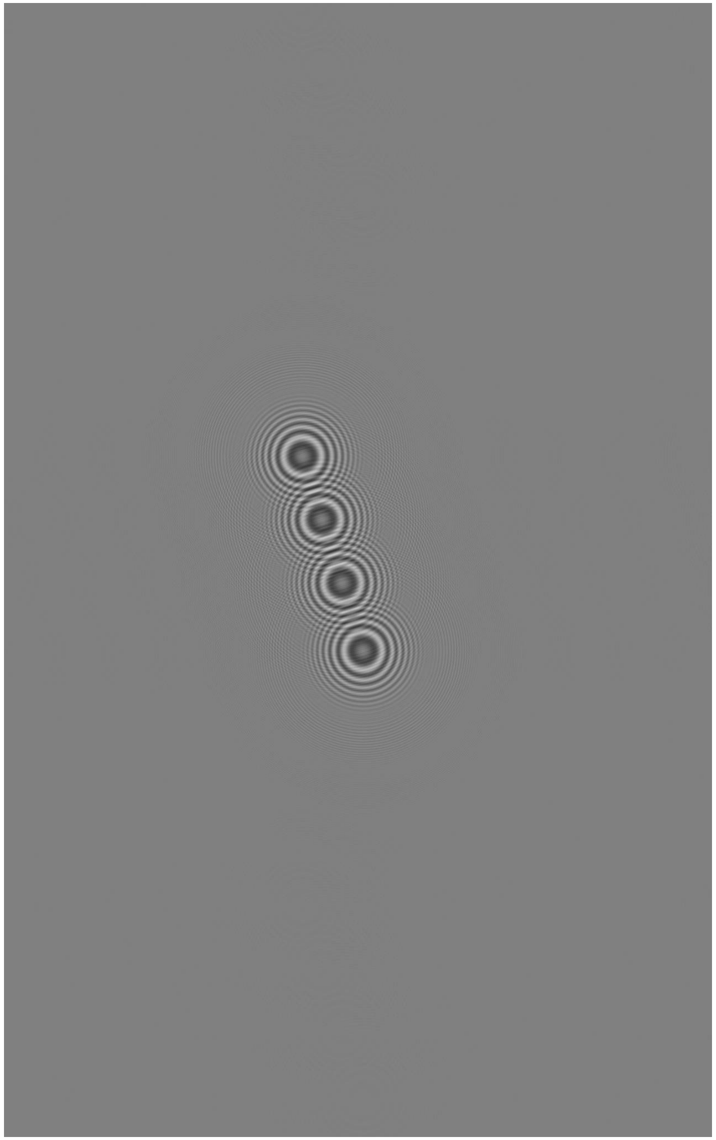
# Holographie numérique : détection





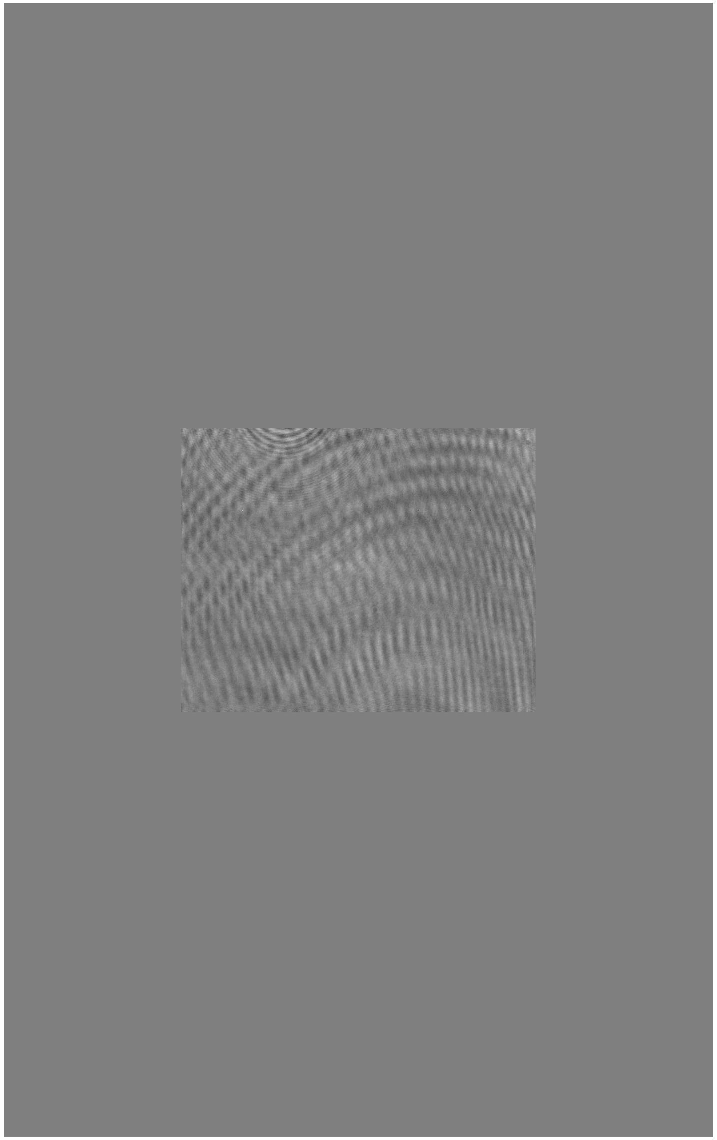
# Holographie numérique : détection

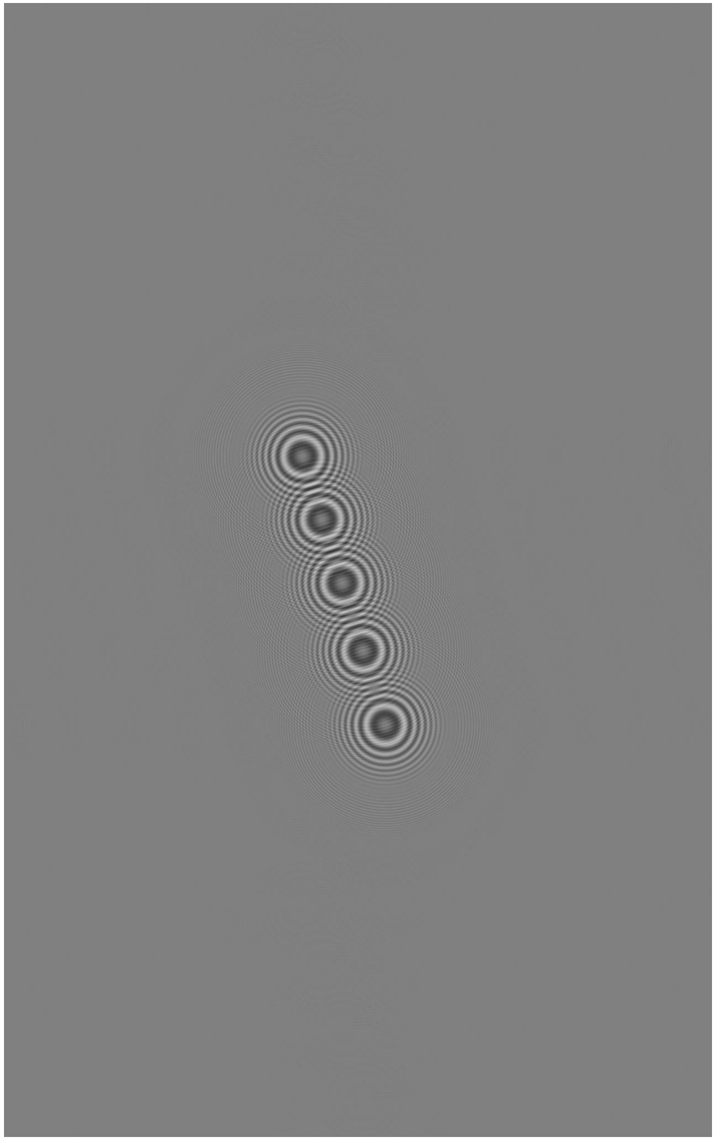




# Holographie numérique : détection

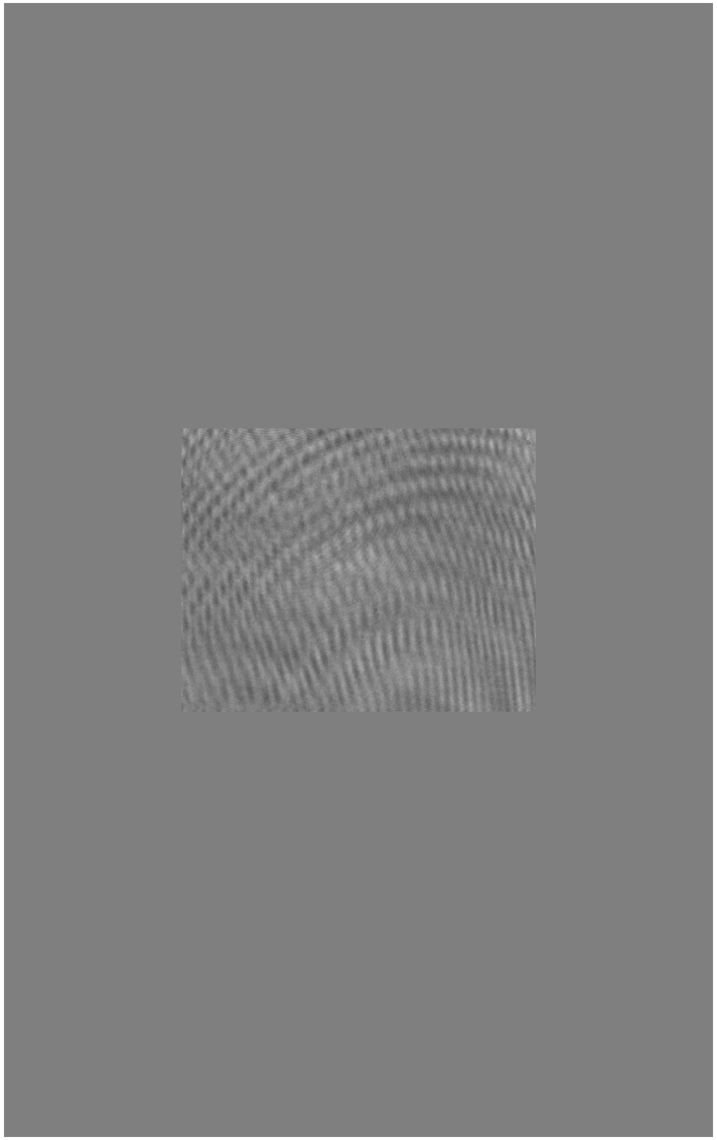


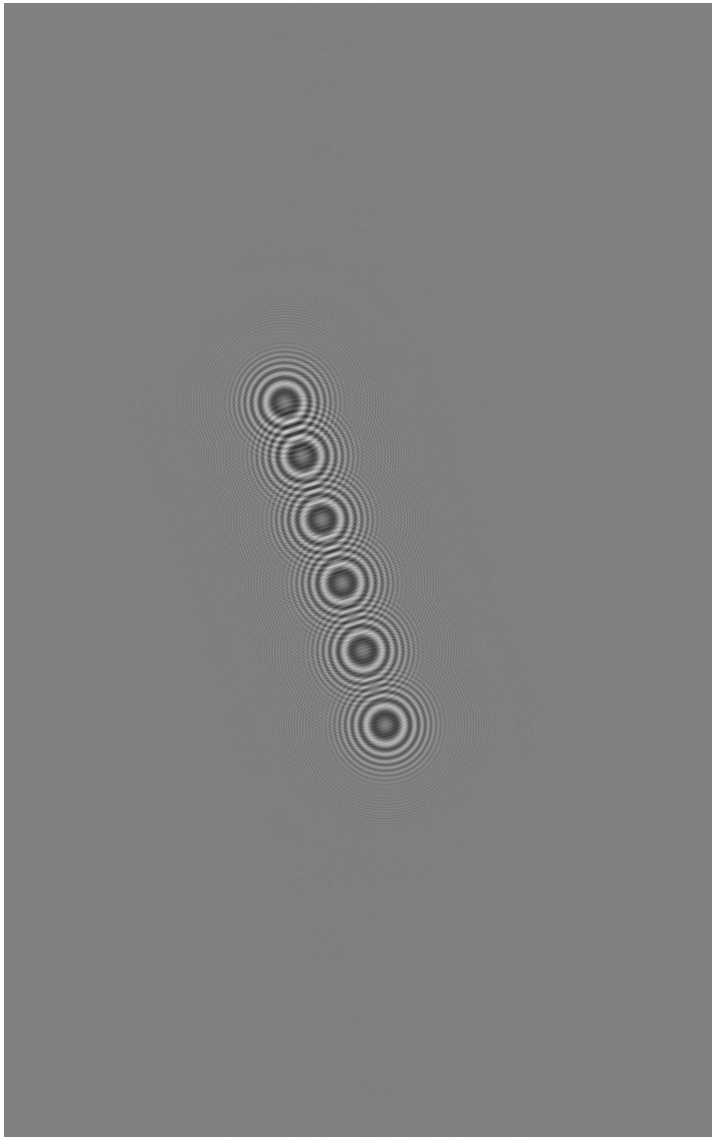




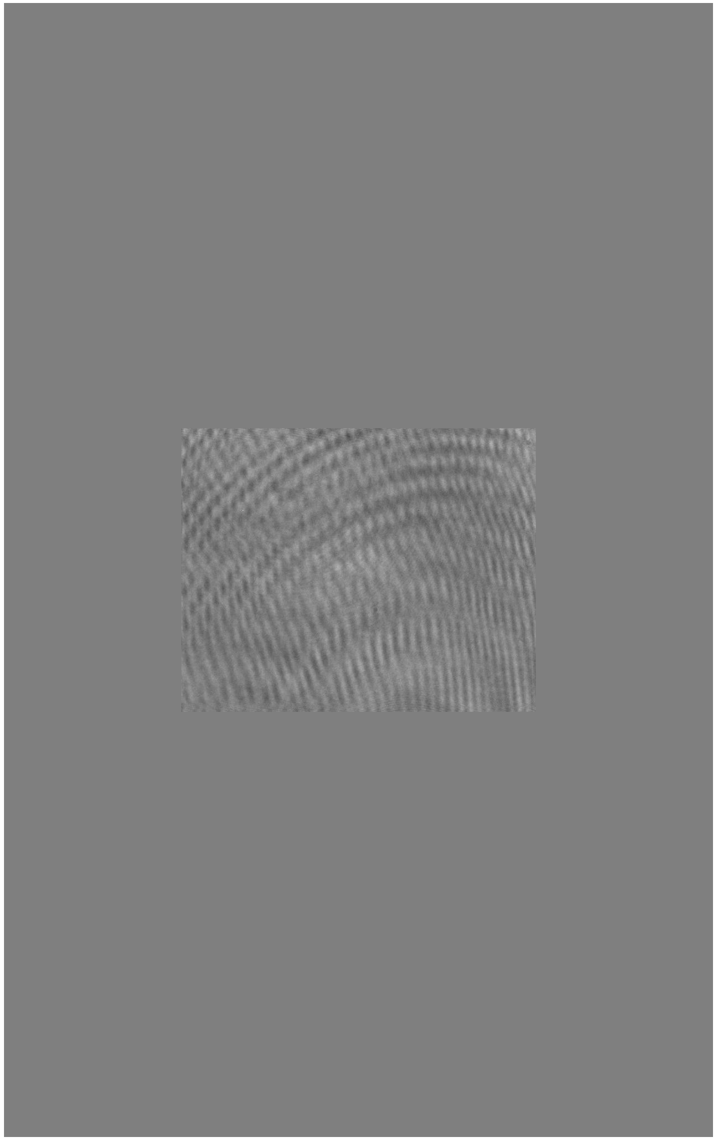
# Holographie numérique : détection

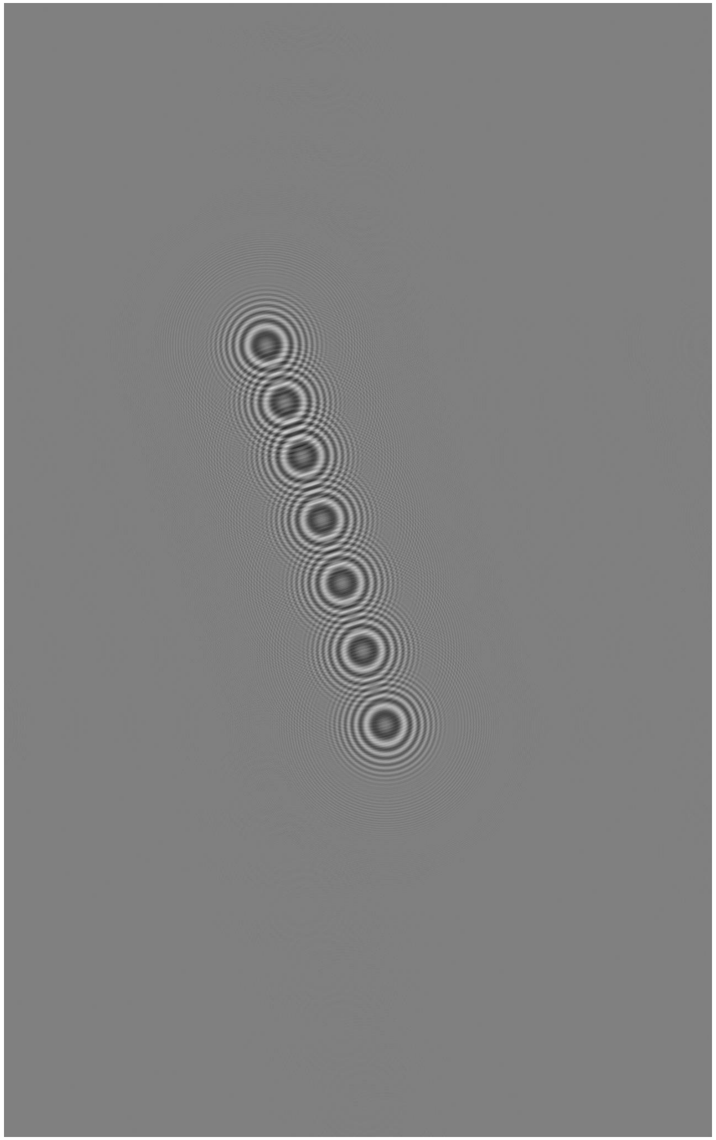




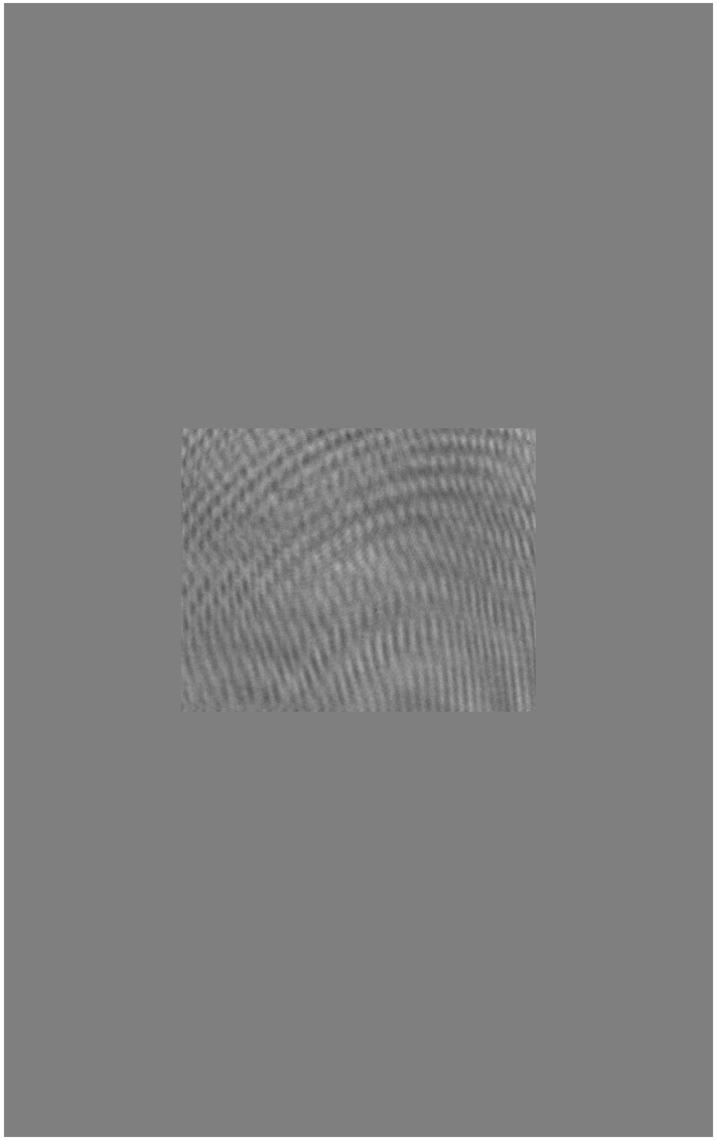


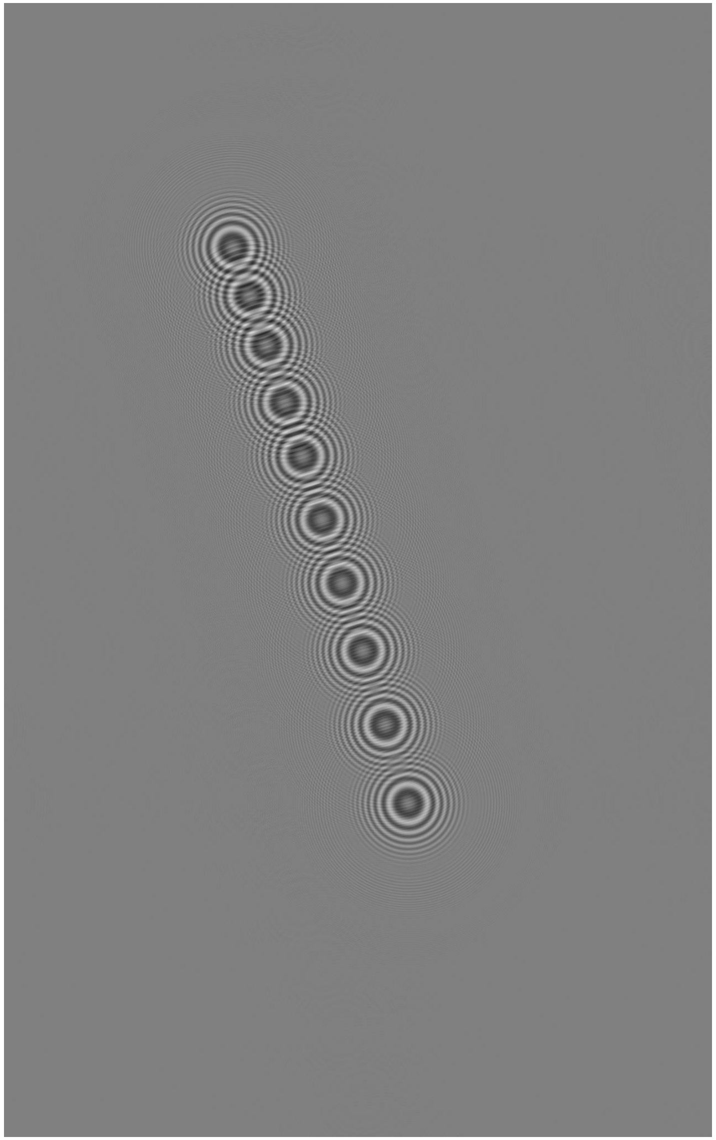
# Holographie numérique : détection



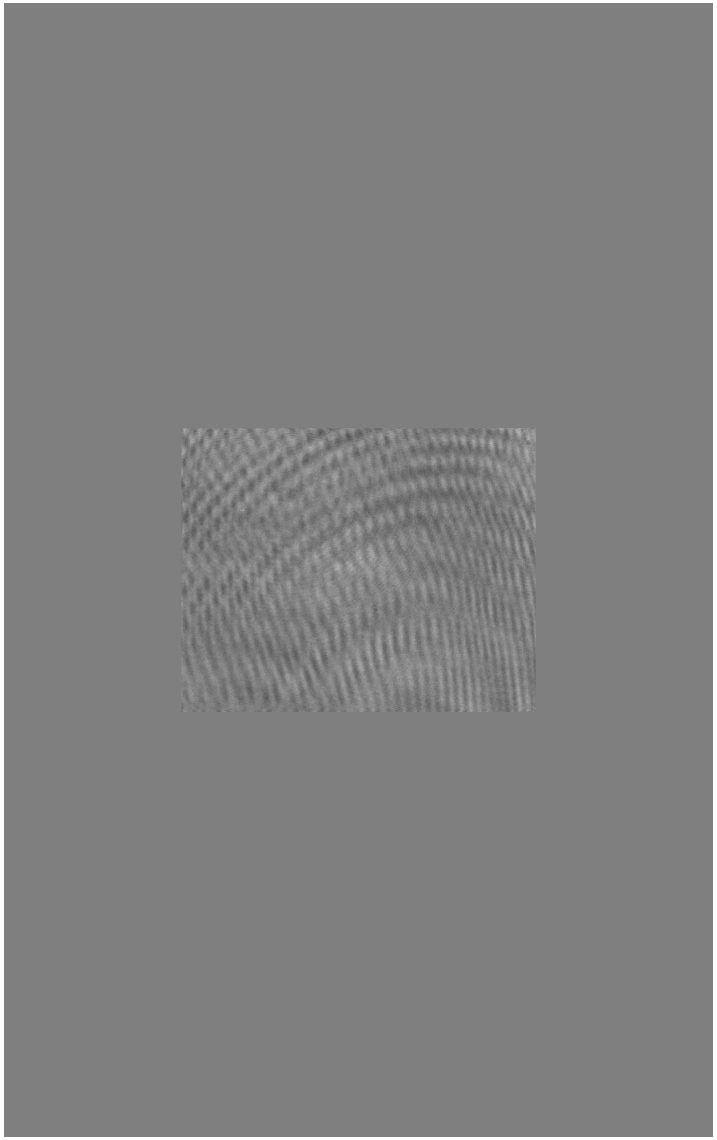


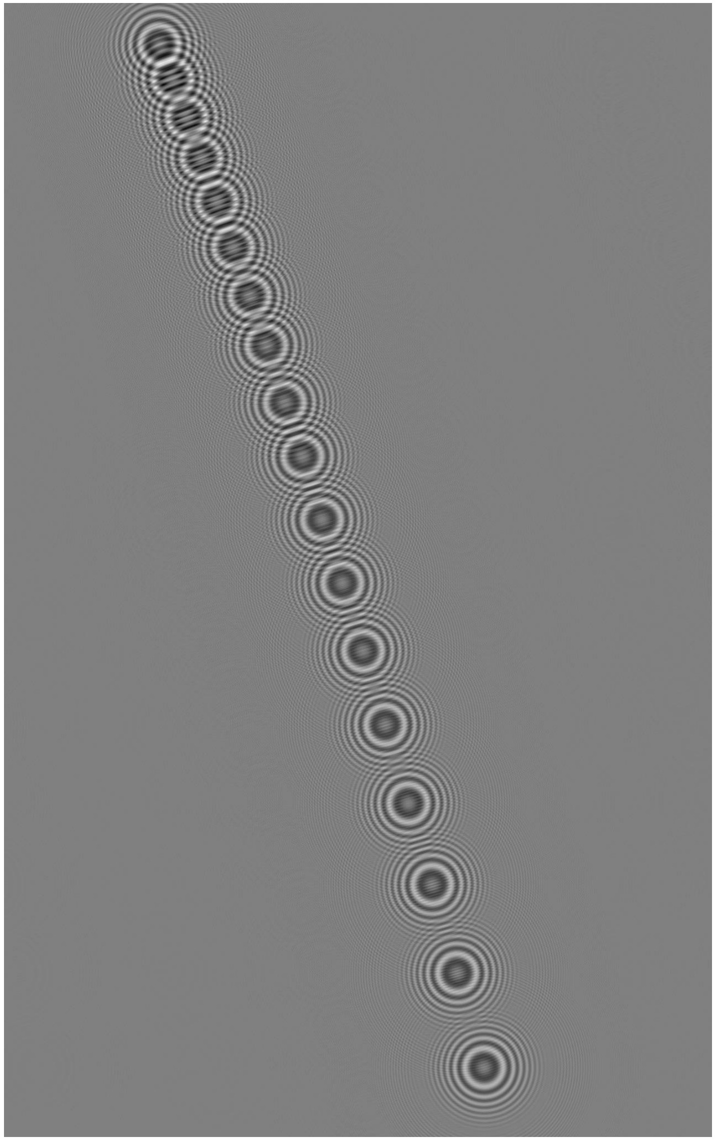
# Holographie numérique : détection



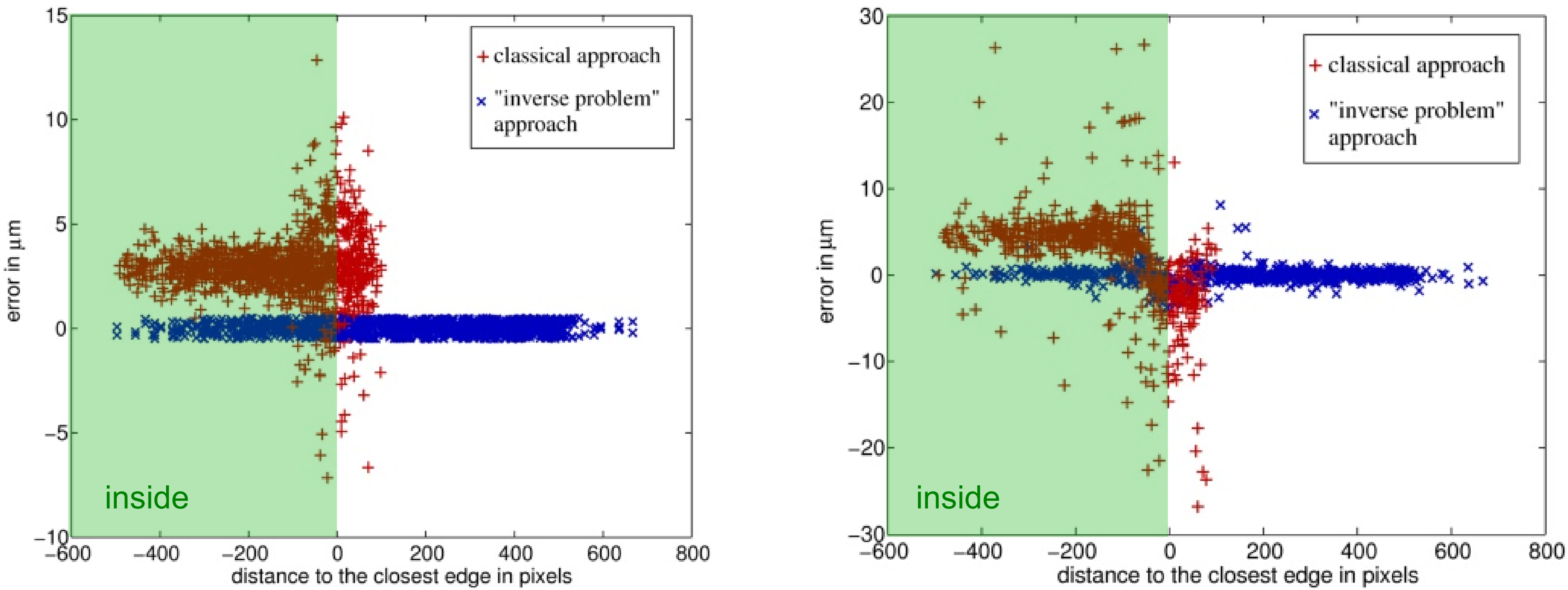


# Holographie numérique : détection





# Holographie numérique : Précision de localisation




erreurs en position latérale (x,y)

erreurs en profondeur (z)

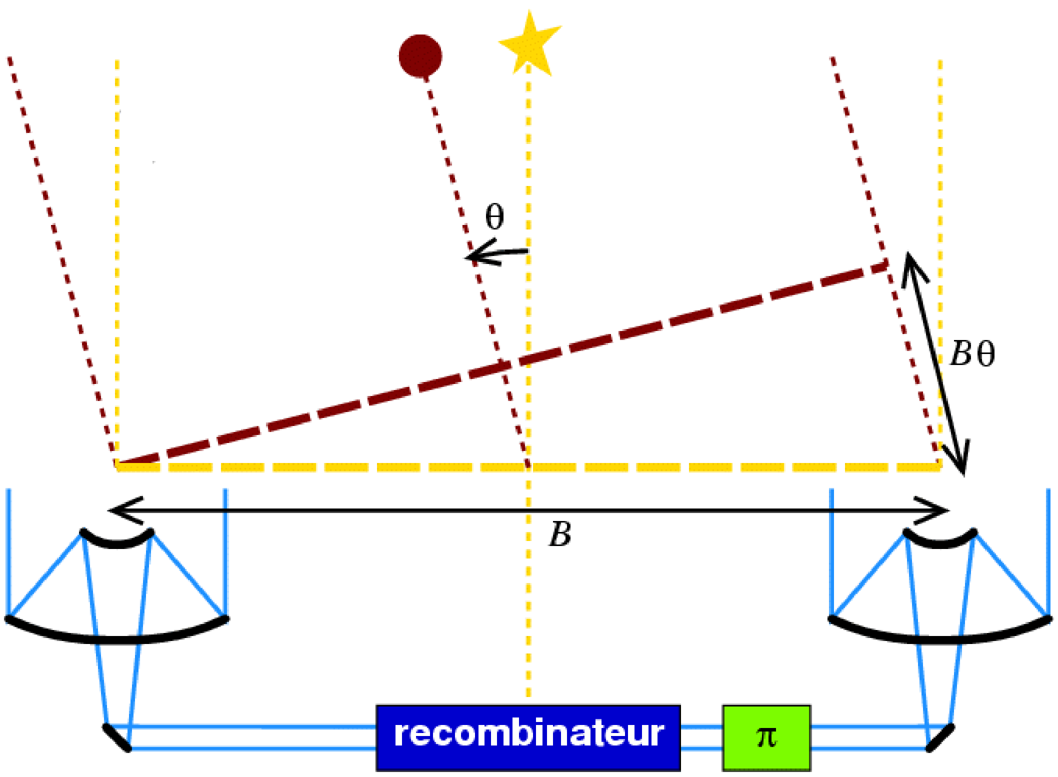
**méthode classique** : précision de l'ordre de 4 µm (z), 3 µm (x,y)

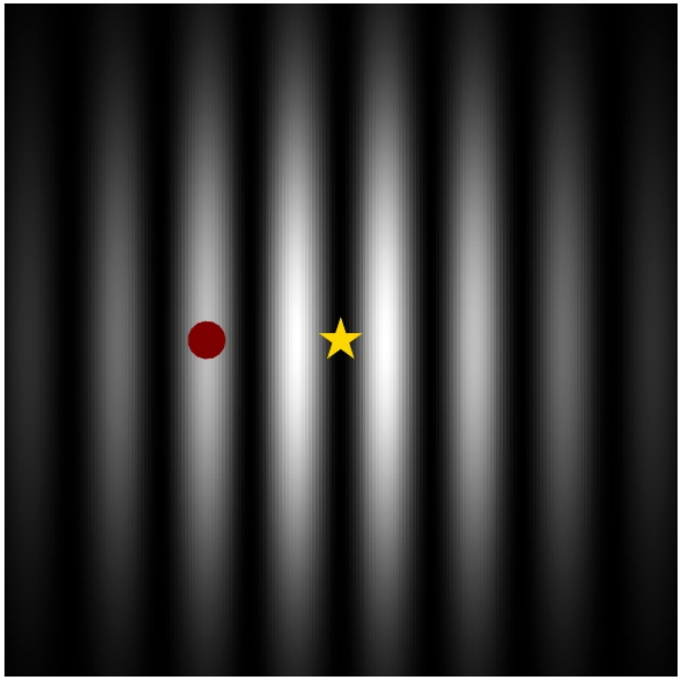
**approche inverse** : précision meilleure que 0.3 µm (partout)

Soulez, Denis, Fournier, Thiébaut & Goepfert, JOSA-A **24**, 1164 (2007).

# Interféromètre de Bracewell





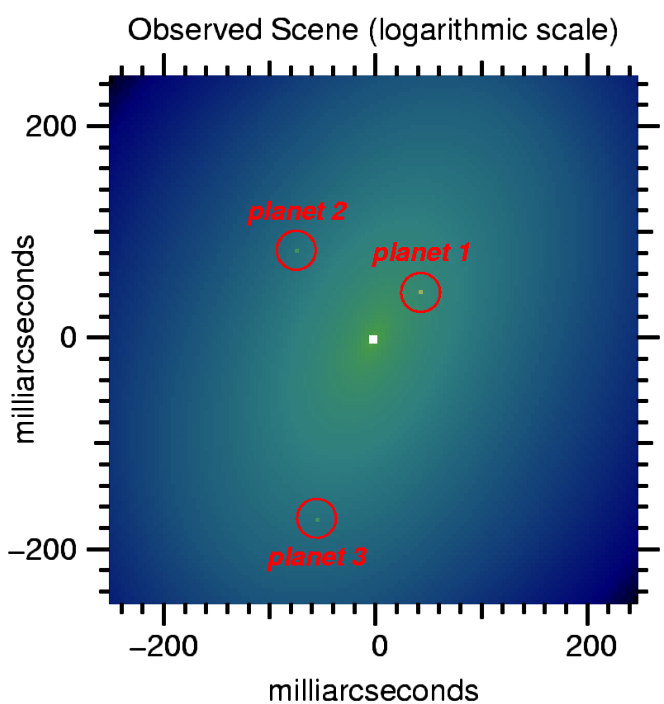
# Darwin

observable instrument objet observé

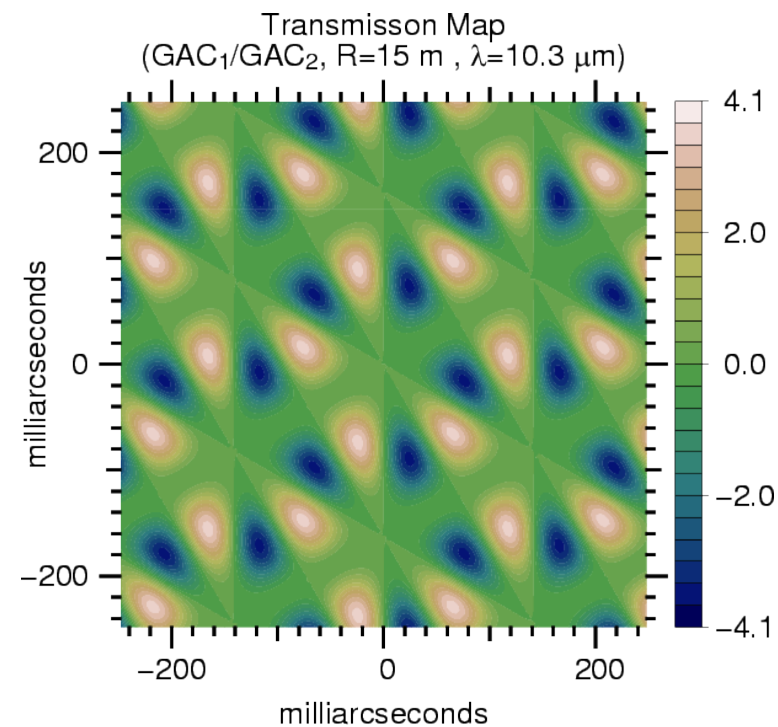
$$A(\lambda,t) = \int R(\boldsymbol{\omega},\lambda,t)\; F(\boldsymbol{\omega},\lambda,t)\; \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}$$

direction temps longueur d'onde

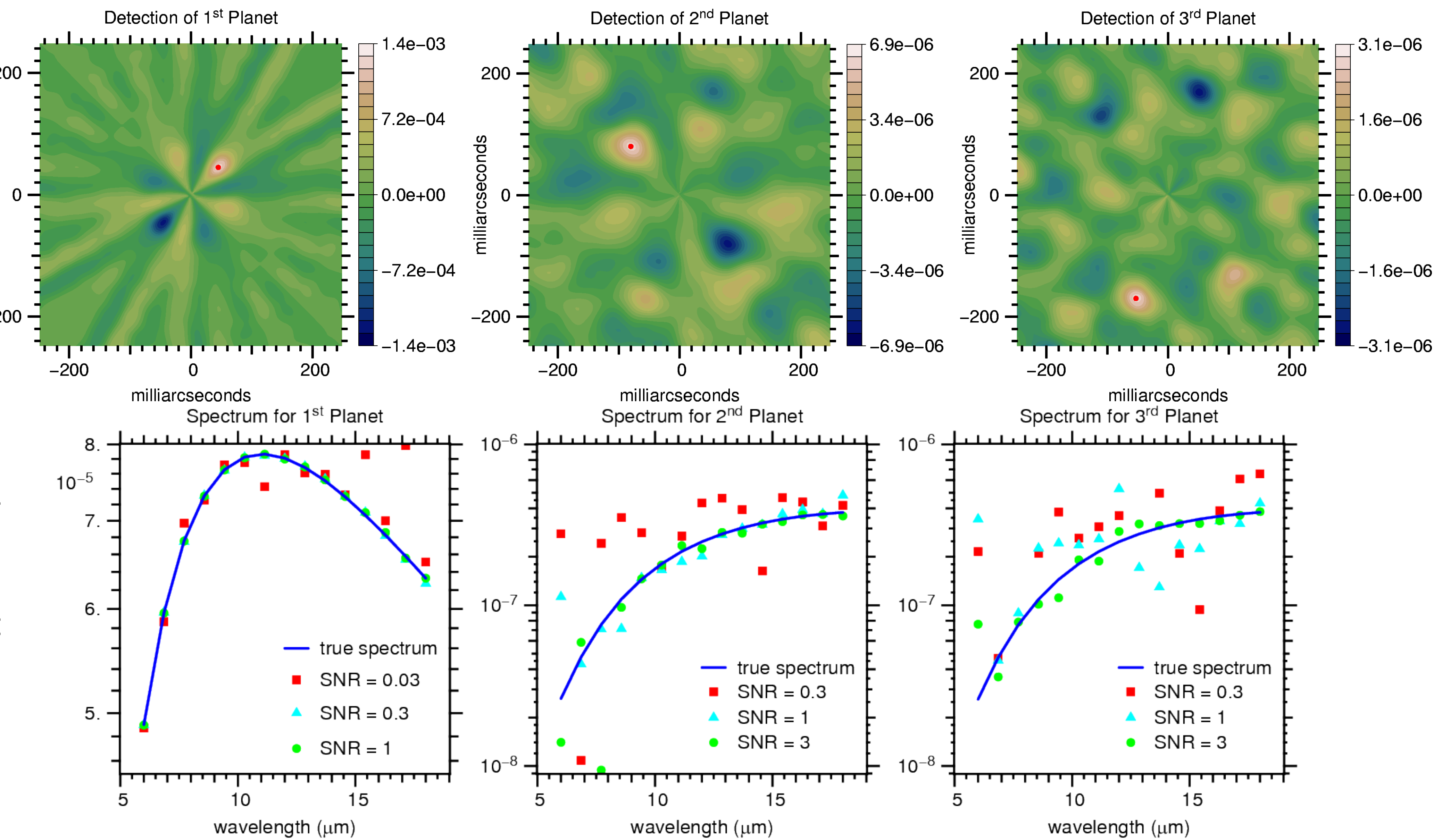
$F(\boldsymbol{\omega},\lambda,t)$




$R(\boldsymbol{\omega},\lambda,t)$



# Détection des planètes



# Approche inverse : résumé



- Approche non-paramétrique (≠ *model fitting*) très générale
  - Reconstruction d'image
    - Déconvolution aveugle
    - Interférométrie optique (~ tomographie)
    - Spectroscopie intégrale de champ
  - Optique adaptative
    - Restoration de phase (X. Rondeau, M. Tallon, R. Foy)
    - Estimation et contrôle (C. Béchet, M. Tallon)
  - Détection
    - Holographie numérique (F. Soulez, L. Denis, C. Fournier)
    - Interférométrie à frange noire (L. Mugnier)
    - Comptage de photons (X. Rondeau, A. Blazit, R. Foy)

# Approche inverse : résumé



- ***régularisation*** introduite pour éviter l'amplification du bruit et/ou suppléer aux données manquantes
  - meilleur compromis biais / erreurs d'estimation (réalise le minimum de variance)
  - permet de prendre en compte les données manquantes
    - extrapolation de champ
    - reconstruction d'image sans phase de Fourier
    - interpolation correcte des données manquantes
- approche Bayesienne (→ estimation des erreurs)
- on se ramène à un problème d'optimisation
  - beaucoup ($10^9$) de paramètres (diagonalisation ou méthodes d'optimisation itératives)
  - contraintes (positivité, normalisation)
  - dégénérescences (***optimisation globale***)

# Bibliographie


- A. Tarantola, *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*, Pub. SIAM, ISBN 0-89871-572-5, 2005.
- E. Thiébaut, *Introduction to Image Reconstruction and Inverse Problems*, in *Optics in Astrophysics*, NATO ASI, Eds. R. Foy and F.-C. Foy, Pub. Kluwer Academic, 2005.