

Bose et Einstein en 1924 : comment compter la lumière et la matière

Jean Dalibard

Collège de France et Laboratoire Kastler Brossel

Marseille, 7 décembre 2024

Une histoire de science... et d'humanité

Découverte "fortuite" fait par un jeune scientifique indien

Le physicien le plus éminent de l'époque prend le temps de l'écouter et de l'aider

Une nouvelle façon d'envisager les particules atomiques émerge : elles sont identiques et indiscernables

Ce point de vue conduit à la prédiction de nouveaux états de la matière, aux propriétés spectaculaires

Superfluides, supraconducteurs

La physique du rayonnement avant 1924

Un des triomphes du XIX^{ème} siècle: l'électromagnétisme, mais subsiste le problème du rayonnement du corps noir



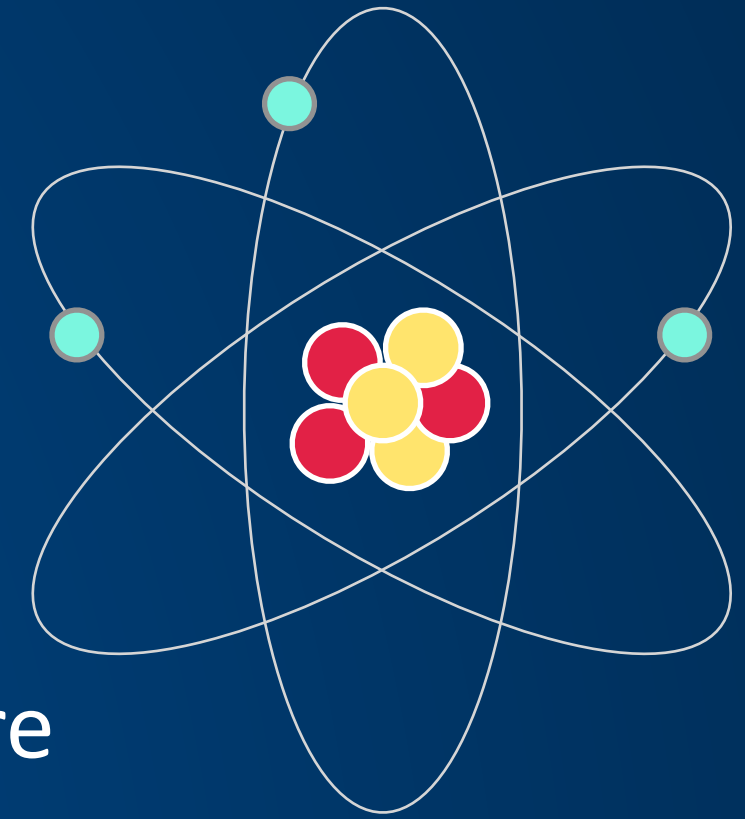
Une répartition des couleurs (spectre) universelle, qui ne dépend pas de la nature de l'objet, mais seulement de sa température

1900 : Planck propose une formule qui rend parfaitement compte du spectre mesuré, en invoquant des oscillateurs matériels sur les parois de l'objet avec des échanges d'énergie quantifiés ($E = h\nu$) Simple artifice mathématique ?

1905-09 : Einstein fait l'hypothèse que la lumière elle-même est quantifiée et retrouve une partie de la loi de Planck (Wien)
À partir d'une analyse des fluctuations d'énergie, il introduit l'idée de la dualité onde-corpuscule

La physique des atomes et du rayonnement avant 1924

1907-11: expérience de Rutherford. Toute la charge positive d'un atome et presque toute sa masse sont concentrées dans un noyau atomique dont la taille est très petite devant celle d'un atome



1911 : modèle de l'atome de Bohr. Certaines orbites circulaires sont privilégiées pour les électrons. Le passage d'une orbite à l'autre s'accompagne de l'émission ou l'absorption d'un quantum de lumière

1916 : généralisation par Sommerfeld à des orbites elliptiques

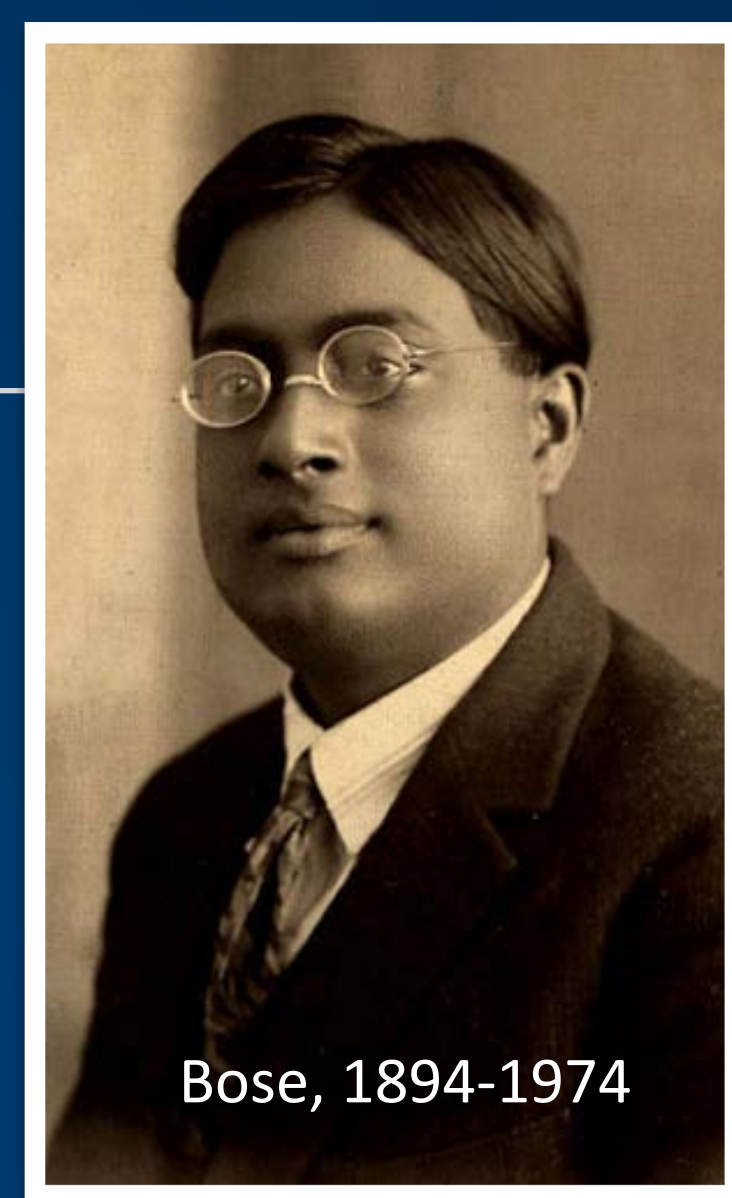
1917 : Einstein introduit la notion d'émission spontanée et d'émission stimulée

1922 : Expérience de Stern et Gerlach et la "quantification spatiale des trajectoires"

1923 : Expérience de Compton, diffusion d'un photon par un électron

1924 et après : ondes de De Broglie (1924), principe de Pauli (1925), mécanique des matrices de Heisenberg et Born (1925-26), équation de Schrödinger (1926), unification des points de vue et traitement relativiste : Dirac (1927)

Bose en 1924



Bose, 1894-1974

PHYSICS DEPARTMENT,
Dacca University.

Dacca, the 4th June 1924.

Respected Sir, I have ventured to send you the accompanying article for your personal and opinion. I am anxious to know what you think of it. You will see that (I have tried to deduce the coefficient $\frac{8\pi\nu^2}{c^3}$ in Planck's Law independent of the classical electrodynamics, only assuming that finally that the ultimate elementary regions in the Phase space has the volume h^3). I do not have sufficient German to translate the paper. If you think the paper worth publication, I shall be grateful if you arrange for its publication in Zeitschrift für Physik. Though a complete stranger to you, I do not feel any hesitation in making such a request. Because we are all your pupils through profiting only by your teachings through the year workings. I don't know whether you still remember that some body from Calcutta asked your permission to translate your papers on Relativity in English. You acceded to the request, the book has since been published. I was the one who translated your paper on Generalised Relativity.

Yours faithfully
S. Bose

En 1924, Bose a déjà publié 5 articles, mais son 6ème, soumis au Philosophical Magazine a été refusé

Il y propose une nouvelle manière de compter les états d'un gaz de quanta de lumière qui lui permet de retrouver la loi de Planck simplement

facteur $\frac{8\pi\nu^2}{c^3}$

Dans sa lettre du 4 juin, il demande de l'aide à Einstein, bien qu'ils ne se connaissent pas vraiment

Une découverte “fortuite”

Bose cité par Mehra :

“I had no idea that what I had done was really novel. I thought that perhaps it was the way of looking at the thing. I was not a statistician to the extent of really knowing that I was doing something which was really different from what Boltzmann would have done, from Boltzmann statistics.”

Einstein à Ehrenfest en juillet 1924:

“La démonstration [de Bose] est élégante, mais ses fondements restent obscurs”

Abraham Pais dans “Albert Einstein, la vie et l’oeuvre” :

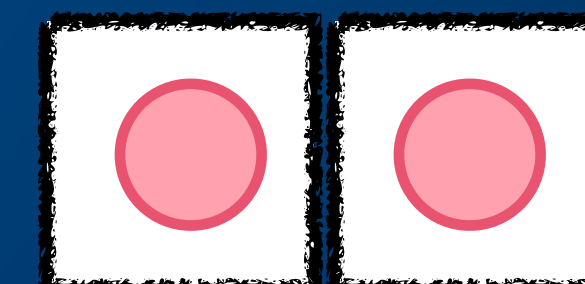
il y a trois nouveautés, toutes implicites, dans l’article de Bose

- La non-conservation du nombre de photons
- La disparition de l’axiome de discernabilité des particules
- La disparition de l’indépendance des particules

Particules discernables



Particules indiscernables



La réaction d'Einstein

2. VII, 24

Lieber Herr Kollege!

Ich habe ihre Arbeit übersetzt und der Zeitschrift für Physik zum Druck übergeben. Sie bedeutet einen wichtigen Fortschritt und hat mir sehr gut gefallen. Ihre Einwände gegen meine Arbeit finde ich zwar nicht richtig. Denn das Wien'sche Verschiebungsgesetz setzt die undulationstheorie nicht voraus und das Bohrsche Korrespondenzprinzip ist überhaupt nicht verwendet. Doch dies thut nichts. Sie haben aber erstens den Faktor quantentheoretisch abgeleitet wenn auch wegen des Polarisations-Faktors 2 nicht ganz streng. Es ist ein schöner Fortschritt.

Mit freundlichen Grüssen
(L) Ihr A. Einstein

2 juillet 1924 : J'ai soumis votre travail pour publication au Zeitschrift für Physik. Cela représente un progrès important et je l'ai beaucoup aimé... C'est un beau progrès.

Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese.

Von Bose (Dacca-University, Indien).

(Eingegangen am 2. Juli 1924.)

Der Phasenraum eines Lichtquants in bezug auf ein gegebenes Volumen wird in „Zellen“ von der Größe h^3 aufgeteilt. Die Zahl der möglichen Verteilungen der Lichtquanten einer makroskopisch definierten Strahlung unter diese Zellen liefert die Entropie und damit alle thermodynamischen Eigenschaften der Strahlung.

Plancks Formel für die Verteilung der Energie in der Strahlung des schwarzen Körpers bildet den Ausgangspunkt für die Quantentheorie, welche in den letzten 20 Jahren entwickelt worden ist und in allen Gebieten der Physik reiche Früchte getragen hat. Seit der Publikation im Jahre 1901 sind viele Arten der Ableitung dieses Gesetzes vorgeschlagen worden. Es ist anerkannt, daß die fundamentalen Voraussetzungen der Quantentheorie unvereinbar sind mit den Gesetzen der klassischen Elektrodynamik. Alle bisherigen Ableitungen machen Gebrauch von der Relation

$$q_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3} E,$$

d. h. von der Relation zwischen der Strahlungsdichte und der mittleren Energie eines Oszillators, und sie machen Annahmen über die Zahl der Freiheitsgrade des Äthers, wie sie in obige Gleichung eingeht (erster Faktor der rechten Seite). Dieser Faktor konnte jedoch nur aus der klassischen Theorie hergeleitet werden. Dies ist der unbefriedigende Punkt in allen Ableitungen, und es kann nicht wundernehmen, daß immer wieder Anstrengungen gemacht werden, eine Ableitung zu geben, die von diesem logischen Fehler frei ist.

$$E = \sum_s \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} V \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu,$$

welche Gleichung Plancks Formel äquivalent ist.

(Übersetzt von A. Einstein.)

Anmerkung des Übersetzers. Boses Ableitung der Planckschen Formel bedeutet nach meiner Meinung einen wichtigen Fortschritt. Die hier benutzte Methode liefert auch die Quantentheorie des idealen Gases, wie ich an anderer Stelle ausführen will.

Traduit par A. Einstein.

Note du traducteur : À mon avis, la dérivation par Bose de la formule de Planck représente une avancée importante. La méthode utilisée ici fournit également la théorie quantique des gaz parfaits, comme je l'expliquerai ailleurs.

Les deux articles d'Einstein en 1924-25



Théorie quantique du gaz parfait monoatomique, Preussische Akademie der Wissenschaften, p. 261 (1924)

- *Distribution de Bose-Einstein* $n_j = \frac{1}{e^{(E_j - \mu)/k_B T} - 1}$ vs. *Boltzmann* $n_j = e^{-(E_j - \mu)/k_B T}$
- *Théorème de Nernst : entropie nulle à température nulle*

Théorie quantique du gaz parfait, Preussische Akademie der Wissenschaften, p. 3 (1925)

- *Prédiction d'une transition de phase, la "condensation du gaz parfait"*
- *Lien avec la thèse de Louis de Broglie (soutenue le 25 novembre 1924)*

Réactions au travail de Bose et Einstein

Objections de Ehrenfest, Schrödinger et d'autres à la perte d'indépendance des particules

Réponse d'Einstein à Schrödinger (28 février 25):

"Je n'ai pas assez nettement souligné que la statistique utilisée ici est une statistique particulière que pour le moment, rien ne justifie sinon le résultat"

"Avec ce procédé, les molécules apparaissent comme n'étant pas localisées indépendamment les unes des autres ; au contraire une molécule a une certaine propension à être dans la même cellule qu'une autre"

2 quanta et 2 cellules

Statistique de Bose

	cellule A	cellule B
cas 1	● ●	
cas 2	●	●
cas 3		● ●

Molécules ~~indépendantes~~

	cellule A	cellule B
cas 1	① ②	
cas 2	①	②
cas 3	②	①
cas 4		① ②

non-corrélées



La condensation de Bose-Einstein

La nouvelle statistique se fait particulièrement sentir aux grands nombres de particules et aux basses températures

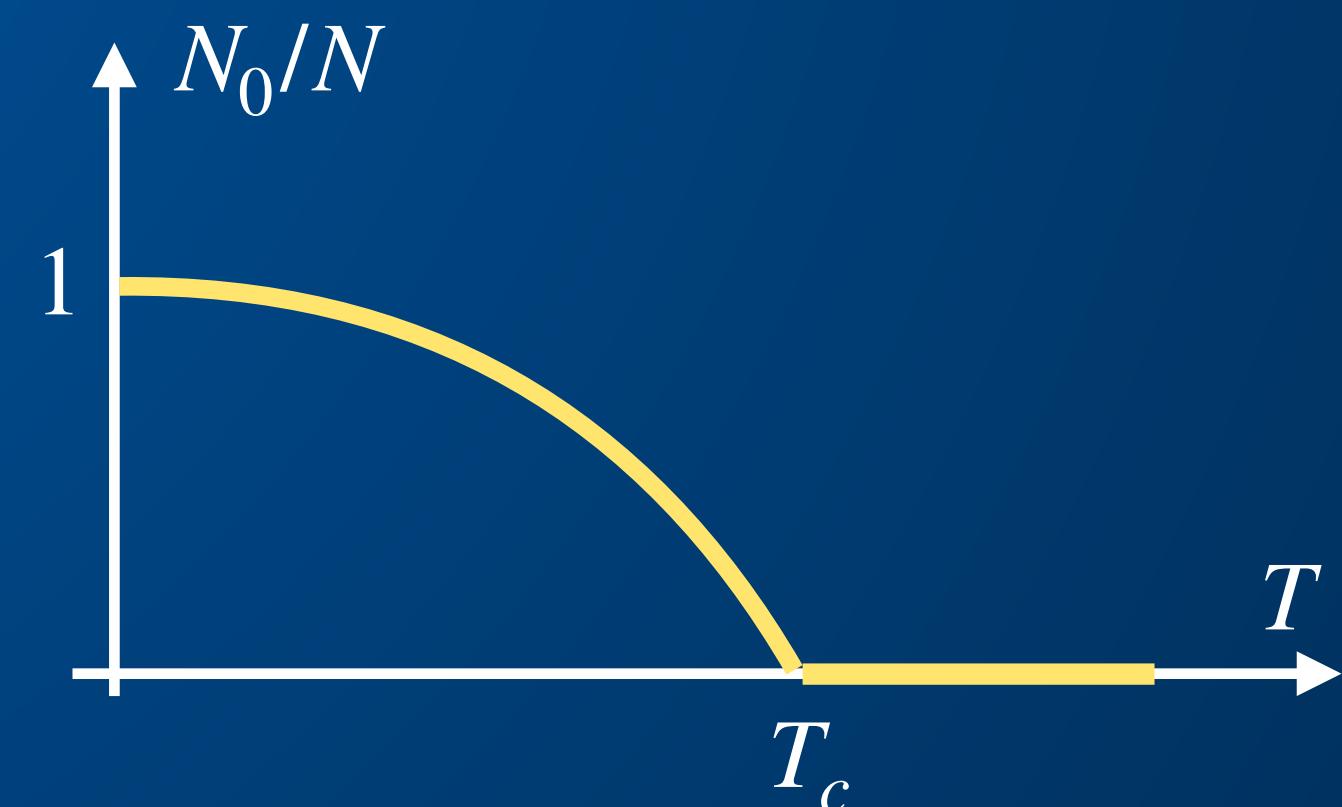
N cellules (i.e. N niveaux d'énergie accessibles) et N particules



On suppose que ces deux configurations sont possibles compte tenu des contraintes connues sur l'énergie

- Bose et Einstein donnent un poids égal à ces deux configurations
- Boltzmann donne un poids $N!$ plus grand à la configuration de droite

Pour la statistique de Bose-Einstein, Einstein montre qu'en dessous d'une certaine température, une fraction significative des atomes doit s'accumuler dans l'état fondamental de la boîte qui les contient



L'indiscernabilité des particules quantiques

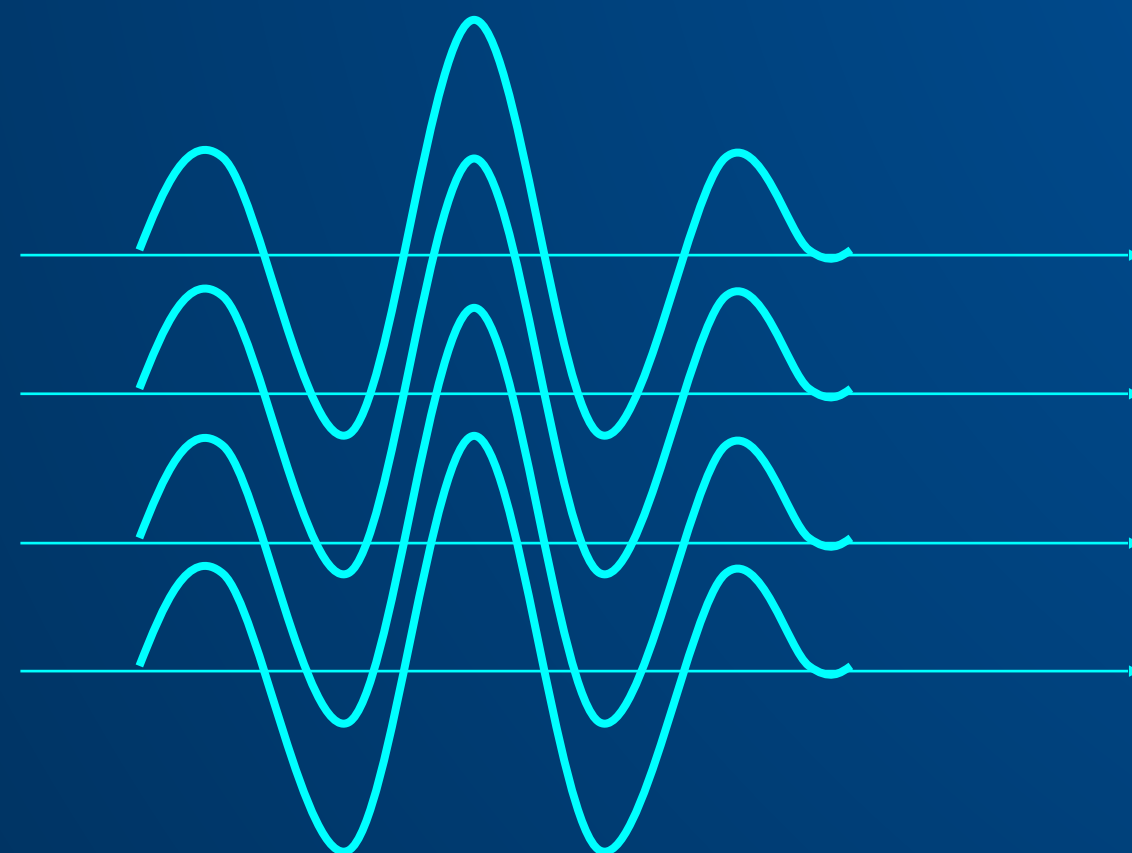
Tous les électrons de l'univers ont (à notre connaissance) rigoureusement les mêmes propriétés : masse, charge,... Il en va de même pour les protons, les neutrons, et donc les atomes correspondant à un isotope donné.

Notion pas vraiment évidente :

« S'il y avait des atomes (...), il y en aurait d'indistinguables en soi (...), ce qui est contre un des plus grands principes de la raison »



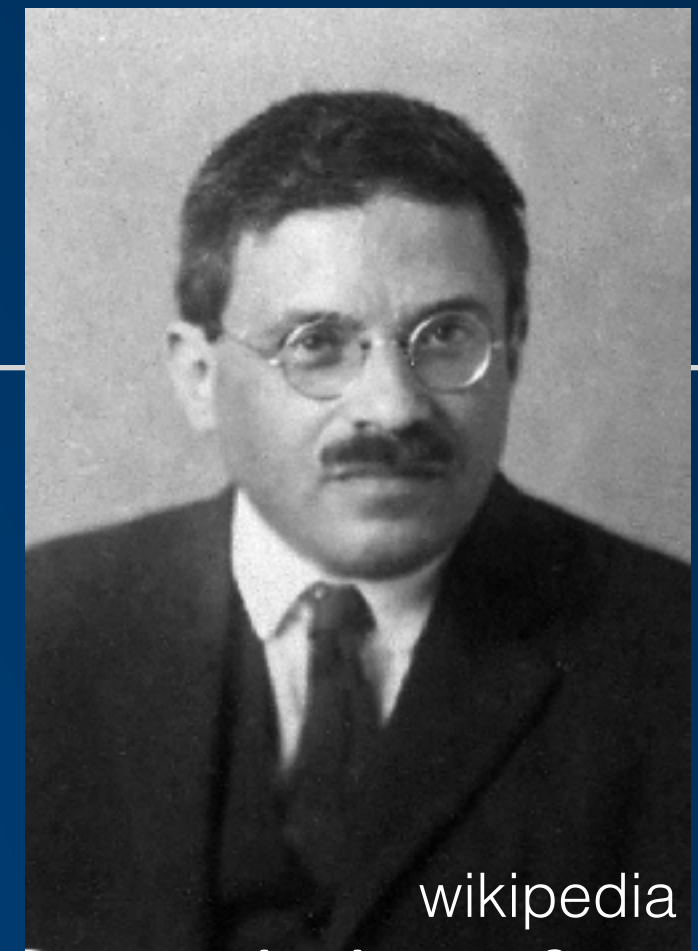
Leibniz (1646-1716)



Plusieurs particules identiques peuvent-elles être dans le même état et former une onde de matière « géante »?

Condensat de Bose-Einstein

Réactions à la prédiction d'Einstein sur la condensation



wikipedia

Paul Ehrenfest

1880-1933

Einstein sur son propre travail (lettre à Ehrenfest):

C'est une belle théorie, mais contient-elle une vérité ?

Einstein appliquait son résultat à un gaz d'électrons (n'obéissent pas à la statistique de BE, mais à celle de Fermi-Dirac)

Ehrenfest et Uhlenbeck soulevèrent une objection à la manière dont Einstein prenait la limite $N \rightarrow +\infty$

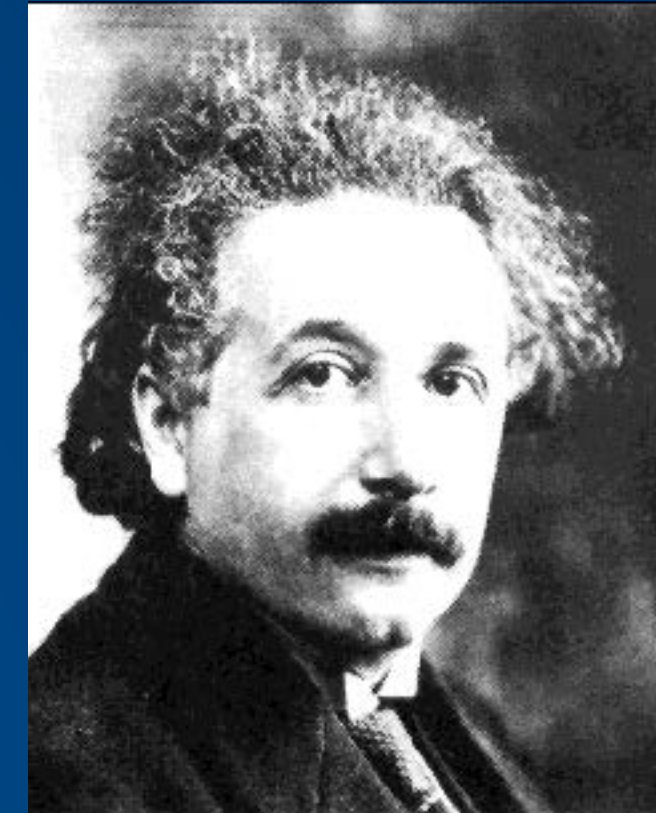
N'est-ce pas un simple artefact dû au remplacement de sommes discrètes par une intégrale ?

La notion de limite thermodynamique " $N \rightarrow +\infty$, $V \rightarrow +\infty$, densité = $\frac{N}{V}$ constante" était mal définie à l'époque

Les deux classes de particules dans la Nature

Les bosons, particules au comportement grégaire, qui peuvent s'accumuler en nombre arbitrairement grand dans le même état

photons, atomes d'hydrogène, de sodium, de rubidium,...
spin entier 0, 1, 2,...



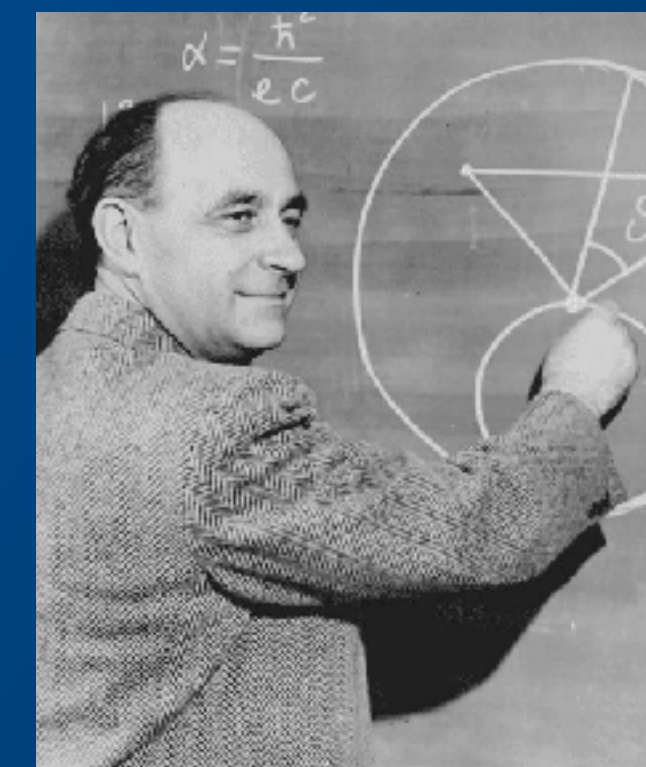
Einstein



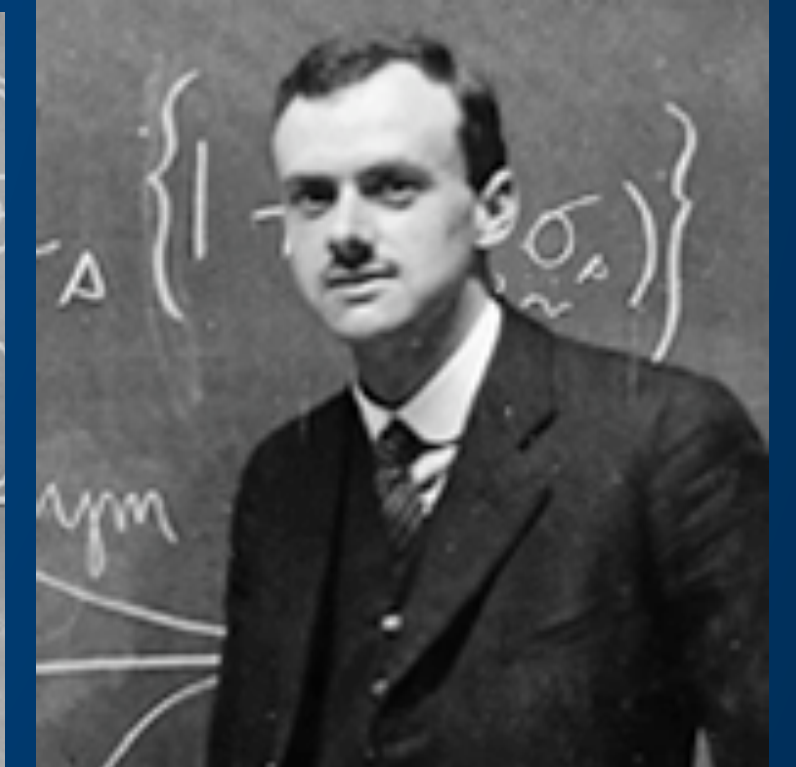
Bose

Les fermions, particules au comportement individualiste :
jamais deux particules dans le même état

électrons, protons, neutrons, quarks,...
spin demi-entier : 1/2, 3/2,...



Fermi



Dirac

Une première signature expérimentale

1938: London suggère que la superfluidité de l'hélium liquide découverte par Kapitza, Allen et Misener en 1937 peut être reliée à la condensation prédite par Einstein

*Mais c'est un liquide, avec beaucoup d'interactions
alors qu'Einstein considérait un gaz parfait...*

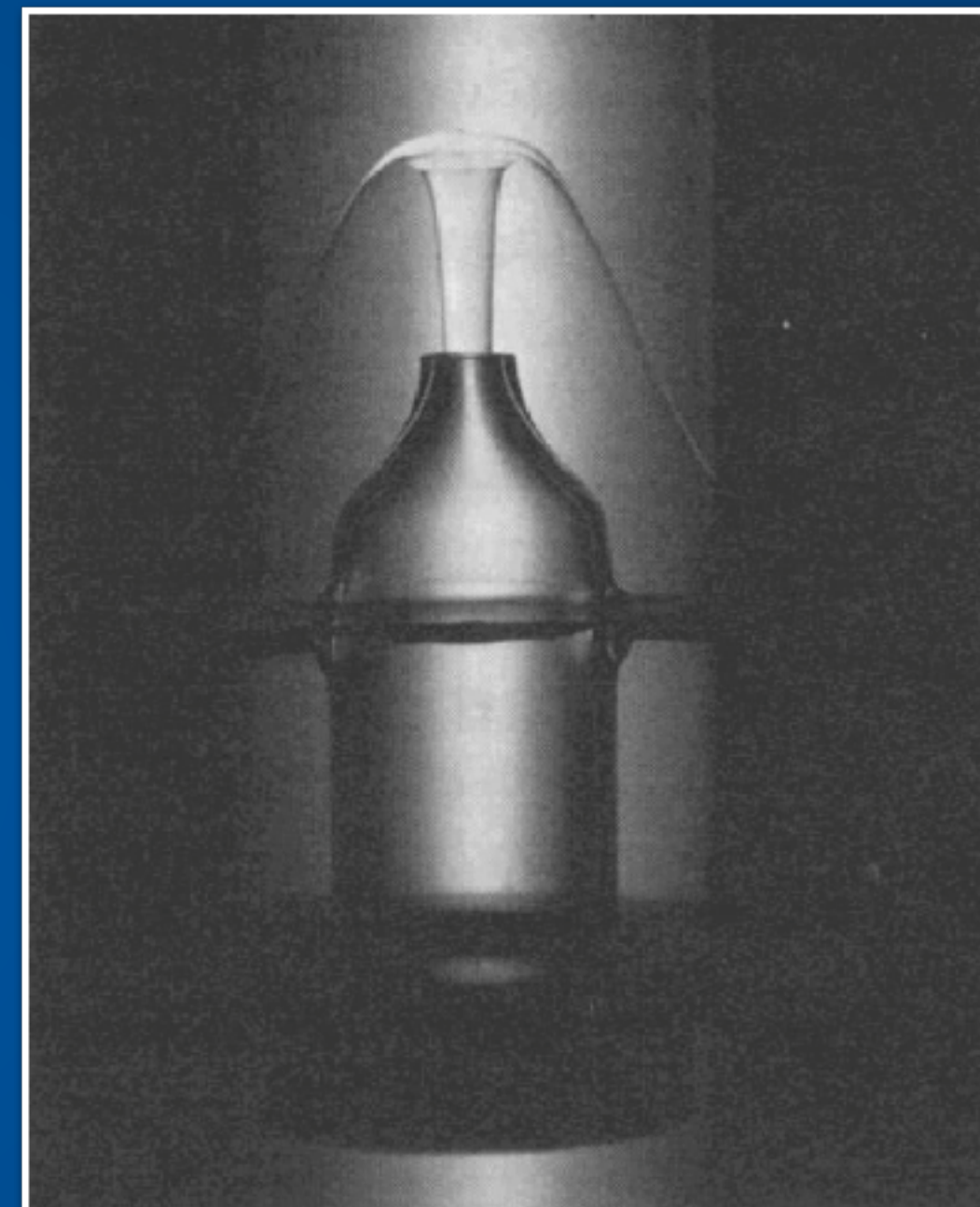
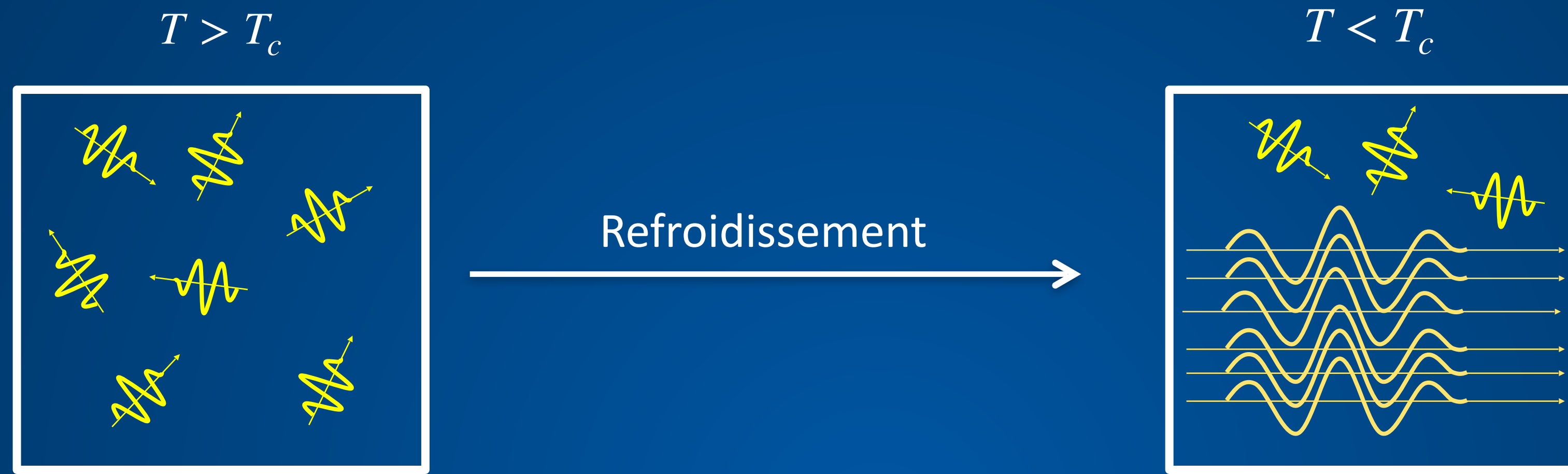


photo J. Allen
Saint Andrews U.

Un saut temporel, jusqu'aux années 1990

Le seuil de la condensation de Bose-Einstein



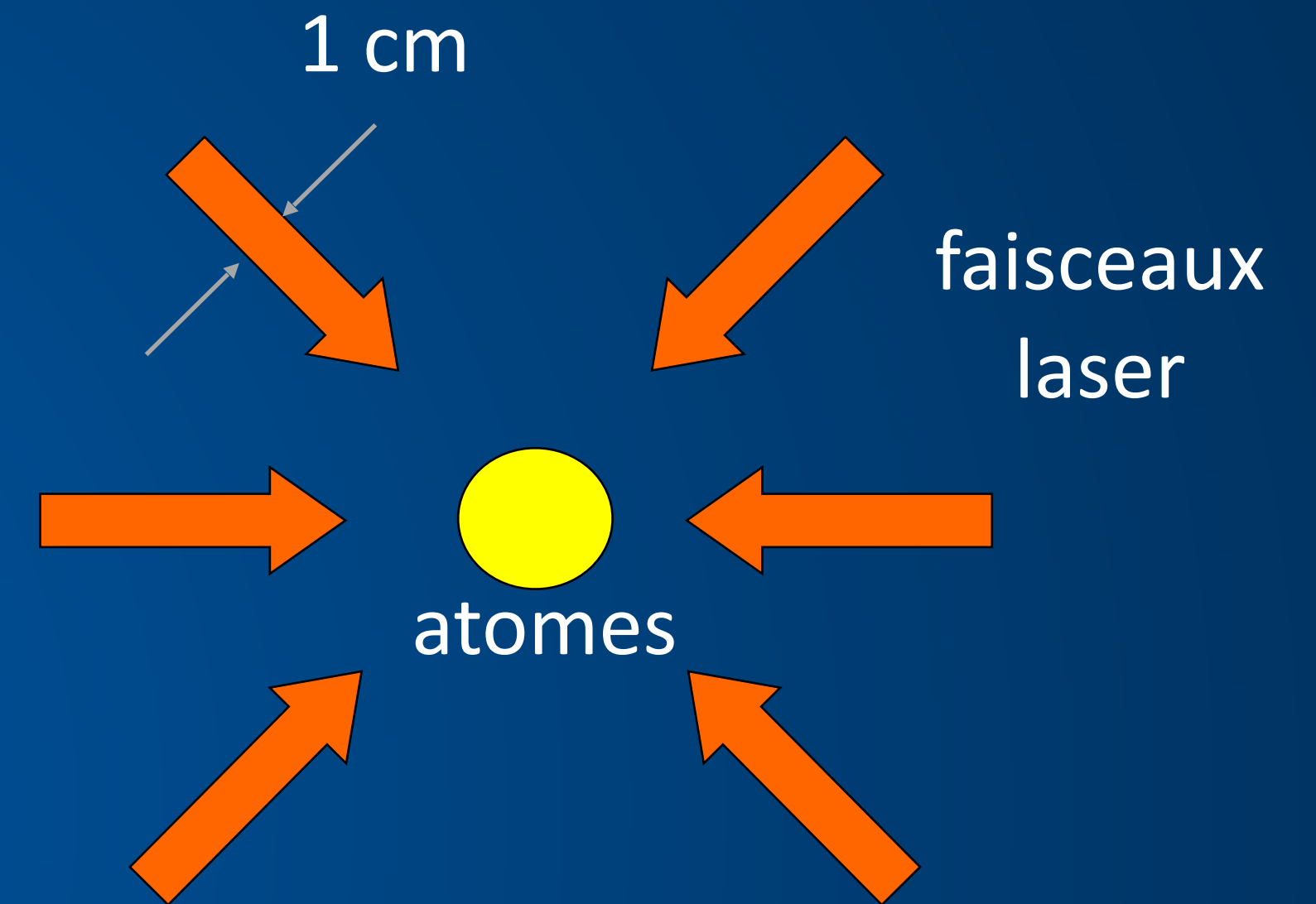
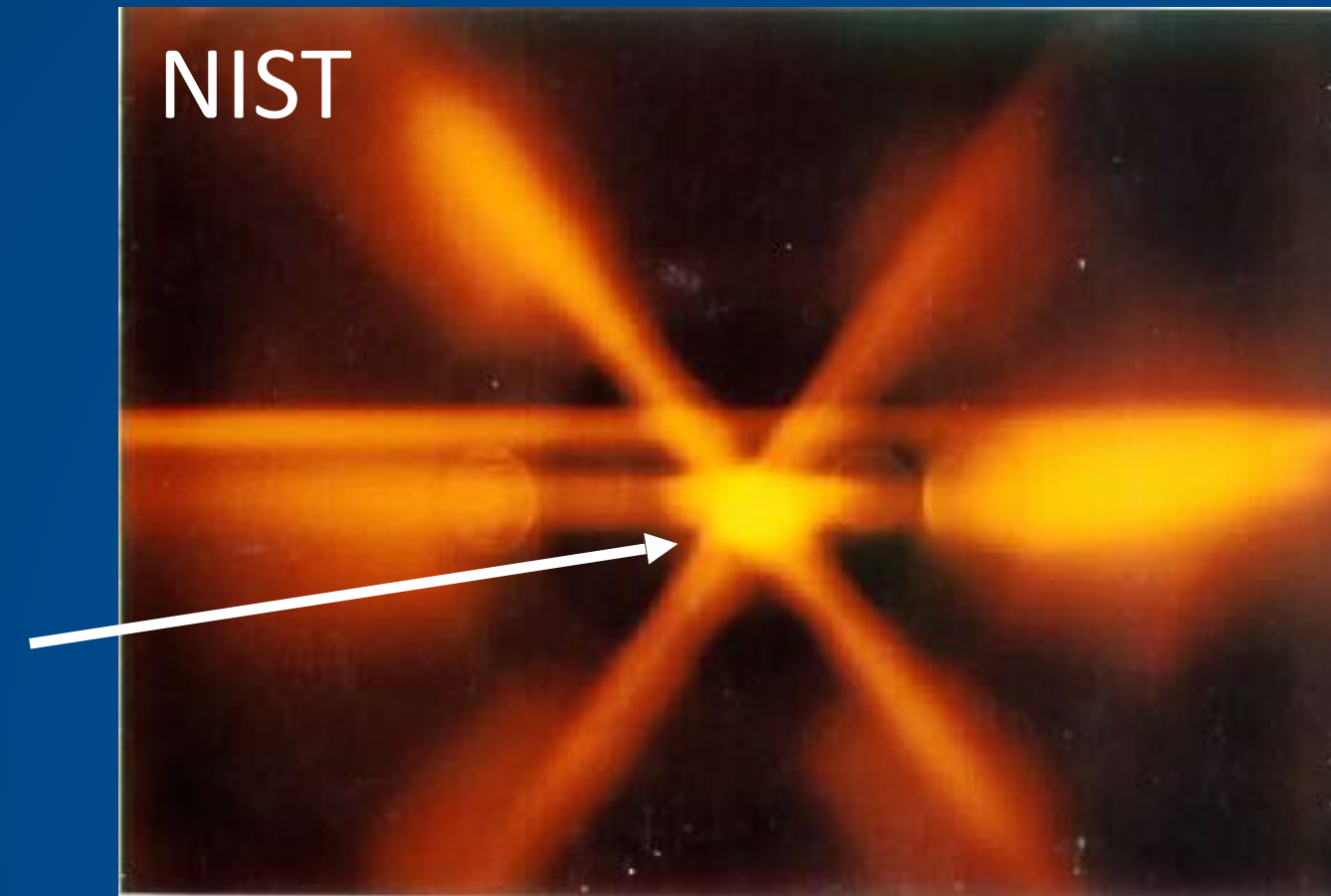
La condensation se produit quand la longueur d'onde de De Broglie

$$\lambda = \frac{h}{m\bar{v}} \text{ devient de l'ordre de la distance entre particules}$$

Pour un gaz dilué, $d \sim 0.1$ à $1 \mu\text{m}$: température de l'ordre du microkelvin ou en deçà

Etape 1 : les mélasses optiques

un milliard d'atomes de sodium au centre d'une enceinte à vide

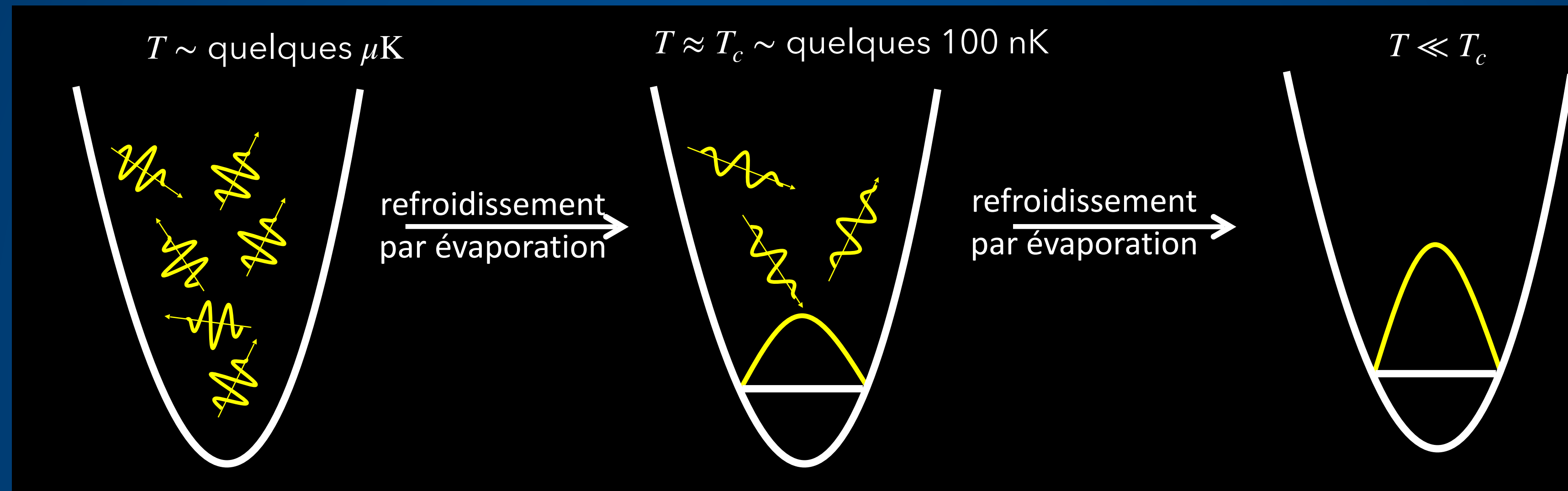


Dans cette configuration, les atomes sont refroidis à des températures très basses (microKelvin)

Prix Nobel 1997 pour S. Chu, C. Cohen-Tannoudji & W. Phillips

Etape 2 : le refroidissement par évaporation

1990-95, Kleppner, Cornell & Wieman, Ketterle



Point de condensation : $\lambda \approx$ distance entre atomes

atomes de Rb @ 200 nK : $\lambda = 0.1 \mu\text{m}$

Condensation de Bose-Einstein d'un gaz de rubidium

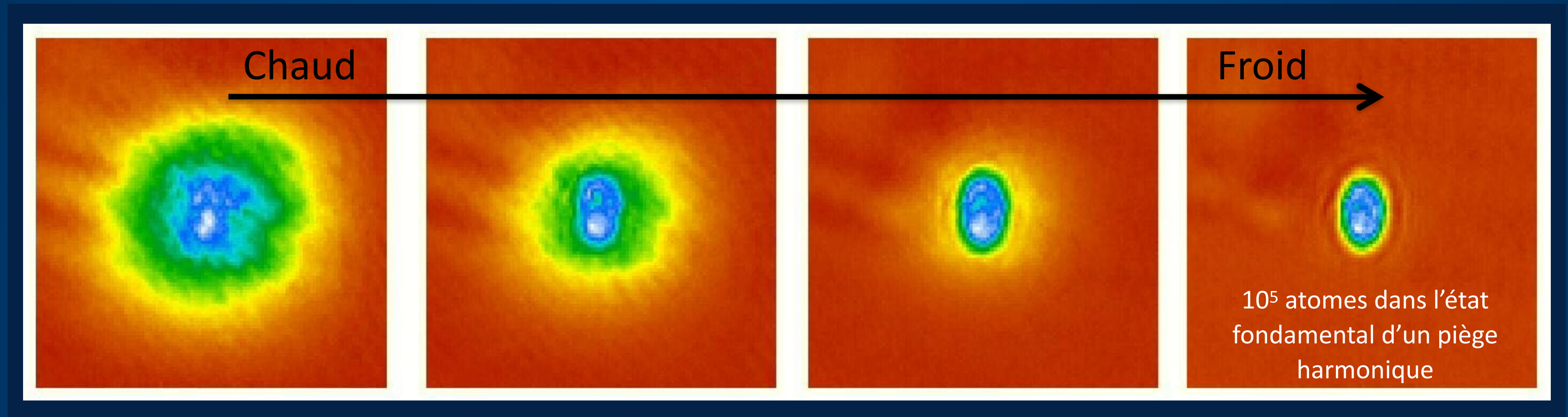
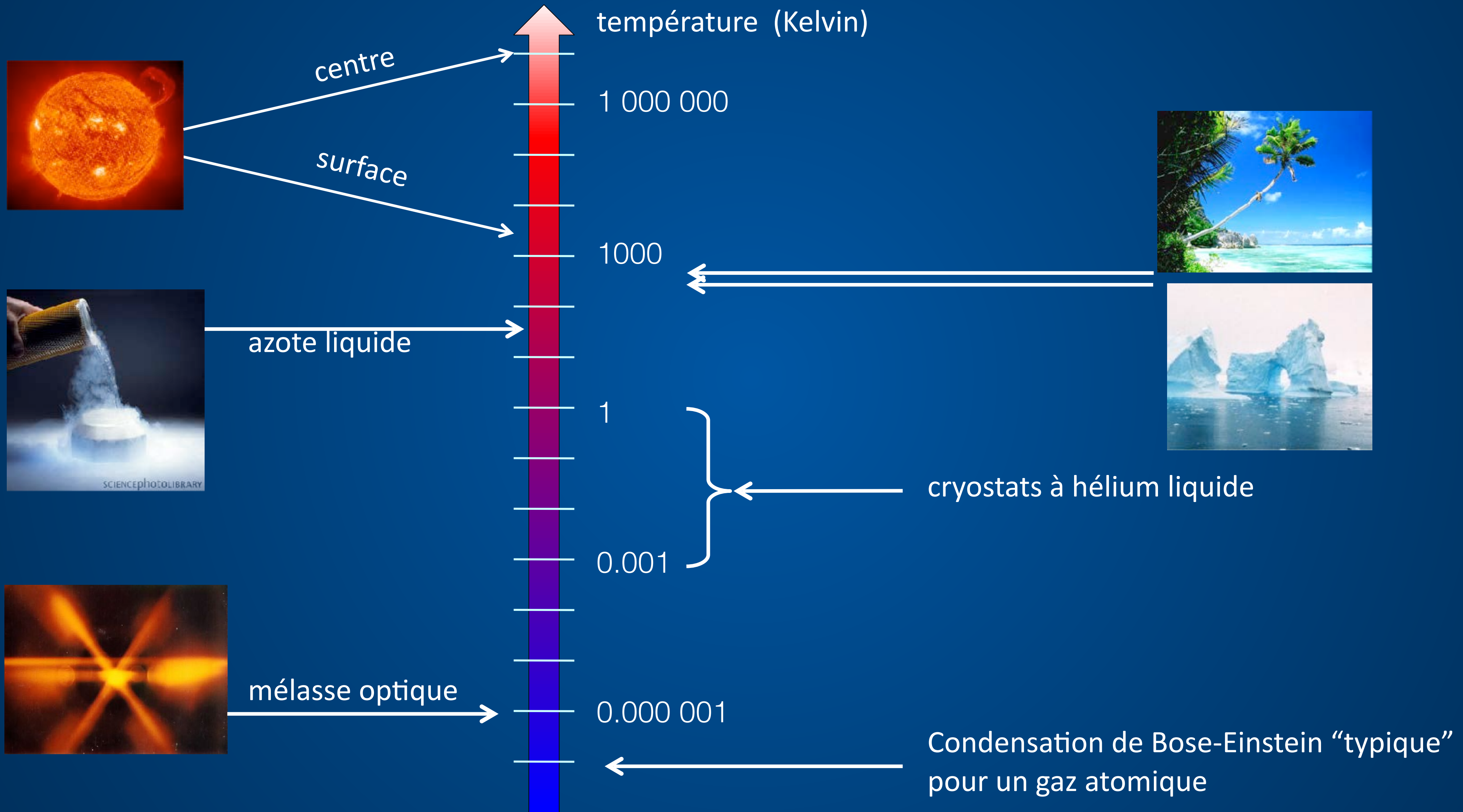


Image ENS

Les atomes qui ont condensé : H, Li, Na, K, Rb, Cs, He, Yb, Cr, Ca, Sr, Er, Dy

Autres expériences menées avec des gaz de polaritons (paires électron-trou couplées à un champ lumineux)

L'échelle de température



Description mathématique d'un condensat de Bose-Einstein

- Les particules interagissent entre elles

Généralise le traitement “gaz parfait” d'Einstein

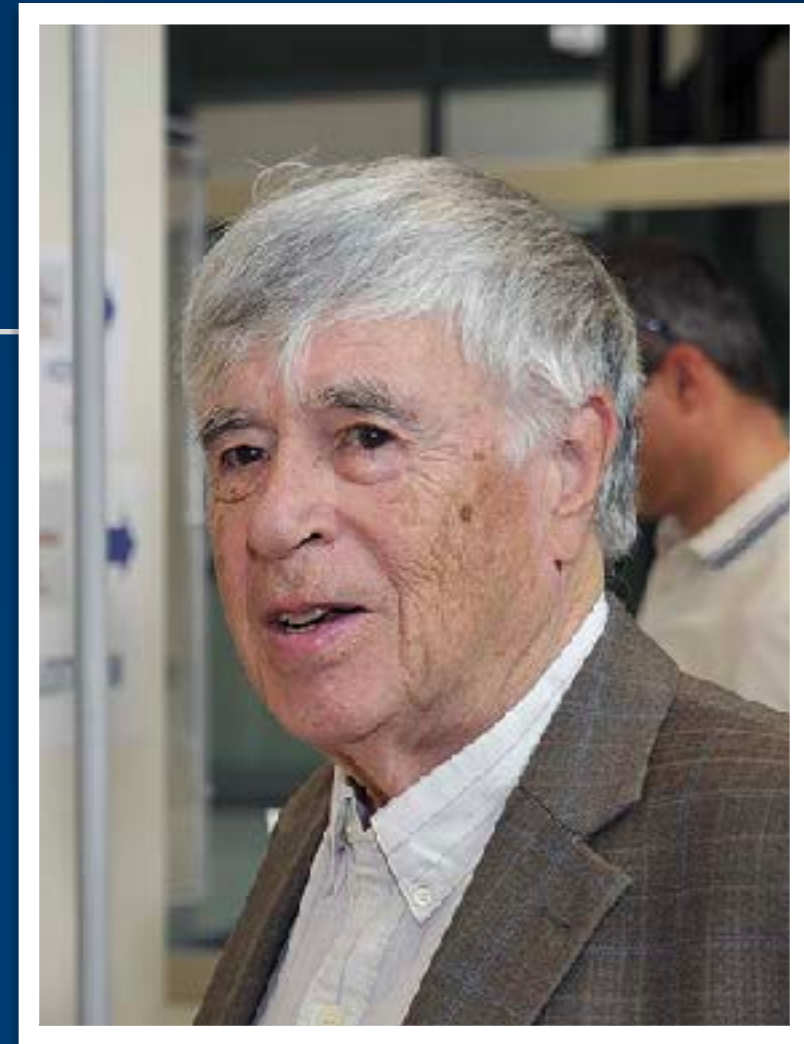
- Cette interaction est bien décrite par une approche “champ moyen”

- *On peut décrire l'état à N corps par une fonction d'onde macroscopique*

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \psi(\mathbf{r}_1) \psi(\mathbf{r}_2) \dots \psi(\mathbf{r}_N)$$

- *Chaque particule évolue dans un potentiel proportionnel à la densité moyenne du gaz*

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + g |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \psi(\mathbf{r}, t) \quad \text{équation de Gross-Pitaevskii}$$

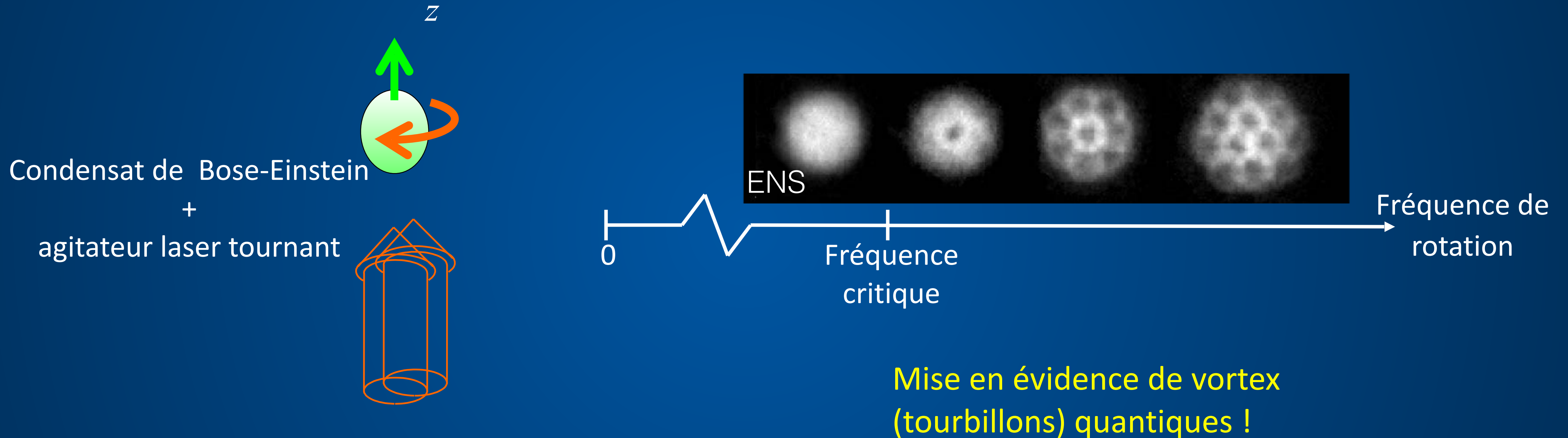


Lev Pitaevskii
1933-2022

Une plateforme remarquable pour aborder la physique non-linéaire

La fonction d'onde macroscopique

Comment tourne un condensat de Bose-Einstein ?

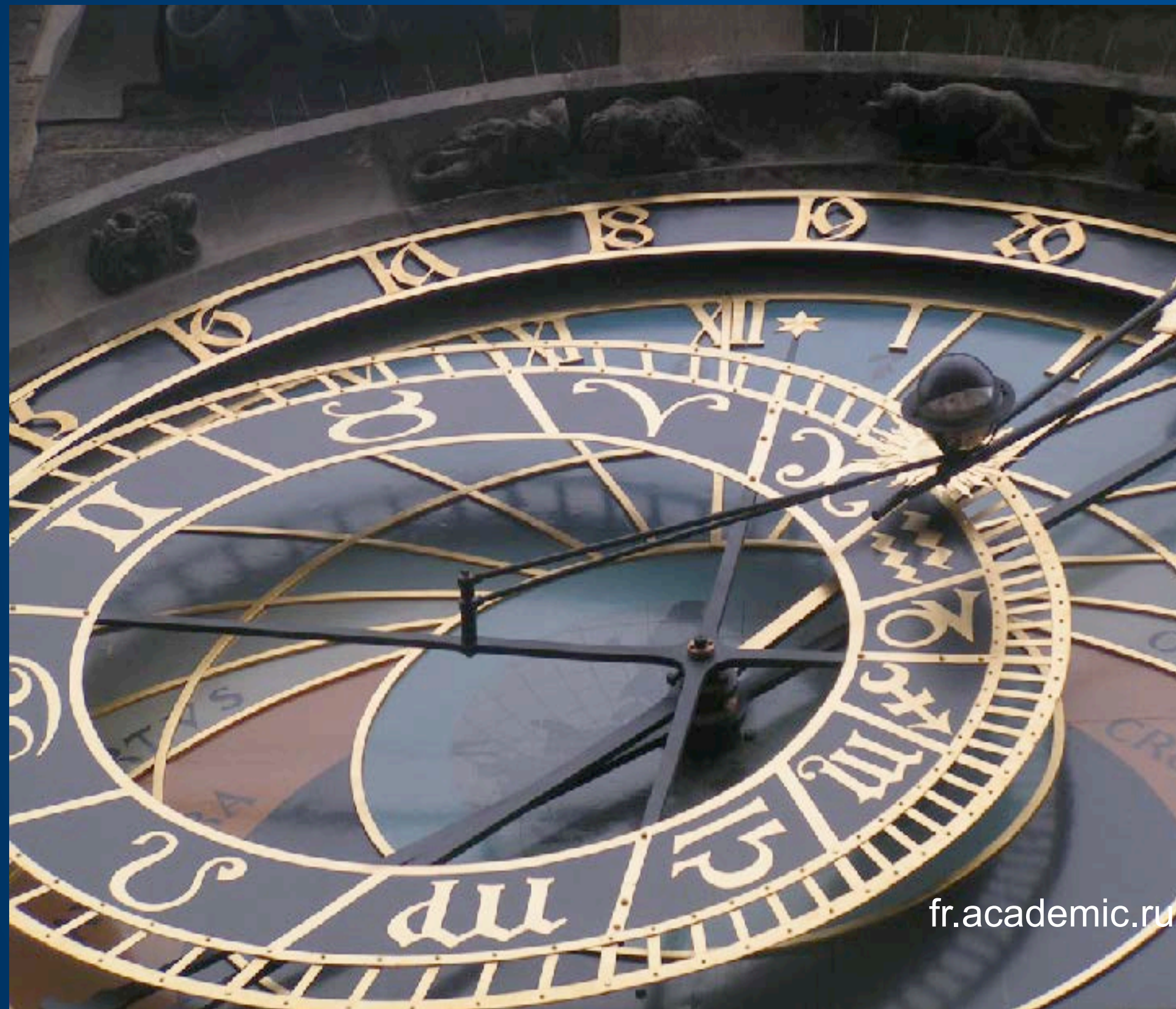


Preuve du caractère superfluide de l'assemblée d'atomes

Un exemple d'application : la simulation quantique

Calculer ou simuler ?

Utiliser ces plateformes pour simuler d'autres systèmes physiques ou chimiques

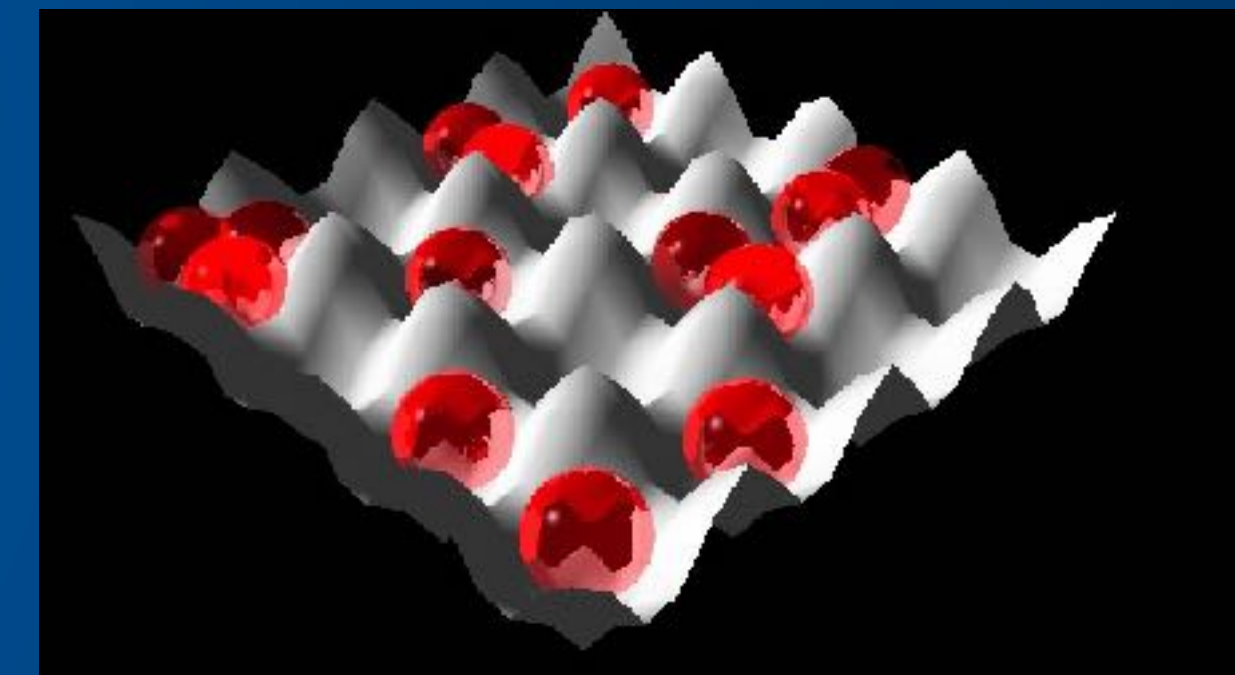
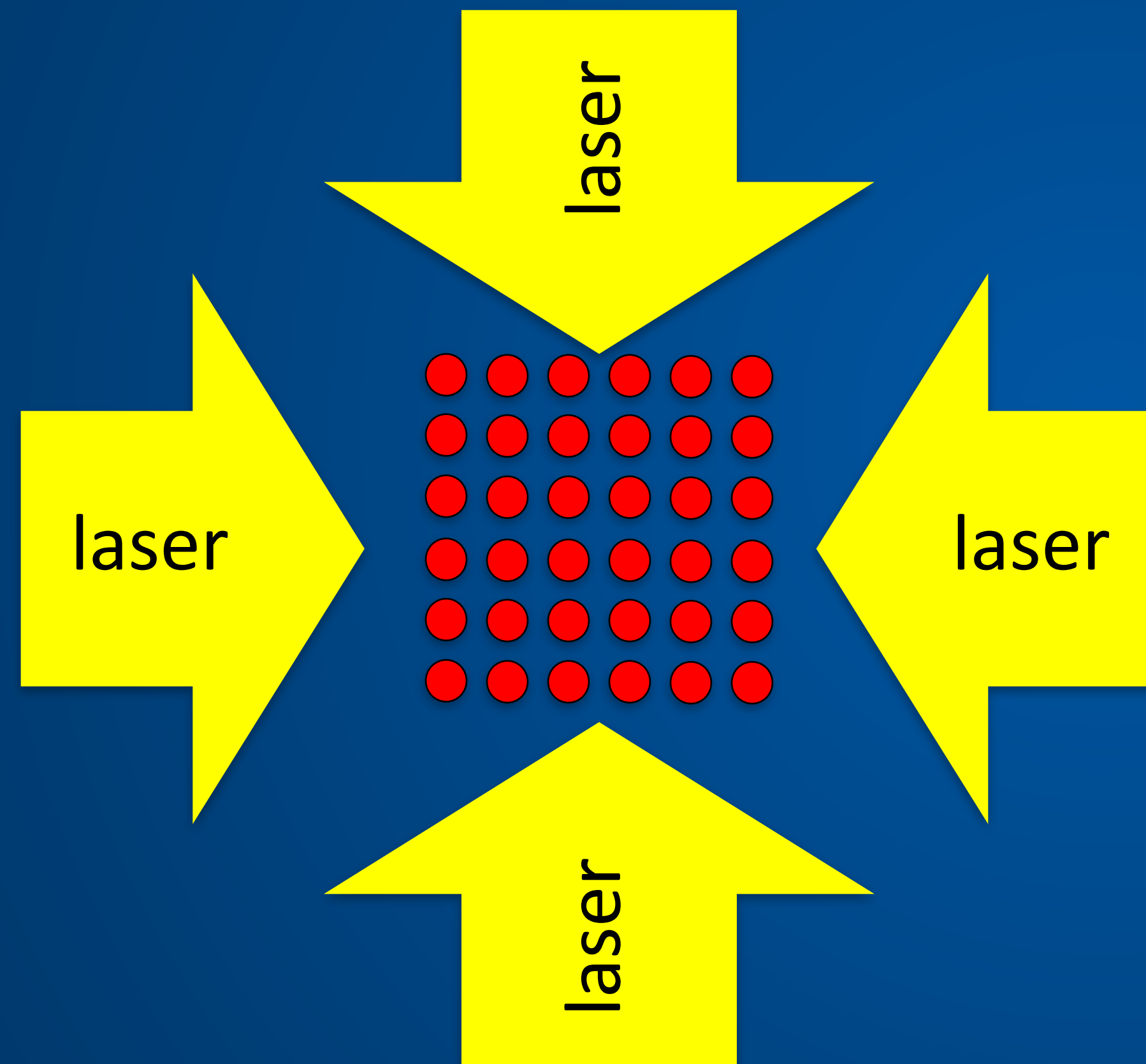


Horloges astronomiques construites
entre 1000 et 1500 en Asie et en Europe

Position des planètes, phases de la lune, éclipses

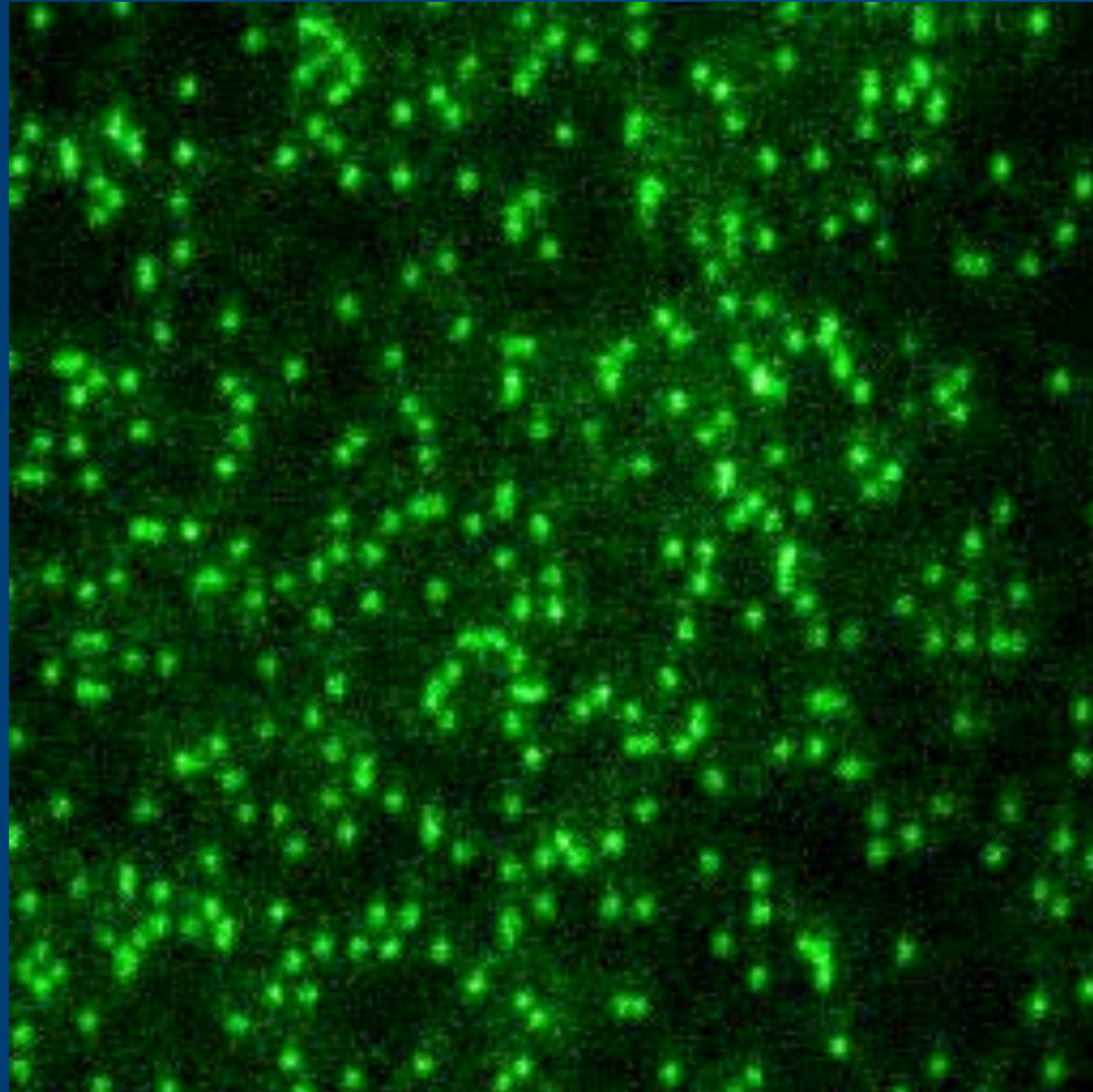
Les réseaux optiques

Systeme d'ondes lumineuses stationnaires, dans lequel les atomes s'accumulent aux « nœuds » d'intensité



« boîte à œufs » pour atomes

Visualisation des atomes dans un réseau optique

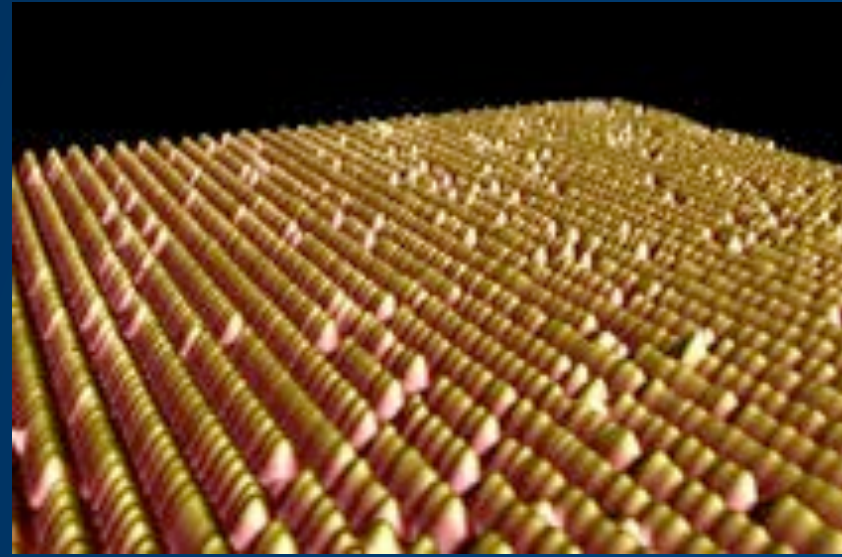


Chaque point est
un atome unique

Markus Greiner, Harvard

Le mouvement d'atomes froids dans un réseau optique présente de fortes similitudes avec celui des électrons dans les solides : système modèle pour étudier la conduction de l'électricité

Simulation de la conduction électrique



Distance d entre sites
 $3 \cdot 10^{-10}$ m

$\times 10^3$

$3 \cdot 10^{-7}$ m

Masse m
électron

$\times 10^5$

atome

Température
300 K

$\times 10^{-11}$

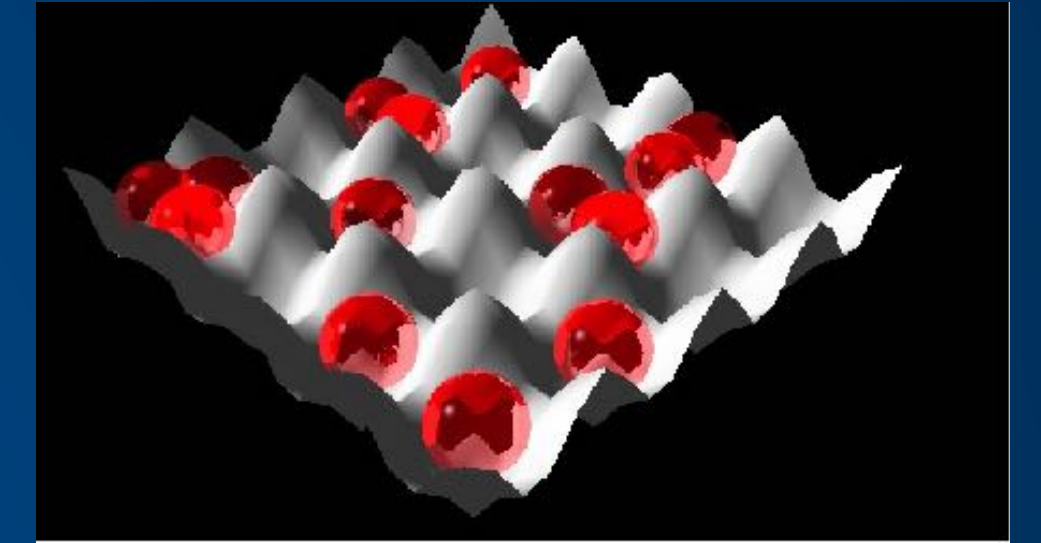
3 nK

Longueur d'onde de de Broglie

$3 \cdot 10^{-9}$ m

$\times 10^3$

$3 \cdot 10^{-6}$ m



Même nombre caractéristique λ / d pour les deux situations

*On peut espérer aborder ainsi des problèmes encore mal compris,
comme la supraconductivité à haute température critique*

En conclusion

Retour vers le passé : une collaboration entre Bose et Einstein ?

Bose à Einstein, 26 octobre 1924:

My heartfelt gratitude for taking the trouble of translating the paper yourself and publishing it. I just saw it in print before I left India. I have sent you about the middle of June a second paper entitled "Thermal Equilibrium in the Radiation Field in the Presence of Matter."

I am rather anxious to know your opinion about it, as I think it to be rather important. I don't know whether it will be possible also to have this paper published in Zeit.fur Physik. I have been granted study leave by my university for 2 years. I have arrived just a week ago in Paris. I don't know whether it will be possible for me to work under you in Germany. I shall be glad however if you grant me the permission to work under you, for it will mean for me the realization of a long cherished hope.

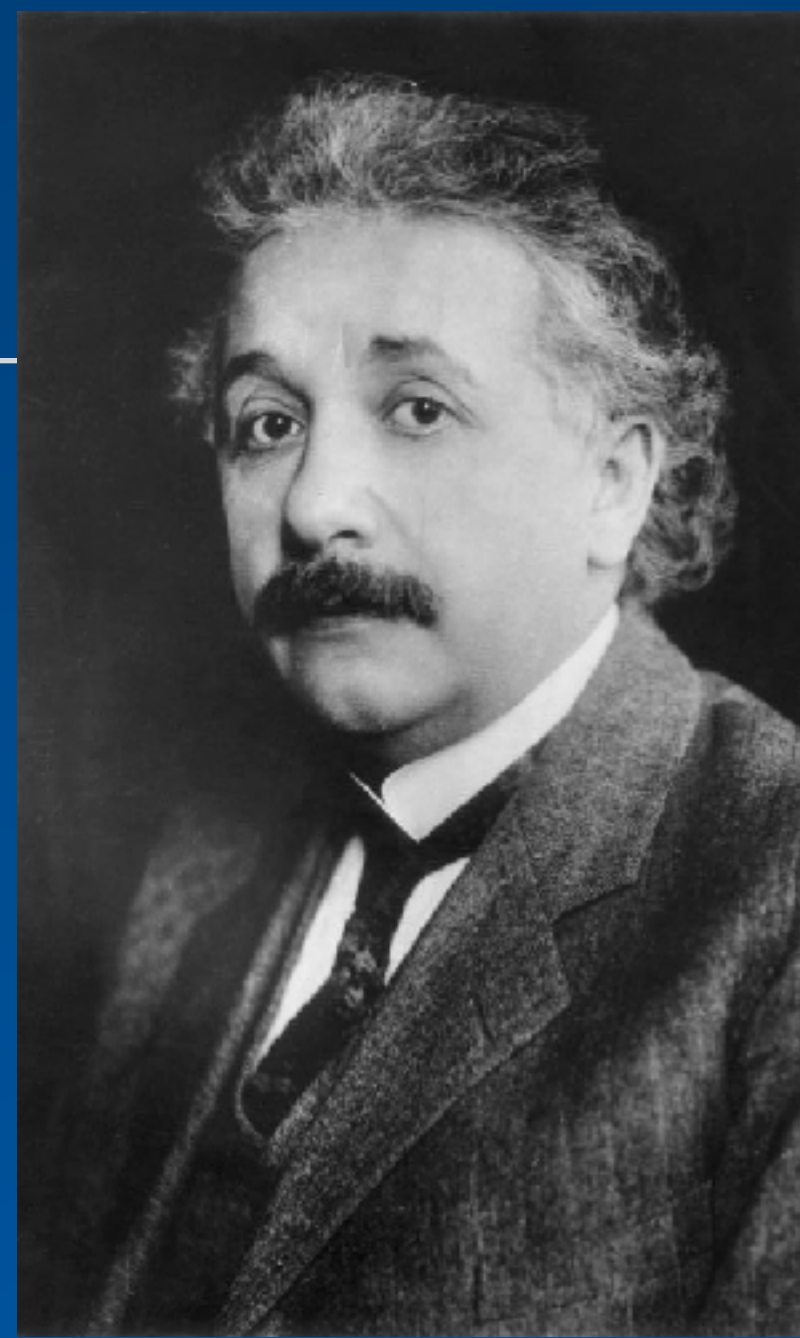
Einstein traduisit également cet article [*Thermal equilibrium in the radiation field in the presence of matter*, Zeit.Phys. 27, 384 (1924)], mais il ajouta une critique sévère :

"Je considère que l'hypothèse de Bose sur la probabilité de processus de rayonnement élémentaire est incorrecte pour les raisons suivantes..."

Dans une lettre du 27 janvier 1925 écrite à Paris, Bose annonce à Einstein qu'il va répondre à ses critiques, mais cette réponse n'est jamais venue.

Einstein passa ensuite à autre chose et aucune collaboration entre lui et Bose ne s'établit.

En conclusion



Pierre centrale dans l'édifice quantique : acte fondateur du problème quantique à N corps

La théorie quantitative des superfluides et des supraconducteurs ne sera abordée que dans la seconde moitié du XXème siècle

De manière paradoxale, cette pierre est posée alors même que la physique quantique à 1 corps (par exemple l'équation de Schrödinger) n'a pas encore été établie

Rencontre unique entre l'enthousiasme inventif du jeune Bose et la géniale perspicacité du chevronné Einstein

Quelques références

S.N. Bose, Z. Physik 26, 178 (1924)

A. Einstein, Preussische Akademie der Wissenschaften, 261 (1924); 3 (1925)

The conceptual development of quantum mechanics, M. Jammer, Mc Graw Hill (1966)

S. N. Bose : co-founder of quantum statistics, W.A. Blanpied, Am. Jour. Phys. 40, 1212 (1972)

“S.N. Bose”, J. Mehra, Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society 21, 117 (1975)

On the historical development of the indistinguishability concept for microparticles, A. Kastler, (1983). In *Old and New Questions in Physics, Cosmology, Philosophy, and Theoretical Biology*, Springer US.

Albert Einstein, Quanta, Françoise Balibar, Olivier Darrigol, Bruno Jech, Seuil/CNRS (1989)

Albert Einstein, la vie et l'oeuvre, Abraham Pais, InterEditions (1993)

Statistics and Combinatorics in Early Quantum Theory, II: Early Symptoma of Indistinguishability and Holism, O. Darrigol, Historical Studies in the Physical and Biological Sciences, 21, 237 (1991)

Einstein aujourd'hui, Savoirs actuel, EDP Sciences/CNRS éditions (2005)

I. Bloch, J. Dalibard, W. Zwerger, *Many-body physics with ultracold gases*, Rev. Mod. Phys. 80, 885 (2009)

J. Dalibard, cours au Collège de France (de 2012 à 2024), disponibles à <https://pro.college-de-france.fr/jean.dalibard/index.html>

Merci !

La lettre complète de Bose à Einstein

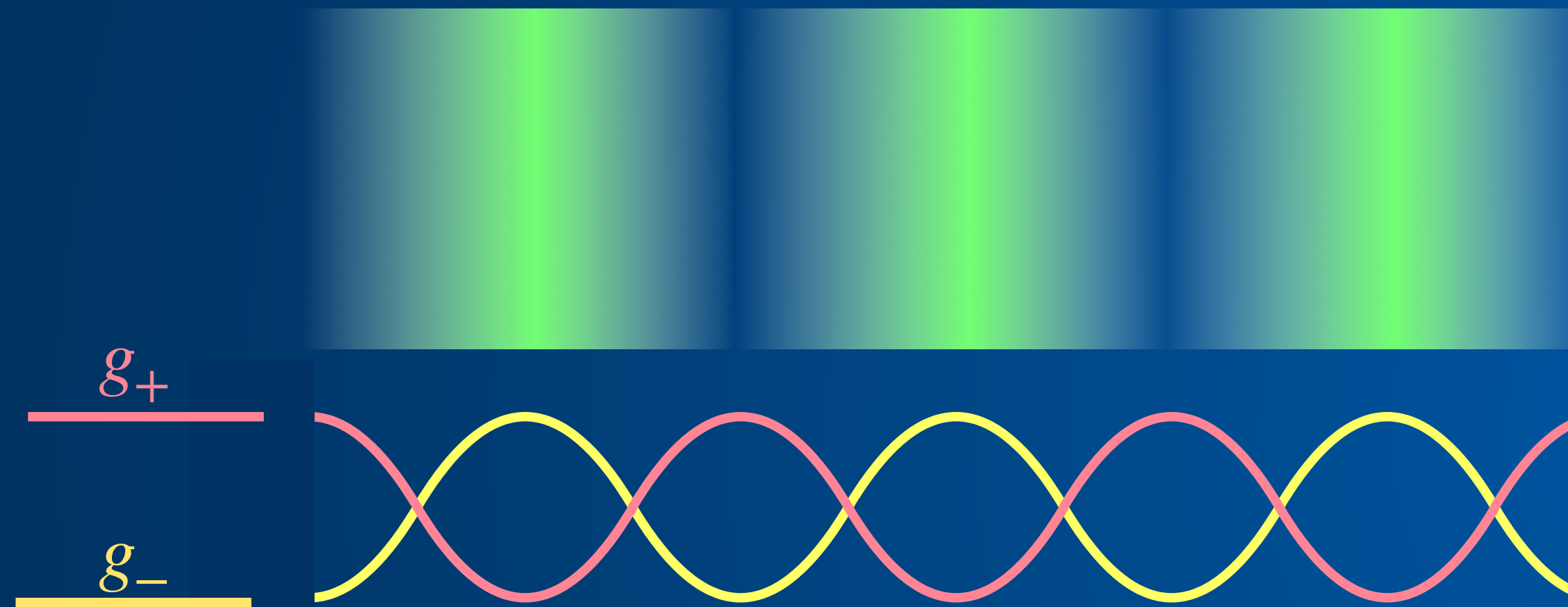
I have ventured to send you the accompanying article for your perusal and opinion. I am anxious to know what you think of it. You will see that I have tried to deduce the coefficient $8\pi \nu^2/c^3$ in Planck's Law independent of the classical electrodynamics, only assuming that the ultimate elementary regions in the phase-space has the content h^3 . I do not know sufficient German to translate the paper. If you think the paper worth publication I shall be grateful if you arrange for its publication in *Zeitschrift fur Physik*. Though a complete stranger to you, I do not hesitate in making such a request. Because we are all your pupils though profiting only from your teachings through your writings. I don't know whether you still remember that somebody from Calcutta asked your permission to translate your papers on relativity in English. You acceded to the request. The book has since been published. I was the one who translated your paper on Generalized Relativity."

What is the mechanism for cooling (2)?

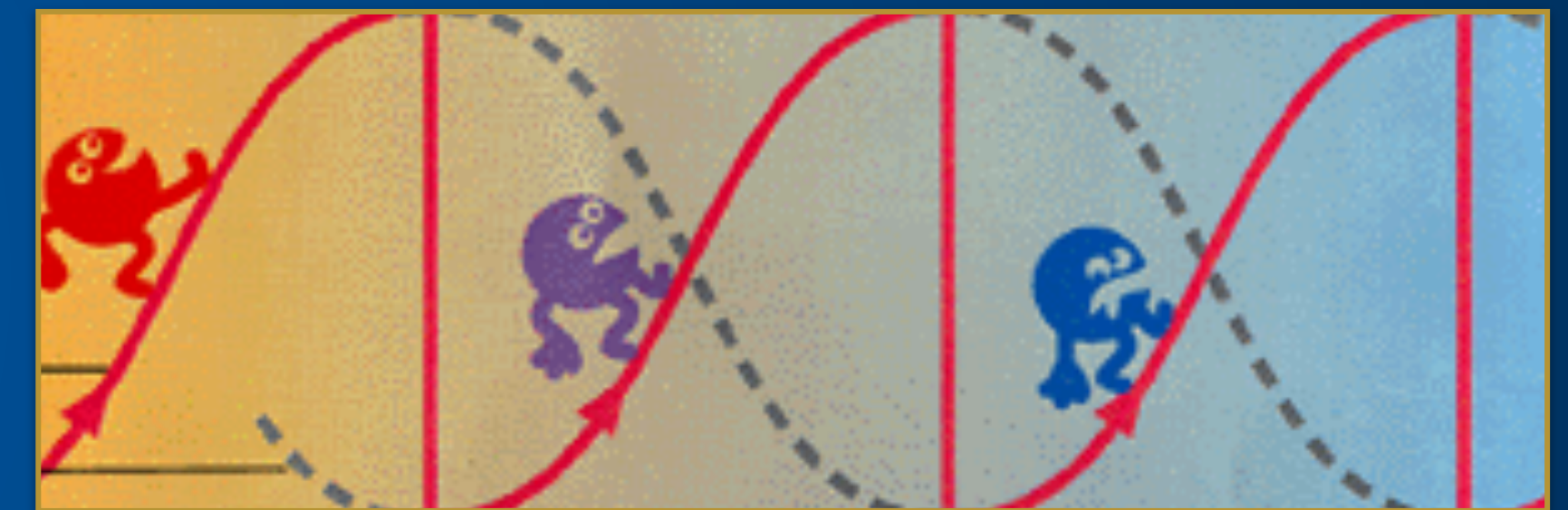


Sisyphus cooling (1988: Cohen-Tannoudji & Dalibard, Chu et al.)

Optical molasses = Laser standing wave



Two different atomic states, here g_+ and g_- ,
feel opposite dipole potentials

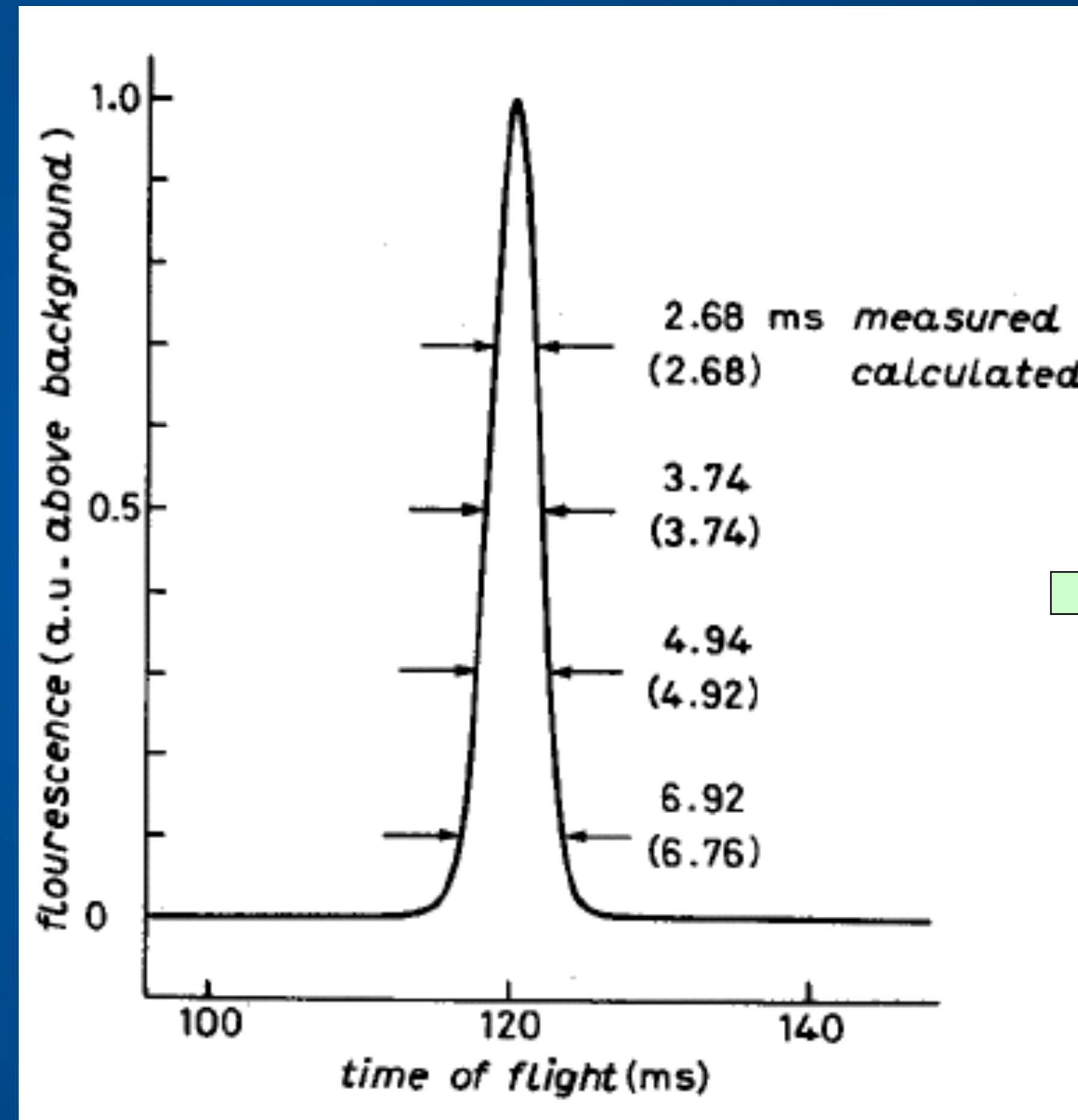
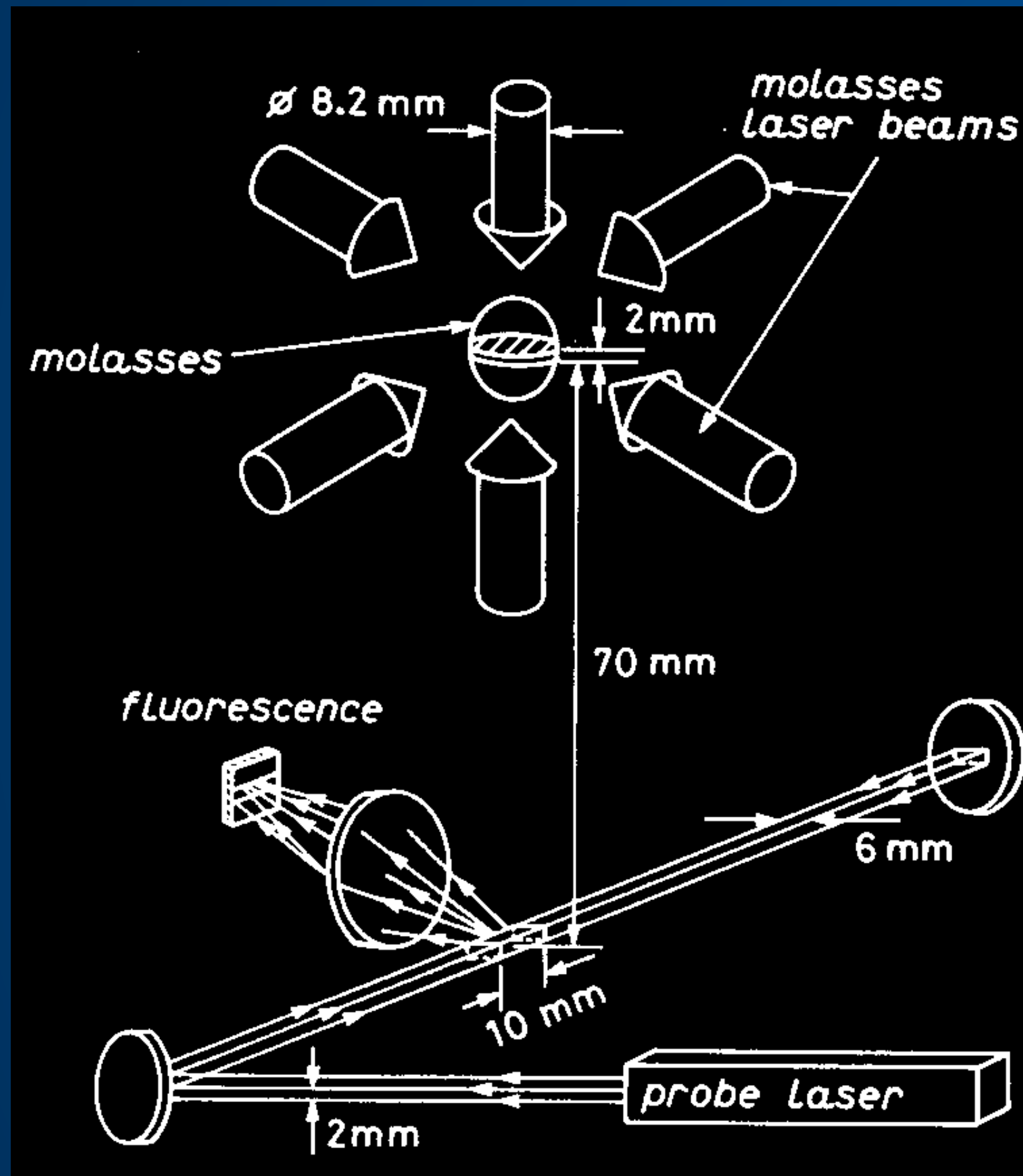


Nobel Foundation

Limit of Sisyphus cooling: $m\Delta v_{\text{atom}} \sim \hbar k$ \longrightarrow $k_B T = m(\Delta v_{\text{atom}})^2 \sim \frac{\hbar^2 k^2}{m}$: microkelvin

↑
momentum of
a single photon

Comment mesurer la température des gaz d'atomes froids?



largeur en vitesse
 $\Delta v = 1 \text{ cm/s}$

$$\frac{1}{2}k_B T = \frac{1}{2}m\Delta v^2$$

$T = 2 \text{ microKelvin}$