Éléments d'introduction à la relativité générale

Loïc Villain
Institut Denis Poisson, Université de Tours & CNRS
loic.villain@univ-tours.fr

XII-ième Rencontres des infinis, le 01 Juillet 2024

La relativité générale : quoi et pourquoi ?

- théorie proposée en **1915** par Einstein (développement de 1907 à 1915)
- généralisation de la relativité restreinte (1905)
- **principe de relativité restreint** :
  « Les lois non-gravitationnelles de la mécanique et de l'électrodynamique sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels. »
- **principe de relativité généralisé** :
  « Les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels. »

$\Longrightarrow$ description « **relativiste** » des phénomènes gravitationnels

$\Longrightarrow$ description du monde selon le point de vue d'**observateurs quelconques**, notamment non-inertiels

remarque : *a priori*, ce sont deux **problèmes totalement indépendants**

$\Longrightarrow$ proposition d'autres théories « relativistes » de la gravitation avant, et même après

La relativité générale : quoi et pourquoi ?

- théorie proposée en **1915** par Einstein (développement de 1907 à 1915)
- généralisation de la relativité restreinte (1905)
- **principe de relativité restreint** :
  « Les lois non-gravitationnelles de la mécanique et de l'électrodynamique sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels. »
- **principe de relativité généralisé** :
  « Les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels. »

  $\Longrightarrow$ description « **relativiste** » des phénomènes gravitationnels

  $\Longrightarrow$ description du monde selon le point de vue d'**observateurs quelconques**, notamment non-inertiels

remarque : *a priori*, ce sont deux **problèmes totalement indépendants**

$\Longrightarrow$ proposition d'autres théories « relativistes » de la gravitation avant, et même après

La relativité générale : quoi et pourquoi ?

- théorie proposée en **1915** par Einstein (développement de 1907 à 1915)
- généralisation de la relativité restreinte (1905)
- **principe de relativité restreint** :
  « Les lois non-gravitationnelles de la mécanique et de l'électrodynamique sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels. »
- **principe de relativité généralisé** :
  « Les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels. »

$\Longrightarrow$ description « **relativiste** » des phénomènes gravitationnels

$\Longrightarrow$ description du monde selon le point de vue d'**observateurs quelconques**, notamment non-inertiels

remarque : *a priori*, ce sont deux **problèmes totalement indépendants**

$\Longrightarrow$ proposition d'autres théories « relativistes » de la gravitation avant, et même après

La relativité générale : quoi et pourquoi ?

- théorie proposée en **1915** par Einstein (développement de 1907 à 1915)
- généralisation de la relativité restreinte (1905)
- **principe de relativité restreint** :
  *« Les lois non-gravitationnelles de la mécanique et de l'**électrodynamique** sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels. »*
- **principe de relativité généralisé** :
  « Les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels. »

  $\Longrightarrow$ description « **relativiste** » des phénomènes gravitationnels

  $\Longrightarrow$ description du monde selon le point de vue d'**observateurs quelconques**, notamment non-inertiels

remarque : *a priori*, ce sont deux **problèmes totalement indépendants**

$\Longrightarrow$ proposition d'autres théories « relativistes » de la gravitation avant, et même après

La relativité générale : quoi et pourquoi ?

- théorie proposée en **1915** par Einstein (développement de 1907 à 1915)
- généralisation de la relativité restreinte (1905)
- **principe de relativité restreint** :
  « Les lois **non-gravitationnelles** *de la mécanique et de l'***électrodynamique** *sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels. »*
- **principe de relativité généralisé** :
  « Les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels. »

$\Longrightarrow$ description « **relativiste** » des phénomènes gravitationnels

$\Longrightarrow$ description du monde selon le point de vue d'**observateurs quelconques**, notamment non-inertiels

remarque : *a priori*, ce sont deux **problèmes totalement indépendants**

$\Longrightarrow$ proposition d'autres théories « relativistes » de la gravitation avant, et même après

La relativité générale : quoi et pourquoi ?

- théorie proposée en **1915** par Einstein (développement de 1907 à 1915)
- généralisation de la relativité restreinte (1905)
- **principe de relativité restreint** :
  « *Les lois* **non-gravitationnelles** *de la mécanique et de l'***électrodynamique** *sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels.* »
- **principe de relativité généralisé** :
  « *Les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels.* »

$\Longrightarrow$ description « **relativiste** » des phénomènes gravitationnels

$\Longrightarrow$ description du monde selon le point de vue d'**observateurs quelconques**, notamment non-inertiels

remarque : *a priori*, ce sont deux **problèmes totalement indépendants**

$\Longrightarrow$ proposition d'autres théories « relativistes » de la gravitation avant, et même après

La relativité générale : quoi et pourquoi ?

- théorie proposée en **1915** par Einstein (développement de 1907 à 1915)
- généralisation de la relativité restreinte (1905)
- **principe de relativité restreint** :
  « Les lois **non-gravitationnelles** *de la mécanique et de l'***électrodynamique** *sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels. »*
- **principe de relativité généralisé** :
  « Les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels. »

$\Longrightarrow$ description « **relativiste** » des phénomènes gravitationnels

$\Longrightarrow$ description du monde selon le point de vue d'**observateurs quelconques**, notamment non-inertiels

remarque : *a priori*, ce sont deux **problèmes totalement indépendants**

$\Longrightarrow$ proposition d'autres théories « relativistes » de la gravitation avant, et même après

La relativité générale : quoi et pourquoi ?

- théorie proposée en **1915** par Einstein (développement de 1907 à 1915)
- généralisation de la relativité restreinte (1905)
- **principe de relativité restreint** :
  « Les lois **non-gravitationnelles** *de la mécanique et de l'***électrodynamique** *sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels. »*
- **principe de relativité généralisé** :
  « Les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels. »

  $\Longrightarrow$ description **« relativiste »** des phénomènes gravitationnels

  $\Longrightarrow$ description du monde selon le point de vue d'**observateurs quelconques**, notamment non-inertiels

remarque : *a priori*, ce sont deux **problèmes totalement indépendants**

$\Longrightarrow$ proposition d'autres théories « relativistes » de la gravitation avant, et même après

La relativité générale : quoi et pourquoi ?

- théorie proposée en **1915** par Einstein (développement de 1907 à 1915)
- généralisation de la relativité restreinte (1905)
- **principe de relativité restreint** :
  « Les lois **non-gravitationnelles** *de la mécanique et de l'***électrodynamique** *sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels. »*
- **principe de relativité généralisé** :
  « Les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels. »

  $\Longrightarrow$ description **« relativiste »** des phénomènes gravitationnels

  $\Longrightarrow$ description du monde selon le point de vue d'**observateurs quelconques**, notamment non-inertiels

  remarque : *a priori*, ce sont deux **problèmes totalement indépendants**

  $\Longrightarrow$ proposition d'autres théories « relativistes » de la gravitation avant, et même après

La relativité générale : quoi et pourquoi ?

- théorie proposée en **1915** par Einstein (développement de 1907 à 1915)
- généralisation de la relativité restreinte (1905)
- **principe de relativité restreint** :
  « Les lois **non-gravitationnelles** *de la mécanique et de l'***électrodynamique** *sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels. »*
- **principe de relativité généralisé** :
  « Les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels. »

  $\Longrightarrow$ description **« relativiste »** des phénomènes gravitationnels

  $\Longrightarrow$ description du monde selon le point de vue d'**observateurs quelconques**, notamment non-inertiels

  remarque : *a priori*, ce sont deux **problèmes totalement indépendants**

  $\Longrightarrow$ proposition d'autres théories « relativistes » de la gravitation avant, et même après

La relativité générale : pré-requis élémentaires ?

- **Gravitation relativiste** ?
- $c_{\text{grav.}} \leqslant c < +\infty$
- énergie (et pas seulement masse) = source du champ gravitationnel (car $E = mc^2$)
- formalisme spatio-temporel (cf. Minkowski, 1907)

  $\Longrightarrow$ énergie-impulsion = source (mais aussi « charge passive »)

  $\Longrightarrow$ « **tenseurs** lorentziens »
- **Observateurs non-inertiels** ?
- utilisation de coordonnées (spatio-temporelles) quelconques (curvilignes)

  $\Longrightarrow$ « **tenseurs lorentziens généralisés** »

La relativité générale : pré-requis élémentaires ?

- **Gravitation relativiste** ?
  - $c_{\text{grav.}} \leqslant c < +\infty$
  - énergie (et pas seulement masse) = source du champ gravitationnel (car $E = mc^2$)
  - formalisme spatio-temporel (cf. Minkowski, 1907)

    $\Longrightarrow$ énergie-impulsion = source (mais aussi « charge passive »)

    $\Longrightarrow$ « **tenseurs** lorentziens »
- **Observateurs non-inertiels** ?
  - utilisation de coordonnées (spatio-temporelles) quelconques (curvilignes)

    $\Longrightarrow$ « **tenseurs lorentziens généralisés** »

La relativité générale : pré-requis élémentaires ?

- **Gravitation relativiste ?**
- $c_{\text{grav.}} \leqslant c < +\infty$ ($\implies$ rayonnement gravitationnel)
- énergie (et pas seulement masse) = source du champ gravitationnel (car $E = mc^2$)
- formalisme spatio-temporel (cf. Minkowski, 1907)

  $\implies$ énergie-impulsion = source (mais aussi « charge passive »)

  $\implies$ « **tenseurs** lorentziens »
- **Observateurs non-inertiels ?**
- utilisation de coordonnées (spatio-temporelles) quelconques (curvilignes)

  $\implies$ « **tenseurs lorentziens généralisés** »

La relativité générale : pré-requis élémentaires ?

- **Gravitation relativiste** ?
- $c_{\text{grav.}} \leqslant c < +\infty$ ($\implies$ rayonnement gravitationnel)
- énergie (et pas seulement masse) $=$ source du champ gravitationnel (car $E = mc^2$)
- formalisme spatio-temporel (cf. Minkowski, 1907)

  $\implies$ énergie-impulsion $=$ source (mais aussi « charge passive »)

  $\implies$ « **tenseurs** lorentziens »
- **Observateurs non-inertiels** ?
- utilisation de coordonnées (spatio-temporelles) quelconques (curvilignes)

  $\implies$ « **tenseurs lorentziens généralisés** »

La relativité générale : pré-requis élémentaires ?

- **Gravitation relativiste** ?
- $c_{\text{grav.}} \leqslant c < +\infty$ ($\Longrightarrow$ rayonnement gravitationnel)
- énergie (et pas seulement masse) $=$ source du champ gravitationnel (car $E = mc^2$)
- formalisme spatio-temporel (cf. Minkowski, 1907)

  $\Longrightarrow$ énergie-impulsion $=$ source (mais aussi « charge passive »)

  $\Longrightarrow$ « **tenseurs** lorentziens »
- **Observateurs non-inertiels** ?
- utilisation de coordonnées (spatio-temporelles) quelconques (curvilignes)

  $\Longrightarrow$ « **tenseurs lorentziens généralisés** »

La relativité générale : pré-requis élémentaires ?

- **Gravitation relativiste** ?
- $c_{\text{grav.}} \leqslant c < +\infty$ ($\Longrightarrow$ rayonnement gravitationnel)
- énergie (et pas seulement masse) = source du champ gravitationnel (car $E = mc^2$)
- formalisme spatio-temporel (cf. Minkowski, 1907)

  $\Longrightarrow$ énergie-impulsion = source (mais aussi « charge passive »)

  $\Longrightarrow$ « **tenseurs** lorentziens »
- **Observateurs non-inertiels** ?
- utilisation de coordonnées (spatio-temporelles) quelconques (curvilignes)

  $\Longrightarrow$ « **tenseurs lorentziens généralisés** »

La relativité générale : pré-requis élémentaires ?

- **Gravitation relativiste** ?
- $c_{\text{grav.}} \leqslant c < +\infty$ ($\Longrightarrow$ rayonnement gravitationnel)
- énergie (et pas seulement masse) $=$ source du champ gravitationnel (car $E = mc^2$)
- formalisme spatio-temporel (cf. Minkowski, 1907)

  $\Longrightarrow$ énergie-impulsion $=$ source (mais aussi « charge passive »)

  $\Longrightarrow$ « **tenseurs** lorentziens »
- **Observateurs non-inertiels** ?
- utilisation de coordonnées (spatio-temporelles) quelconques (curvilignes)

  $\Longrightarrow$ « **tenseurs lorentziens généralisés** »

La relativité générale : pré-requis élémentaires ?

- **Gravitation relativiste** ?
- $c_{\text{grav.}} \leqslant c < +\infty$ ($\Longrightarrow$ rayonnement gravitationnel)
- énergie (et pas seulement masse) = source du champ gravitationnel (car $E = mc^2$)
- formalisme spatio-temporel (cf. Minkowski, 1907)

  $\Longrightarrow$ énergie-impulsion = source (mais aussi « charge passive »)

  $\Longrightarrow$ « **tenseurs** lorentziens »
- **Observateurs non-inertiels** ?
- utilisation de coordonnées (spatio-temporelles) quelconques (curvilignes)

  $\Longrightarrow$ « **tenseurs lorentziens généralisés** »

La relativité générale : pré-requis élémentaires ?

- **Gravitation relativiste** ?
- $c_{\text{grav.}} \leqslant c < +\infty$ ($\Longrightarrow$ rayonnement gravitationnel)
- énergie (et pas seulement masse) $=$ source du champ gravitationnel (car $E = mc^2$)
- formalisme spatio-temporel (cf. Minkowski, 1907)

  $\Longrightarrow$ énergie-impulsion $=$ source (mais aussi « charge passive »)

  $\Longrightarrow$ « **tenseurs** lorentziens »
- **Observateurs non-inertiels** ?
- utilisation de coordonnées (spatio-temporelles) quelconques (curvilignes)

  $\Longrightarrow$ « **tenseurs** lorentziens généralisés »

La relativité générale : pré-requis élémentaires ?

- **Gravitation relativiste** ?
- $c_{\text{grav.}} \leqslant c < +\infty$ ($\Longrightarrow$ rayonnement gravitationnel)
- énergie (et pas seulement masse) $=$ source du champ gravitationnel (car $E = mc^2$)
- formalisme spatio-temporel (cf. Minkowski, 1907)

  $\Longrightarrow$ énergie-impulsion $=$ source (mais aussi « charge passive »)

  $\Longrightarrow$ « **tenseurs** lorentziens »
- **Observateurs non-inertiels** ?
- utilisation de coordonnées (spatio-temporelles) quelconques (curvilignes)

  $\Longrightarrow$ « **tenseurs lorentziens généralisés** »

Des idées d'Einstein à leur application...

- **universalité de la chute libre**

$\Longrightarrow$ gravitation $\neq$ interaction comme les autres (principe d'équivalence)

$\Longrightarrow$ gravitation $=$ manifestation de la « géométrie » de l'espace-temps

$\Longrightarrow$ relativité générale (**RG**) $=$ exemple de théorie métrique

- **outil de base** : géométrie différentielle des espaces **pseudo**-riemanniens

$\Longrightarrow$ Hilbert : « *Physics is becoming too hard for physicists* »
(Grossmann crucial ; course Einstein/Hilbert ; nombreuses incompréhensions jusque dans les années 1960-1970 ; etc.)

remarque : la géométrie **riemannienne** était encore en train de naître quand Einstein a développé la RG (Gauss, 1827 ; Riemann, 1854 ; Christoffel, 1865 ; Levi-Civita & Ricci 1901-1917 ; et autres plus tard...)

Des idées d'Einstein à leur application...

- **universalité de la chute libre**

  $\Longrightarrow$ gravitation $\neq$ interaction comme les autres (principe d'équivalence)

  $\Longrightarrow$ gravitation = manifestation de la « géométrie » de l'espace-temps

  $\Longrightarrow$ relativité générale (**RG**) = exemple de théorie métrique

- **outil de base** : géométrie différentielle des espaces **pseudo**-riemanniens

  $\Longrightarrow$ Hilbert : *« Physics is becoming too hard for physicists »*

  (Grossmann crucial ; course Einstein/Hilbert ; nombreuses incompréhensions jusque dans les années 1960-1970 ; etc.)

  remarque : la géométrie **riemannienne** était encore en train de naître quand Einstein a développé la RG (Gauss, 1827 ; Riemann, 1854 ; Christoffel, 1865 ; Levi-Civita & Ricci 1901-1917 ; et autres plus tard...)

Des idées d'Einstein à leur application...

- **universalité de la chute libre**

  $\Longrightarrow$ gravitation $\neq$ interaction comme les autres (principe d'équivalence)

  $\Longrightarrow$ gravitation $=$ manifestation de la « géométrie » de l'espace-temps

  $\Longrightarrow$ relativité générale (**RG**) $=$ exemple de théorie métrique
- **outil de base** : géométrie différentielle des espaces **pseudo**-riemanniens

  $\Longrightarrow$ Hilbert : « *Physics is becoming too hard for physicists* »

  (Grossmann crucial ; course Einstein/Hilbert ; nombreuses incompréhensions jusque dans les années 1960-1970 ; etc.)

  remarque : la géométrie **riemannienne** était encore en train de naître quand Einstein a développé la RG (Gauss, 1827 ; Riemann, 1854 ; Christoffel, 1865 ; Levi-Civita & Ricci 1901-1917 ; et autres plus tard...)

Des idées d'Einstein à leur application...

- **universalité de la chute libre**

  $\Longrightarrow$ gravitation $\neq$ interaction comme les autres (principe d'équivalence)

  $\Longrightarrow$ gravitation $=$ manifestation de la « géométrie » de l'espace-temps

  $\Longrightarrow$ relativité générale (**RG**) $=$ exemple de théorie métrique

- **outil de base** : géométrie différentielle des espaces **pseudo**-riemanniens

  $\Longrightarrow$ Hilbert : *« Physics is becoming too hard for physicists »*

  (Grossmann crucial ; course Einstein/Hilbert ; nombreuses incompréhensions jusque dans les années 1960-1970 ; etc.)

  remarque : la géométrie **riemannienne** était encore en train de naître quand Einstein a développé la RG (Gauss, 1827 ; Riemann, 1854 ; Christoffel, 1865 ; Levi-Civita & Ricci 1901-1917 ; et autres plus tard...)

Des idées d'Einstein à leur application...

- **universalité de la chute libre**

$\Longrightarrow$ gravitation $\neq$ interaction comme les autres (principe d'équivalence)

$\Longrightarrow$ gravitation = manifestation de la « géométrie » de l'espace-temps

$\Longrightarrow$ relativité générale (**RG**) = exemple de théorie métrique

- **outil de base** : géométrie différentielle des espaces **pseudo**-riemanniens

$\Longrightarrow$ Hilbert : « *Physics is becoming too hard for physicists* »
(Grossmann crucial ; course Einstein/Hilbert ; nombreuses incompréhensions jusque dans les années 1960-1970 ; etc.)

remarque : la géométrie **riemannienne** était encore en train de naître quand Einstein a développé la RG (Gauss, 1827 ; Riemann, 1854 ; Christoffel, 1865 ; Levi-Civita & Ricci 1901-1917 ; et autres plus tard...)

Des idées d'Einstein à leur application...

- **universalité de la chute libre**

  $\Longrightarrow$ gravitation $\neq$ interaction comme les autres (principe d'équivalence)

  $\Longrightarrow$ gravitation $=$ manifestation de la « géométrie » de l'espace-temps

  $\Longrightarrow$ relativité générale (**RG**) $=$ exemple de théorie métrique

- **outil de base** : géométrie différentielle des espaces **pseudo**-riemanniens

  $\Longrightarrow$ Hilbert : *« Physics is becoming too hard for physicists »*
  (Grossmann crucial ; course Einstein/Hilbert ; nombreuses incompréhensions jusque dans les années 1960-1970 ; etc.)

  remarque : la géométrie **riemannienne** était encore en train de naître quand Einstein a développé la RG (Gauss, 1827 ; Riemann, 1854 ; Christoffel, 1865 ; Levi-Civita & Ricci 1901-1917 ; et autres plus tard...)

Des idées d'Einstein à leur application...

- **universalité de la chute libre**

  $\Longrightarrow$ gravitation $\neq$ interaction comme les autres (principe d'équivalence)

  $\Longrightarrow$ gravitation $=$ manifestation de la « géométrie » de l'espace-temps

  $\Longrightarrow$ relativité générale (**RG**) $=$ exemple de théorie métrique
- **outil de base** : géométrie différentielle des espaces **pseudo**-riemanniens

  $\Longrightarrow$ Hilbert : *« Physics is becoming too hard for physicists »*
  (Grossmann crucial ; course Einstein/Hilbert ; nombreuses incompréhensions jusque dans les années 1960-1970 ; etc.)

remarque : la géométrie **riemannienne** était encore en train de naître quand Einstein a développé la RG (Gauss, 1827 ; Riemann, 1854 ; Christoffel, 1865 ; Levi-Civita & Ricci 1901-1917 ; et autres plus tard...)

La RG pour qui et pour quoi ?

plusieurs degrés d'approfondissement possibles :

- pour **GPSiens** : RG simplifiée
  $\Longrightarrow$ **calculs approximatifs** suffisants
  (champ gravitationnel faible $\simeq$ quasi-newtonien)
- pour **astrophysiciens (ou assimilés)** : RG appliquée
  $\Longrightarrow$ suffisant de savoir **manipuler** les objets mathématiques (**calculer**)
- pour **physicien théoricien** : RG complète, voire « un peu généralisée »
  $\Longrightarrow$ besoin de notions (voire plus) sur la **nature mathématique** des objets
  (*exemples d'intérêts* : comprendre certaines subtilités physico-mathématiques ; ne pas dire n'importe quoi sur les trous noirs ; essayer de trouver des théories alternatives ; inclure des fermions ; chercher à quantifier ; etc.)
- pour **mathématiciens** : géométrie pure
  $\Longrightarrow$ nécessité de connaître aussi un peu le **sens physique** des objets mathématiques... mais plus de **rigueur** et des « **hypothèses distinctes** »

La RG pour qui et pour quoi ?

plusieurs degrés d'approfondissement possibles :

- pour **GPSiens** : RG simplifiée
  $\Longrightarrow$ **calculs approximatifs** suffisants
  (champ gravitationnel faible $\simeq$ quasi-newtonien)
- pour **astrophysiciens (ou assimilés)** : RG appliquée
  $\Longrightarrow$ suffisant de savoir **manipuler** les objets mathématiques (**calculer**)
- pour **physicien théoricien** : RG complète, voire « un peu généralisée »
  $\Longrightarrow$ besoin de notions (voire plus) sur la **nature mathématique** des objets
  (*exemples d'intérêts* : comprendre certaines subtilités physico-mathématiques ; ne pas dire n'importe quoi sur les trous noirs ; essayer de trouver des théories alternatives ; inclure des fermions ; chercher à quantifier ; etc.)
- pour **mathématiciens** : géométrie pure
  $\Longrightarrow$ nécessité de connaître aussi un peu le **sens physique** des objets mathématiques... mais plus de **rigueur** et des « **hypothèses distinctes** »

La RG pour qui et pour quoi ?

plusieurs degrés d'approfondissement possibles :

- pour **GPSiens** : RG simplifiée
  $\Longrightarrow$ **calculs approximatifs** suffisants
  (champ gravitationnel faible $\simeq$ quasi-newtonien)
- pour **astrophysiciens (ou assimilés)** : RG appliquée
  $\Longrightarrow$ suffisant de savoir **manipuler** les objets mathématiques (**calculer**)
- pour **physicien théoricien** : RG complète, voire « un peu généralisée »
  $\Longrightarrow$ besoin de notions (voire plus) sur la **nature mathématique** des objets
  (*exemples d'intérêts* : comprendre certaines subtilités physico-mathématiques ; ne pas dire n'importe quoi sur les trous noirs ; essayer de trouver des théories alternatives ; inclure des fermions ; chercher à quantifier ; etc.)
- pour **mathématiciens** : géométrie pure
  $\Longrightarrow$ nécessité de connaître aussi un peu le **sens physique** des objets mathématiques... mais plus de **rigueur** et des « **hypothèses distinctes** »

La RG pour qui et pour quoi ?

plusieurs degrés d'approfondissement possibles :

- pour **GPSiens** : RG simplifiée
  $\Longrightarrow$ **calculs approximatifs** suffisants
  (champ gravitationnel faible $\simeq$ quasi-newtonien)
- pour **astrophysiciens (ou assimilés)** : RG appliquée
  $\Longrightarrow$ suffisant de savoir **manipuler** les objets mathématiques (**calculer**)
- pour **physicien théoricien** : RG complète, voire « un peu généralisée »
  $\Longrightarrow$ besoin de notions (voire plus) sur la **nature mathématique** des objets
  (*exemples d'intérêts* : comprendre certaines subtilités physico-mathématiques ; ne pas dire n'importe quoi sur les trous noirs ; essayer de trouver des théories alternatives ; inclure des fermions ; chercher à quantifier ; etc.)
- pour **mathématiciens** : géométrie pure
  $\Longrightarrow$ nécessité de connaître aussi un peu le **sens physique** des objets mathématiques... mais plus de **rigueur** et des « **hypothèses distinctes** »

La RG pour qui et pour quoi ?

plusieurs degrés d'approfondissement possibles :

- pour **GPSiens** : RG simplifiée
  $\Longrightarrow$ **calculs approximatifs** suffisants
  (champ gravitationnel faible $\simeq$ quasi-newtonien)
- pour **astrophysiciens (ou assimilés)** : RG appliquée
  $\Longrightarrow$ suffisant de savoir **manipuler** les objets mathématiques (**calculer**)
- pour **physicien théoricien** : RG complète, voire « un peu généralisée »
  $\Longrightarrow$ besoin de notions (voire plus) sur la **nature mathématique** des objets
  (*exemples d'intérêts* : comprendre certaines subtilités physico-mathématiques ; ne pas dire n'importe quoi sur les trous noirs ; essayer de trouver des théories alternatives ; inclure des fermions ; chercher à quantifier ; etc.)
- pour **mathématiciens** : géométrie pure
  $\Longrightarrow$ nécessité de connaître aussi un peu le **sens physique** des objets mathématiques... mais plus de **rigueur** et des « **hypothèses distinctes** »

La RG pour qui et pour quoi ?

plusieurs degrés d'approfondissement possibles :

- pour **GPSiens** : RG simplifiée
  $\Longrightarrow$ **calculs approximatifs** suffisants
  (champ gravitationnel faible $\simeq$ quasi-newtonien)
- pour **astrophysiciens (ou assimilés)** : RG appliquée
  $\Longrightarrow$ suffisant de savoir **manipuler** les objets mathématiques (**calculer**)
- pour **physicien théoricien** : RG complète, voire « un peu généralisée »
  $\Longrightarrow$ besoin de notions (voire plus) sur la **nature mathématique** des objets
  (*exemples d'intérêts* : comprendre certaines subtilités physico-mathématiques ; ne pas dire n'importe quoi sur les trous noirs ; essayer de trouver des théories alternatives ; inclure des fermions ; chercher à quantifier ; etc.)
- pour **mathématiciens** : géométrie pure
  $\Longrightarrow$ nécessité de connaître aussi un peu le **sens physique** des objets mathématiques... mais plus de **rigueur** et des « **hypothèses distinctes** »

$\Longrightarrow$ nombreux livres/cours de niveaux très différents,
avec formalismes pas toujours identiques

explication et **prédiction** de divers phénomènes :

- avancée du périhélie de Mercure (calcul d'Einstein, 1915)
- déviation de la lumière (prévue par von Soldner en 1801 ; en RG, Einstein 1915, puis observation Eddington 1919)
- décalage spectral gravitationnel (« effet Einstein » ; 1907-1915, puis 1954)
- ondes gravitationnelles avec vitesse finie (pressenties par Heaviside, Poincaré, mais aussi presque par Laplace, Gauss, Riemann, etc. ; en RG, 1916-1956, puis 1979-2015)
- lentilles gravitationnelles (1912 ou 1937, puis 1979)
- **trous noirs** (pressentis par Michell et par Laplace au xviii^{e} siècle ; en RG, $\simeq$ 1916-1960, puis 1965 ou 2015 ?)
- **entraînement des référentiels** (1918, puis $\simeq$ 2008)
- **expansion cosmologique** ($\simeq$ 1922-1929)
- etc.

tests « classiques » (Einstein, 1915)

explication et **prédiction** de divers phénomènes :

- avancée du périhélie de Mercure (calcul d'Einstein, 1915)
- déviation de la lumière (prévue par von Soldner en 1801 ; en RG, Einstein 1915, puis observation Eddington 1919)
- décalage spectral gravitationnel (« effet Einstein » ; 1907-1915, puis 1954)
- ondes gravitationnelles avec vitesse finie (pressenties par Heaviside, Poincaré, mais aussi presque par Laplace, Gauss, Riemann, etc. ; en RG, 1916-1956, puis 1979-2015)
- lentilles gravitationnelles (1912 ou 1937, puis 1979)
- **trous noirs** (pressentis par Michell et par Laplace au xviii[e] siècle ; en RG, $\simeq$ 1916-1960, puis 1965 ou 2015 ?)
- **entraînement des référentiels** (1918, puis $\simeq$ 2008)
- **expansion cosmologique** ($\simeq$ 1922-1929)
- etc.

tests « classiques » (Einstein, 1915)

explication et **prédiction** de divers phénomènes :

- avancée du périhélie de Mercure (calcul d'Einstein, 1915)
- déviation de la lumière (prévue par von Soldner en 1801 ; en RG, Einstein 1915, puis observation Eddington 1919)
- décalage spectral gravitationnel (« effet Einstein » ; 1907-1915, puis 1954)
- ondes gravitationnelles avec vitesse finie (pressenties par Heaviside, Poincaré, mais aussi presque par Laplace, Gauss, Riemann, etc. ; en RG, 1916-1956, puis 1979-2015)
- lentilles gravitationnelles (1912 ou 1937, puis 1979)
- **trous noirs** (pressentis par Michell et par Laplace au XVIII^e siècle ; en RG, $\simeq$ 1916-1960, puis 1965 ou 2015 ?)
- **entraînement des référentiels** (1918, puis $\simeq$ 2008)
- **expansion cosmologique** ($\simeq$ 1922-1929)
- etc.

tests « classiques » (Einstein, 1915)

explication et **prédiction** de divers phénomènes :

- avancée du périhélie de Mercure (calcul d'Einstein, 1915)
- déviation de la lumière (prévue par von Soldner en 1801 ; en RG, Einstein 1915, puis observation Eddington 1919)
- décalage spectral gravitationnel (« effet Einstein » ; 1907-1915, puis 1954)
- ondes gravitationnelles avec vitesse finie (pressenties par Heaviside, Poincaré, mais aussi presque par Laplace, Gauss, Riemann, etc. ; en RG, 1916-1956, puis 1979-2015)
- lentilles gravitationnelles (1912 ou 1937, puis 1979)
- **trous noirs** (pressentis par Michell et par Laplace au XVIII^{e} siècle ; en RG, $\simeq$ 1916-1960, puis 1965 ou 2015 ?)
- **entraînement des référentiels** (1918, puis $\simeq$ 2008)
- **expansion cosmologique** ($\simeq$ 1922-1929)
- etc.

tests « classiques » (Einstein, 1915) ; prédictions faites par Einstein

explication et **prédiction** de divers phénomènes :

- avancée du périhélie de Mercure (calcul d'Einstein, 1915)
- déviation de la lumière (prévue par von Soldner en 1801 ; en RG, Einstein 1915, puis observation Eddington 1919)
- décalage spectral gravitationnel (« effet Einstein » ; 1907-1915, puis 1954)
- ondes gravitationnelles avec vitesse finie (pressenties par Heaviside, Poincaré, mais aussi presque par Laplace, Gauss, Riemann, etc. ; en RG, 1916-1956, puis 1979-2015)
- lentilles gravitationnelles (1912 ou 1937, puis 1979)
- **trous noirs** (pressentis par Michell et par Laplace au XVIII[e] siècle ; en RG, $\simeq$ 1916-1960, puis 1965 ou 2015 ?)
- **entraînement des référentiels** (1918, puis $\simeq$ 2008)
- **expansion cosmologique** ($\simeq$ 1922-1929)
- etc.

tests « classiques » (Einstein, 1915) ; prédictions faites par Einstein

explication et **prédiction** de divers phénomènes :

- avancée du périhélie de Mercure (calcul d'Einstein, 1915)
- déviation de la lumière (prévue par von Soldner en 1801 ; en RG, Einstein 1915, puis observation Eddington 1919)
- décalage spectral gravitationnel (« effet Einstein » ; 1907-1915, puis 1954)
- ondes gravitationnelles avec vitesse finie (pressenties par Heaviside, Poincaré, mais aussi presque par Laplace, Gauss, Riemann, etc. ; en RG, 1916-1956, puis 1979-2015)
- lentilles gravitationnelles (1912 ou 1937, puis 1979)
- **trous noirs** (pressentis par Michell et par Laplace au xviii[e] siècle ; en RG, $\simeq$ 1916-1960, puis 1965 ou 2015 ?)
- **entraînement des référentiels** (1918, puis $\simeq$ 2008)
- **expansion cosmologique** ($\simeq$ 1922-1929)
- etc.

tests « classiques » (Einstein, 1915) ; prédictions faites par Einstein ; **prédictions faites par d'autres**

explication et **prédiction** de divers phénomènes :

- avancée du périhélie de Mercure (calcul d'Einstein, 1915)
- déviation de la lumière (prévue par von Soldner en 1801 ; en RG, Einstein 1915, puis observation Eddington 1919)
- décalage spectral gravitationnel (« effet Einstein » ; 1907-1915, puis 1954)
- ondes gravitationnelles avec vitesse finie (pressenties par Heaviside, Poincaré, mais aussi presque par Laplace, Gauss, Riemann, etc. ; en RG, 1916-1956, puis 1979-2015)
- lentilles gravitationnelles (1912 ou 1937, puis 1979)
- **trous noirs** (pressentis par Michell et par Laplace au xviii[e] siècle ; en RG, $\simeq$ 1916-1960, puis 1965 ou 2015 ?)
- **entraînement des référentiels** (1918, puis $\simeq$ 2008)
- **expansion cosmologique** ($\simeq$ 1922-1929)
- etc.

tests « classiques » (Einstein, 1915) ; prédictions faites par Einstein ; **prédictions faites par d'autres**

explication et **prédiction** de divers phénomènes :

- avancée du périhélie de Mercure (calcul d'Einstein, 1915)
- déviation de la lumière (prévue par von Soldner en 1801 ; en RG, Einstein 1915, puis observation Eddington 1919)
- décalage spectral gravitationnel (« effet Einstein » ; 1907-1915, puis 1954)
- ondes gravitationnelles avec vitesse finie (pressenties par Heaviside, Poincaré, mais aussi presque par Laplace, Gauss, Riemann, etc. ; en RG, 1916-1956, puis 1979-2015)
- lentilles gravitationnelles (1912 ou 1937, puis 1979)
- **trous noirs** (pressentis par Michell et par Laplace au XVIIIe siècle ; en RG, $\simeq$ 1916-1960, puis 1965 ou 2015 ?)
- **entraînement des référentiels** (1918, puis $\simeq$ 2008)
- **expansion cosmologique** ($\simeq$ 1922-1929)
- etc.

tests « classiques » (Einstein, 1915) ; prédictions faites par Einstein ; **prédictions faites par d'autres**

explication et **prédiction** de divers phénomènes :

- avancée du périhélie de Mercure (calcul d'Einstein, 1915)
- déviation de la lumière (prévue par von Soldner en 1801 ; en RG, Einstein 1915, puis observation Eddington 1919)
- décalage spectral gravitationnel (« effet Einstein » ; 1907-1915, puis 1954)
- ondes gravitationnelles avec vitesse finie (pressenties par Heaviside, Poincaré, mais aussi presque par Laplace, Gauss, Riemann, etc. ; en RG, 1916-1956, puis 1979-2015)
- lentilles gravitationnelles (1912 ou 1937, puis 1979)
- **trous noirs** (pressentis par Michell et par Laplace au xviii[e] siècle ; en RG, $\simeq$ 1916-1960, puis 1965 ou 2015 ?)
- **entraînement des référentiels** (1918, puis $\simeq$ 2008)
- **expansion cosmologique** ($\simeq$ 1922-1929)
- etc.

tests « classiques » (Einstein, 1915) ; prédictions faites par Einstein ; **prédictions faites par d'autres**

Objectifs de cette mini-introduction :

- proposer une esquisse de la formulation **mathématique** de certains aspects physiques élémentaires mentionnés ci-dessus (cf. certains cours ultérieurs)
- faire des liens avec la **relativité restreinte** et la **gravitation newtonienne**
- donner des pistes d'approfondissement

Objectifs de cette mini-introduction :

- proposer une esquisse de la formulation **mathématique** de certains aspects physiques élémentaires mentionnés ci-dessus (cf. certains cours ultérieurs)
- faire des liens avec la **relativité restreinte** et la **gravitation newtonienne**
- donner des pistes d'approfondissement

Objectifs de cette mini-introduction :

- proposer une esquisse de la formulation **mathématique** de certains aspects physiques élémentaires mentionnés ci-dessus (cf. certains cours ultérieurs)
- faire des liens avec la **relativité restreinte** et la **gravitation newtonienne**
- donner des pistes d'approfondissement

Objectifs de cette mini-introduction :

- proposer une esquisse de la formulation **mathématique** de certains aspects physiques élémentaires mentionnés ci-dessus (cf. certains cours ultérieurs)
- faire des liens avec la **relativité restreinte** et la **gravitation newtonienne**
- donner des pistes d'approfondissement

Objectifs de cette mini-introduction :

- proposer une esquisse de la formulation **mathématique** de certains aspects physiques élémentaires mentionnés ci-dessus (cf. certains cours ultérieurs)
- faire des liens avec la **relativité restreinte** et la **gravitation newtonienne**
- donner des pistes d'approfondissement

Avertissements :

- pas vraiment (voire vraiment pas) un « **cours** »
- tentative d'avoir un **fil conducteur logique** sans trop de « sauts quantiques », mais...
- nombreux sujets **pas abordés** (tant physiques que mathématiques)
- en particulier, beaucoup de **points plus subtils** qu'ils ne peuvent le sembler

Objectifs de cette mini-introduction :

- proposer une esquisse de la formulation **mathématique** de certains aspects physiques élémentaires mentionnés ci-dessus (cf. certains cours ultérieurs)
- faire des liens avec la **relativité restreinte** et la **gravitation newtonienne**
- donner des pistes d'approfondissement

Avertissements :

- pas vraiment (voire vraiment pas) un « **cours** »
- tentative d'avoir un **fil conducteur logique** sans trop de « sauts quantiques », mais...
- nombreux sujets **pas abordés** (tant physiques que mathématiques)
- en particulier, beaucoup de **points plus subtils** qu'ils ne peuvent le sembler

Objectifs de cette mini-introduction :

- proposer une esquisse de la formulation **mathématique** de certains aspects physiques élémentaires mentionnés ci-dessus (cf. certains cours ultérieurs)
- faire des liens avec la **relativité restreinte** et la **gravitation newtonienne**
- donner des pistes d'approfondissement

Avertissements :

- pas vraiment (voire vraiment pas) un « **cours** »
- tentative d'avoir un **fil conducteur logique** sans trop de « sauts quantiques », mais...
- nombreux sujets **pas abordés** (tant physiques que mathématiques)
- en particulier, beaucoup de **points plus subtils** qu'ils ne peuvent le sembler

Objectifs de cette mini-introduction :

- proposer une esquisse de la formulation **mathématique** de certains aspects physiques élémentaires mentionnés ci-dessus (cf. certains cours ultérieurs)
- faire des liens avec la **relativité restreinte** et la **gravitation newtonienne**
- donner des pistes d'approfondissement

Avertissements :

- pas vraiment (voire vraiment pas) un « **cours** »
- tentative d'avoir un **fil conducteur logique** sans trop de « sauts quantiques », mais...
- nombreux sujets **pas abordés** (tant physiques que mathématiques)
- en particulier, beaucoup de **points plus subtils** qu'ils ne peuvent le sembler

Plan

I

Chute libre et principe d'équivalence

Universalité de la chute libre

Référentiel terrestre :

$$m\,\vec{a} = m\,\vec{g} \implies \boxed{\vec{a} = \vec{g}}$$

- **Newton** : pourquoi $m_I = m_G$? est-ce toujours vrai ?
  $\implies$ principe d'équivalence faible : $m_I = m_G$
- **Einstein** : principe(s) d'équivalence (fort ou d'Einstein)
- **2022, MICROSCOPE** :

$m_I = m_G$ vérifiée avec précision relative de 2.7×10^{-15}

Universalité de la chute libre

Référentiel terrestre :

$$m\,\vec{a} = m\,\vec{g} \implies \boxed{\vec{a} = \vec{g}}$$

mais *a priori*

$$m_I\,\vec{a} = m_G\,\vec{g} \implies \vec{a} = \frac{m_G}{m_I}\,\vec{g}$$

m_I : masse inerte (inertie) ; m_G : masse grave (charge gravitationnelle)

- **Newton** : pourquoi $m_I = m_G$? est-ce toujours vrai ?
  $\implies$ principe d'équivalence faible : $m_I = m_G$
- **Einstein** : principe(s) d'équivalence (fort ou d'Einstein)
- **2022, MICROSCOPE** :

  $m_I = m_G$ vérifiée avec précision relative de 2.7×10^{-15}

Universalité de la chute libre

Référentiel terrestre :

$$m\,\vec{a} = m\,\vec{g} \implies \boxed{\vec{a} = \vec{g}}$$

mais *a priori*

$$m_I\,\vec{a} = m_G\,\vec{g} \implies \vec{a} = \frac{m_G}{m_I}\,\vec{g}$$

m_I : masse inerte (inertie) ; m_G : masse grave (charge gravitationnelle)

- **Newton** : pourquoi $m_I = m_G$? est-ce toujours vrai ?
  $\implies$ principe d'équivalence faible : $m_I = m_G$
- **Einstein** : principe(s) d'équivalence (fort ou d'Einstein)
- **2022, MICROSCOPE** :

  $m_I = m_G$ vérifiée avec précision relative de 2.7×10^{-15}

Universalité de la chute libre

Référentiel terrestre :

$$m\,\vec{a} = m\,\vec{g} \implies \boxed{\vec{a} = \vec{g}}$$

mais *a priori*

$$m_I\,\vec{a} = m_G\,\vec{g} \implies \vec{a} = \frac{m_G}{m_I}\,\vec{g}$$

m_I : masse inerte (inertie) ; m_G : masse grave (charge gravitationnelle)

- **Newton** : pourquoi $m_I = m_G$? est-ce toujours vrai ?
  $\implies$ principe d'équivalence faible : $m_I = m_G$
- **Einstein** : principe(s) d'équivalence (fort ou d'Einstein)
- **2022, MICROSCOPE** :

  $m_I = m_G$ vérifiée avec précision relative de 2.7×10^{-15}

Universalité de la chute libre

Référentiel terrestre :

$$m\,\vec{a} = m\,\vec{g} \implies \boxed{\vec{a} = \vec{g}}$$

mais *a priori*

$$m_I\,\vec{a} = m_G\,\vec{g} \implies \vec{a} = \frac{m_G}{m_I}\,\vec{g}$$

m_I : masse inerte (inertie) ; m_G : masse grave (charge gravitationnelle)

- **Newton** : pourquoi $m_I = m_G$? est-ce toujours vrai ?
  $\implies$ principe d'équivalence faible : $m_I = m_G$
- **Einstein** : principe(s) d'équivalence (fort ou d'Einstein)
- **2022, MICROSCOPE** :

  $m_I = m_G$ vérifiée avec précision relative de 2.7×10^{-15}

Expérience de pensée d'Einstein : l'ascenseur en chute libre

Observateur en chute libre (dans un champ gravitationnel et sans rotation)

$\Longrightarrow$ observateur : « tout objet lâché a un mouvement inertiel » (apesanteur)

$\Longrightarrow$ se croit **inertiel** (si ne connaît pas l'existence du champ gravitationnel)

remarques/conclusions :

- gravitation détectable par aucune expérience **mécanique locale**

  exemple : en chute libre, un accéléromètre ne mesure aucune accélération

- vrai **localement** car champ gravitationnel **jamais homogène**

  exemple : attraction terrestre $\Longrightarrow$ convergence des trajectoires radiales

Expérience de pensée d'Einstein : l'ascenseur en chute libre

Observateur en chute libre (dans un champ gravitationnel et sans rotation)

étude, dans le référentiel de l'observateur, du mouvement d'un objet « lâché » :

$\Longrightarrow$ observateur : « tout objet lâché a un mouvement inertiel » (apesanteur)

$\Longrightarrow$ se croit **inertiel** (si ne connaît pas l'existence du champ gravitationnel)

remarques/conclusions :

- gravitation détectable par aucune expérience **mécanique locale**

  exemple : en chute libre, un accéléromètre ne mesure aucune accélération

- vrai **localement** car champ gravitationnel **jamais homogène**

  exemple : attraction terrestre $\Longrightarrow$ convergence des trajectoires radiales

Expérience de pensée d'Einstein : l'ascenseur en chute libre

Observateur en chute libre (dans un champ gravitationnel et sans rotation)

étude, dans le référentiel de l'observateur, du mouvement d'un objet « lâché » :

$$m_I \, \vec{a} = \vec{P} + \vec{F}_{ae}$$

$\Longrightarrow$ observateur : « tout objet lâché a un mouvement inertiel » (apesanteur)

$\Longrightarrow$ se croit **inertiel** (si ne connaît pas l'existence du champ gravitationnel)

remarques/conclusions :

- gravitation détectable par aucune expérience **mécanique locale**

  exemple : en chute libre, un accéléromètre ne mesure aucune accélération

- vrai **localement** car champ gravitationnel **jamais homogène**

  exemple : attraction terrestre $\Longrightarrow$ convergence des trajectoires radiales

Expérience de pensée d'Einstein : l'ascenseur en chute libre

Observateur en chute libre (dans un champ gravitationnel et sans rotation)

étude, dans le référentiel de l'observateur, du mouvement d'un objet « lâché » :

$$m_I\,\vec{a} \,=\, \vec{P} + \vec{F}_{ae} \,=\, m_G\,\vec{g} - m_I\,\vec{a}_e$$

$\Longrightarrow$ observateur : « tout objet lâché a un mouvement inertiel » (apesanteur)

$\Longrightarrow$ se croit **inertiel** (si ne connaît pas l'existence du champ gravitationnel)

remarques/conclusions :

- gravitation détectable par aucune expérience **mécanique locale**

  exemple : en chute libre, un accéléromètre ne mesure aucune accélération

- vrai **localement** car champ gravitationnel **jamais homogène**

  exemple : attraction terrestre $\Longrightarrow$ convergence des trajectoires radiales

Expérience de pensée d'Einstein : l'ascenseur en chute libre

Observateur en chute libre (dans un champ gravitationnel et sans rotation)

étude, dans le référentiel de l'observateur, du mouvement d'un objet « lâché » :

$$m_I \, \vec{a} = \vec{P} + \vec{F}_{ae} = m_G \, \vec{g} - m_I \, \vec{a}_e = (m_G - m_I) \, \vec{g} = \vec{0}$$

car $\vec{a}_e = \vec{g}$ puisque chute libre de l'observateur

$\Longrightarrow$ observateur : « tout objet lâché a un mouvement inertiel » (apesanteur)

$\Longrightarrow$ se croit **inertiel** (si ne connaît pas l'existence du champ gravitationnel)

remarques/conclusions :

- gravitation détectable par aucune expérience **mécanique** **locale**

  exemple : en chute libre, un accéléromètre ne mesure aucune accélération
- vrai **localement** car champ gravitationnel **jamais homogène**

  exemple : attraction terrestre $\Longrightarrow$ convergence des trajectoires radiales

Expérience de pensée d'Einstein : l'ascenseur en chute libre

Observateur en chute libre (dans un champ gravitationnel et sans rotation)

étude, dans le référentiel de l'observateur, du mouvement d'un objet « lâché » :

$$m_I\,\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}_{ae} = m_G\,\vec{g} - m_I\,\vec{a}_e = (m_G - m_I)\,\vec{g} = \vec{0}$$

car $\vec{a}_e = \vec{g}$ puisque chute libre de l'observateur

$\Longrightarrow$ observateur : « tout objet lâché a un mouvement inertiel » (apesanteur)

$\Longrightarrow$ se croit **inertiel** (si ne connaît pas l'existence du champ gravitationnel)

remarques/conclusions :

- gravitation détectable par aucune expérience **mécanique locale**

  exemple : en chute libre, un accéléromètre ne mesure aucune accélération
- vrai **localement** car champ gravitationnel **jamais homogène**

  exemple : attraction terrestre $\Longrightarrow$ convergence des trajectoires radiales

Expérience de pensée d'Einstein : l'ascenseur en chute libre

Observateur en chute libre (dans un champ gravitationnel et sans rotation)

étude, dans le référentiel de l'observateur, du mouvement d'un objet « lâché » :

$$m_I\,\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}_{ae} = m_G\,\vec{g} - m_I\,\vec{a}_e = (m_G - m_I)\,\vec{g} = \vec{0}$$

car $\vec{a}_e = \vec{g}$ puisque chute libre de l'observateur

$\Longrightarrow$ observateur : « tout objet lâché a un mouvement inertiel » (apesanteur)

$\Longrightarrow$ se croit **inertiel** (si ne connaît pas l'existence du champ gravitationnel)

remarques/conclusions :

- gravitation détectable par aucune expérience **mécanique locale**

  exemple : en chute libre, un accéléromètre ne mesure aucune accélération

- vrai **localement** car champ gravitationnel **jamais homogène**

  exemple : attraction terrestre $\Longrightarrow$ convergence des trajectoires radiales

Expérience de pensée d'Einstein : l'ascenseur en chute libre

Observateur en chute libre (dans un champ gravitationnel et sans rotation)

étude, dans le référentiel de l'observateur, du mouvement d'un objet « lâché » :

$$m_I \, \vec{a} = \vec{P} + \vec{F}_{ae} = m_G \, \vec{g} - m_I \, \vec{a}_e = (m_G - m_I) \, \vec{g} = \vec{0}$$

car $\vec{a}_e = \vec{g}$ puisque chute libre de l'observateur

$\Longrightarrow$ observateur : « tout objet lâché a un mouvement inertiel » (apesanteur)

$\Longrightarrow$ se croit **inertiel** (si ne connaît pas l'existence du champ gravitationnel)

remarques/conclusions :

- gravitation détectable par aucune expérience **mécanique locale**

  exemple : en chute libre, un accéléromètre ne mesure aucune accélération
- vrai **localement** car champ gravitationnel **jamais homogène**

  exemple : attraction terrestre $\Longrightarrow$ convergence des trajectoires radiales

Expérience de pensée d'Einstein : l'ascenseur en chute libre

Observateur en chute libre (dans un champ gravitationnel et sans rotation)

étude, dans le référentiel de l'observateur, du mouvement d'un objet « lâché » :

$$m_I\,\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}_{ae} = m_G\,\vec{g} - m_I\,\vec{a}_e = (m_G - m_I)\,\vec{g} = \vec{0}$$

car $\vec{a}_e = \vec{g}$ puisque chute libre de l'observateur

$\Longrightarrow$ observateur : « tout objet lâché a un mouvement inertiel » (apesanteur)

$\Longrightarrow$ se croit **inertiel** (si ne connaît pas l'existence du champ gravitationnel)

remarques/conclusions :

- gravitation détectable par aucune expérience **mécanique** **locale**

  exemple : en chute libre, un accéléromètre ne mesure aucune accélération
- vrai **localement** car champ gravitationnel **jamais homogène**

  exemple : attraction terrestre $\Longrightarrow$ convergence des trajectoires radiales

Expérience de pensée d'Einstein : l'ascenseur en chute libre

Observateur en chute libre (dans un champ gravitationnel et sans rotation)

étude, dans le référentiel de l'observateur, du mouvement d'un objet « lâché » :

$$m_I\,\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}_{ae} = m_G\,\vec{g} - m_I\,\vec{a}_e = (m_G - m_I)\,\vec{g} = \vec{0}$$

car $\vec{a}_e = \vec{g}$ puisque chute libre de l'observateur

$\Longrightarrow$ observateur : « tout objet lâché a un mouvement inertiel » (apesanteur)

$\Longrightarrow$ se croit **inertiel** (si ne connaît pas l'existence du champ gravitationnel)

remarques/conclusions :

- gravitation détectable par aucune expérience **mécanique locale**

  exemple : en chute libre, un accéléromètre ne mesure aucune accélération
- vrai **localement** car champ gravitationnel **jamais homogène**

  exemple : attraction terrestre $\Longrightarrow$ convergence des trajectoires radiales

Expérience de pensée d'Einstein : l'ascenseur en chute libre

Observateur en chute libre (dans un champ gravitationnel et sans rotation)

étude, dans le référentiel de l'observateur, du mouvement d'un objet « lâché » :

$$m_I \, \vec{a} = \vec{P} + \vec{F}_{ae} = m_G \, \vec{g} - m_I \, \vec{a}_e = (m_G - m_I) \, \vec{g} = \vec{0}$$

car $\vec{a}_e = \vec{g}$ puisque chute libre de l'observateur

$\Longrightarrow$ observateur : « tout objet lâché a un mouvement inertiel » (apesanteur)

$\Longrightarrow$ se croit **inertiel** (si ne connaît pas l'existence du champ gravitationnel)

remarques/conclusions :

- gravitation détectable par aucune expérience **mécanique** **locale**
  exemple : en chute libre, un accéléromètre ne mesure aucune accélération
- vrai **localement** car champ gravitationnel **jamais homogène**
  exemple : attraction terrestre $\Longrightarrow$ convergence des trajectoires radiales

Expérience de pensée d'Einstein : l'ascenseur en chute libre

Observateur en chute libre (dans un champ gravitationnel et sans rotation)

étude, dans le référentiel de l'observateur, du mouvement d'un objet « lâché » :

$$m_I\,\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}_{ae} = m_G\,\vec{g} - m_I\,\vec{a}_e = (m_G - m_I)\,\vec{g} = \vec{0}$$

car $\vec{a}_e = \vec{g}$ puisque chute libre de l'observateur

$\Longrightarrow$ observateur : « tout objet lâché a un mouvement inertiel » (apesanteur)

$\Longrightarrow$ se croit **inertiel** (si ne connaît pas l'existence du champ gravitationnel)

remarques/conclusions :

- gravitation détectable par aucune expérience **mécanique locale**

  exemple : en chute libre, un accéléromètre ne mesure aucune accélération
- vrai **localement** car champ gravitationnel **jamais homogène**

  exemple : attraction terrestre $\Longrightarrow$ convergence des trajectoires radiales

Expérience de pensée d'Einstein : l'ascenseur accéléré

Observateur au repos dans un ascenseur **accéléré** (loin de tout et sans rotation)

$\Longrightarrow$ observateur : « tout objet libre a la même accélération »

$\Longrightarrow$ se croit dans un **champ de pesanteur** (si ne connaît pas l'existence d'une accélération de l'ascenseur)

remarque/conclusion :

- vrai **localement** car champ gravitationnel **jamais homogène**

Expérience de pensée d'Einstein : l'ascenseur accéléré

Observateur au repos dans un ascenseur **accéléré** (loin de tout et sans rotation)

étude, dans le référentiel de l'observateur, du mouvement d'un objet « lâché » :

$\Longrightarrow$ observateur : « tout objet libre a la même accélération »

$\Longrightarrow$ se croit dans un **champ de pesanteur** (si ne connaît pas l'existence d'une accélération de l'ascenseur)

remarque/conclusion :

- vrai **localement** car champ gravitationnel **jamais homogène**

Expérience de pensée d'Einstein : l'ascenseur accéléré

Observateur au repos dans un ascenseur **accéléré** (loin de tout et sans rotation)

étude, dans le référentiel de l'observateur, du mouvement d'un objet « lâché » :

$$m_I \, \vec{a} = \vec{F}_{ae}$$

$\Longrightarrow$ observateur : « tout objet libre a la même accélération »

$\Longrightarrow$ se croit dans un **champ de pesanteur** (si ne connaît pas l'existence d'une accélération de l'ascenseur)

remarque/conclusion :

- vrai **localement** car champ gravitationnel **jamais homogène**

Expérience de pensée d'Einstein : l'ascenseur accéléré

Observateur au repos dans un ascenseur **accéléré** (loin de tout et sans rotation)

étude, dans le référentiel de l'observateur, du mouvement d'un objet « lâché » :

$$m_I \, \vec{a} = \vec{F}_{ae} = -m_I \, \vec{a}_e$$

$\Longrightarrow$ observateur : « tout objet libre a la même accélération »

$\Longrightarrow$ se croit dans un **champ de pesanteur** (si ne connaît pas l'existence d'une accélération de l'ascenseur)

remarque/conclusion :

- vrai **localement** car champ gravitationnel **jamais homogène**

Expérience de pensée d'Einstein : l'ascenseur accéléré

Observateur au repos dans un ascenseur **accéléré** (loin de tout et sans rotation)

étude, dans le référentiel de l'observateur, du mouvement d'un objet « lâché » :

$$m_I \, \vec{a} = \vec{F}_{ae} = - m_I \, \vec{a}_e \implies \vec{a} = -\vec{a}_e$$

$\implies$ observateur : « tout objet libre a la même accélération »

$\implies$ se croit dans un **champ de pesanteur** (si ne connaît pas l'existence d'une accélération de l'ascenseur)

remarque/conclusion :

- vrai **localement** car champ gravitationnel **jamais homogène**

Expérience de pensée d'Einstein : l'ascenseur accéléré

Observateur au repos dans un ascenseur **accéléré** (loin de tout et sans rotation)

étude, dans le référentiel de l'observateur, du mouvement d'un objet « lâché » :

$$m_I \, \vec{a} = \vec{F}_{ae} = -\, m_I \, \vec{a}_e \implies \vec{a} = -\vec{a}_e$$

$\implies$ observateur : « tout objet libre a la même accélération »

$\implies$ se croit dans un **champ de pesanteur** (si ne connaît pas l'existence d'une accélération de l'ascenseur)

remarque/conclusion :

- vrai **localement** car champ gravitationnel **jamais homogène**

Expérience de pensée d'Einstein : l'ascenseur accéléré

Observateur au repos dans un ascenseur **accéléré** (loin de tout et sans rotation)

étude, dans le référentiel de l'observateur, du mouvement d'un objet « lâché » :

$$m_I\,\vec{a} = \vec{F}_{ae} = -\,m_I\,\vec{a}_e \implies \vec{a} = -\vec{a}_e$$

$\implies$ observateur : « tout objet libre a la même accélération »

$\implies$ se croit dans un **champ de pesanteur** (si ne connaît pas l'existence d'une accélération de l'ascenseur)

remarque/conclusion :

- vrai **localement** car champ gravitationnel **jamais homogène**

Expérience de pensée d'Einstein : l'ascenseur accéléré

Observateur au repos dans un ascenseur **accéléré** (loin de tout et sans rotation)

étude, dans le référentiel de l'observateur, du mouvement d'un objet « lâché » :

$$m_I \, \vec{a} = \vec{F}_{ae} = -m_I \, \vec{a}_e \implies \vec{a} = -\vec{a}_e$$

$\implies$ observateur : « tout objet libre a la même accélération »

$\implies$ se croit dans un **champ de pesanteur** (si ne connaît pas l'existence d'une accélération de l'ascenseur)

remarque/conclusion :

- vrai **localement** car champ gravitationnel **jamais homogène**

Expérience de pensée d'Einstein : l'ascenseur accéléré

Observateur au repos dans un ascenseur **accéléré** (loin de tout et sans rotation)

étude, dans le référentiel de l'observateur, du mouvement d'un objet « lâché » :

$$m_I\,\vec{a} = \vec{F}_{ae} = -\,m_I\,\vec{a}_e \implies \vec{a} = -\vec{a}_e$$

$\implies$ observateur : « tout objet libre a la même accélération »

$\implies$ se croit dans un **champ de pesanteur** (si ne connaît pas l'existence d'une accélération de l'ascenseur)

remarque/conclusion :

- vrai **localement** car champ gravitationnel **jamais homogène**

Analyse d'Einstein

- ce qui précède découle de la surprenante égalité $m_I = m_G$, mais on peut **prendre le problème à l'envers**
- **constatation 1** :
  tout observateur en **chute libre** décrit le monde comme s'il était **inertiel**

  $\Longrightarrow$ **postulat 1** : un référentiel en chute libre $\equiv$ inertiel
- **constatation 2** :
  aucune expérience **mécanique locale** ne permet de distinguer **accélération du référentiel** et existence d'un **champ de gravitation** (poids/pesanteur)

  $\Longrightarrow$ **postulat 2** : vrai pour toute la physique, pas uniquement la mécanique (principe d'équivalence)

Analyse d'Einstein

- ce qui précède découle de la surprenante égalité $m_I = m_G$,
  mais on peut **prendre le problème à l'envers**
- **constatation 1** :
  tout observateur en **chute libre** décrit le monde comme s'il était **inertiel**

  $\Longrightarrow$ **postulat 1** : un référentiel en chute libre $\equiv$ inertiel
- **constatation 2** :
  aucune expérience **mécanique locale** ne permet de distinguer **accélération du référentiel** et existence d'un **champ de gravitation** (poids/pesanteur)

  $\Longrightarrow$ **postulat 2** : vrai pour toute la physique, pas uniquement la mécanique (principe d'équivalence)

Analyse d'Einstein

- ce qui précède découle de la surprenante égalité $m_I = m_G$, mais on peut **prendre le problème à l'envers**
- **constatation 1** :
  tout observateur en **chute libre** décrit le monde comme s'il était **inertiel**

  $\Longrightarrow$ **postulat 1** : un référentiel en chute libre $\equiv$ inertiel
- **constatation 2** :
  aucune expérience **mécanique locale** ne permet de distinguer **accélération du référentiel** et existence d'un **champ de gravitation** (poids/pesanteur)

  $\Longrightarrow$ **postulat 2** : vrai pour toute la physique, pas uniquement la mécanique (principe d'équivalence)

Analyse d'Einstein

- ce qui précède découle de la surprenante égalité $m_I = m_G$, mais on peut **prendre le problème à l'envers**
- **constatation 1** :
  tout observateur en **chute libre** décrit le monde comme s'il était **inertiel**

  $\Longrightarrow$ **postulat 1** : un référentiel en chute libre $\equiv$ inertiel
- **constatation 2** :
  aucune expérience **mécanique locale** ne permet de distinguer **accélération du référentiel** et existence d'un **champ de gravitation** (poids/pesanteur)

  $\Longrightarrow$ **postulat 2** : vrai pour toute la physique, pas uniquement la mécanique (principe d'équivalence)

Analyse d'Einstein

- ce qui précède découle de la surprenante égalité $m_I = m_G$,
  mais on peut **prendre le problème à l'envers**
- **constatation 1** :
  tout observateur en **chute libre** décrit le monde comme s'il était **inertiel**

  $\Longrightarrow$ **postulat 1** : un référentiel en chute libre $\equiv$ inertiel
- **constatation 2** :
  aucune expérience **mécanique locale** ne permet de distinguer **accélération du référentiel** et existence d'un **champ de gravitation** (poids/pesanteur)

  $\Longrightarrow$ **postulat 2** : vrai pour toute la physique, pas uniquement la mécanique (principe d'équivalence)

Conclusions d'Einstein (principe d'équivalence)

« dans tout référentiel **local** *en chute libre, les lois de la physique sont celles en l'absence de gravitation »*

$\implies m_I = m_G$ car le **poids** est une **pseudo-force/force d'inertie** ($= \vec{0}$ dans les référentiels inertiels)

$\implies$ dans un champ gravitationnel, le mouvement **global** d'observateurs inertiels (*exemple* : astronautes en apesanteur) peut être associé à une trajectoire de forme complexe car l'existence d'un **champ de gravitation traduit la courbure de l'espace**

Autre conclusion : la géométrie (courbure) de l'espace-temps ($=$ le champ gravitationnel) est déterminée par son contenu énergético-impulsionnel

Conclusions d'Einstein (principe d'équivalence)

« dans tout référentiel **local** *en chute libre, les lois de la physique sont celles en l'absence de gravitation »*

$\Longrightarrow$ $m_I = m_G$ car le **poids** est une **pseudo-force/force d'inertie** ($= \vec{0}$ dans les référentiels inertiels)

$\Longrightarrow$ dans un champ gravitationnel, le mouvement **global** d'observateurs inertiels (*exemple* : astronautes en apesanteur) peut être associé à une trajectoire de forme complexe car l'existence d'un **champ de gravitation traduit la courbure de l'espace**

Autre conclusion : la géométrie (courbure) de l'espace-temps ($=$ le champ gravitationnel) est déterminée par son contenu énergético-impulsionnel

Conclusions d'Einstein (principe d'équivalence)

« dans tout référentiel **local** *en chute libre, les lois de la physique sont celles en l'absence de gravitation »*

$\Longrightarrow$ $m_I = m_G$ car le **poids** est une **pseudo-force/force d'inertie** ($= \vec{0}$ dans les référentiels inertiels)

$\Longrightarrow$ dans un champ gravitationnel, le mouvement **global** d'observateurs inertiels (*exemple* : astronautes en apesanteur) peut être associé à une trajectoire de forme complexe car l'existence d'un **champ de gravitation traduit la courbure de l'espace**

Autre conclusion : la géométrie (courbure) de l'espace-temps (= le champ gravitationnel) est déterminée par son contenu énergético-impulsionnel

Conclusions d'Einstein (principe d'équivalence)

« dans tout référentiel **local** *en chute libre, les lois de la physique sont celles en l'absence de gravitation »*

$\Longrightarrow \ m_I = m_G$ car le **poids** est une **pseudo-force/force d'inertie** ($= \vec{0}$ dans les référentiels inertiels)

$\Longrightarrow$ dans un champ gravitationnel, le mouvement **global** d'observateurs inertiels (*exemple* : astronautes en apesanteur) peut être associé à une trajectoire de forme complexe car l'existence d'un **champ de gravitation traduit la courbure de l'espace-temps** (cf. Minkowski et la relativité restreinte)

Autre conclusion : la géométrie (courbure) de l'espace-temps (= le champ gravitationnel) est déterminée par son contenu énergético-impulsionnel

Conclusions d'Einstein (principe d'équivalence)

« dans tout référentiel **local** *en chute libre, les lois de la physique sont celles en l'absence de gravitation »*

$\Longrightarrow$ $m_I = m_G$ car le **poids** est une **pseudo-force/force d'inertie** ($= \vec{0}$ dans les référentiels inertiels)

$\Longrightarrow$ dans un champ gravitationnel, le mouvement **global** d'observateurs inertiels (*exemple* : astronautes en apesanteur) peut être associé à une trajectoire de forme complexe car l'existence d'un **champ de gravitation traduit la courbure de l'espace-temps** (cf. Minkowski et la relativité restreinte) qui est **localement plat**

Autre conclusion : la géométrie (courbure) de l'espace-temps ($=$ le champ gravitationnel) est déterminée par son contenu énergético-impulsionnel

Conclusions d'Einstein (principe d'équivalence)

« dans tout référentiel **local** *en chute libre, les lois de la physique sont celles en l'absence de gravitation »*

$\Longrightarrow$ $m_I = m_G$ car le **poids** est une **pseudo-force/force d'inertie** ($= \vec{0}$ dans les référentiels inertiels)

$\Longrightarrow$ dans un champ gravitationnel, le mouvement **global** d'observateurs inertiels (*exemple* : astronautes en apesanteur) peut être associé à une trajectoire de forme complexe car l'existence d'un **champ de gravitation traduit la courbure de l'espace-temps** (cf. Minkowski et la relativité restreinte) qui est **localement plat**

Autre conclusion : la géométrie (courbure) de l'espace-temps ($=$ le champ gravitationnel) est déterminée par son contenu énergético-impulsionnel

II

Mathématiques de la relativité restreinte

« Les lois **non-gravitationnelles** *de la mécanique et de l'***électrodynamique** *sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels »*

- **célérité** des ondes électromagnétiques invariante car $c = (\mu_0\,\epsilon_0)^{-1/2}$ (conclusion issue des équations de Maxwell)
- **durées** et **distances** entre **événements** relatives au référentiel (inertiel)

  $\Longrightarrow$ contraction de Lorentz et dilatation du temps avec facteur de Lorentz $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$, où $u =$ **vitesse relative**
- **remarque** : phénomènes **symétriques** car **vitesse** $=$ **notion relative**

« *Les lois* ***non-gravitationnelles*** *de la mécanique et de l'****électrodynamique*** *sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels* »

Conséquences :

- **célérité** des ondes électromagnétiques invariante car $c = (\mu_0\,\epsilon_0)^{-1/2}$ (conclusion issue des équations de Maxwell)
- **durées** et **distances** entre **événements** relatives au référentiel (inertiel)

  $\Longrightarrow$ contraction de Lorentz et dilatation du temps avec facteur de Lorentz $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$, où $u =$ **vitesse relative**
- **remarque** : phénomènes **symétriques** car **vitesse** = **notion relative**

« Les lois **non-gravitationnelles** *de la mécanique et de l'***électrodynamique** *sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels »*

Conséquences :

- **célérité** des ondes électromagnétiques invariante car $c = (\mu_0\,\epsilon_0)^{-1/2}$ (conclusion issue des équations de Maxwell)
- **durées** et **distances** entre **événements** relatives au référentiel (inertiel)

  $\implies$ contraction de Lorentz et dilatation du temps avec facteur de Lorentz $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$, où $u =$ **vitesse relative**
- **remarque** : phénomènes **symétriques** car **vitesse** $=$ **notion relative**

« Les lois **non-gravitationnelles** *de la mécanique et de l'***électrodynamique** *sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels »*

Conséquences :

- **célérité** des ondes électromagnétiques invariante car $c = (\mu_0 \, \epsilon_0)^{-1/2}$ (conclusion issue des équations de Maxwell)
- **durées** et **distances** entre **événements** relatives au référentiel (inertiel)

  $\Longrightarrow$ contraction de Lorentz et dilatation du temps avec facteur de Lorentz $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$, où u = **vitesse relative**
- **remarque** : phénomènes **symétriques** car **vitesse** = **notion relative**

« *Les lois* ***non-gravitationnelles*** *de la mécanique et de l'****électrodynamique*** *sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels* »

Conséquences :

- **célérité** des ondes électromagnétiques invariante car $c = (\mu_0 \, \epsilon_0)^{-1/2}$ (conclusion issue des équations de Maxwell)
- **durées** et **distances** entre **événements** relatives au référentiel (inertiel)

  $\Longrightarrow$ contraction de Lorentz et dilatation du temps avec facteur de Lorentz $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$, où $u =$ **vitesse relative**
- **remarque** : phénomènes **symétriques** car **vitesse** $=$ **notion relative**

Formalisme de Minkowski (1907) :

- réinterprétation **géométrique** des équations de la relativité restreinte
- **ingrédient fondamental** :
  espace-temps (de Minkowski) = espace **affine** 4d
- **points** = événements
  $\Longrightarrow$ coordonnées spatio-temporelles (ct, x, y, z) dans référentiel inertiel fixé
  $\Longrightarrow$ notation indicielle : x^μ, avec $\mu \in (0, 1, 2, 3)$
- **changement de référentiel inertiel** :
  transformation de Lorentz (TL) = changement **linéaire** des coordonnées

$$\boxed{\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}$$ où $\beta = u/c$ et $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$

avec u = vitesse relative des référentiels (en configuration standard)

Formalisme de Minkowski (1907) :

- réinterprétation **géométrique** des équations de la relativité restreinte
- **ingrédient fondamental** :
  espace-temps (de Minkowski) = espace **affine** 4d
- **points** = événements
  $\Longrightarrow$ coordonnées spatio-temporelles (ct, x, y, z) dans référentiel inertiel fixé
  $\Longrightarrow$ notation indicielle : x^μ, avec $\mu \in (0, 1, 2, 3)$
- **changement de référentiel inertiel** :
  transformation de Lorentz (TL) = changement **linéaire** des coordonnées

$$\boxed{\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}} \text{ où } \beta = u/c \text{ et } \gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$$

avec u = vitesse relative des référentiels (en configuration standard)

Formalisme de Minkowski (1907) :

- réinterprétation **géométrique** des équations de la relativité restreinte
- **ingrédient fondamental** :
  espace-temps (de Minkowski) = espace **affine** 4d
- **points** = événements
  $\Longrightarrow$ coordonnées spatio-temporelles (ct, x, y, z) dans référentiel inertiel fixé
  $\Longrightarrow$ notation indicielle : x^μ, avec $\mu \in (0, 1, 2, 3)$
- **changement de référentiel inertiel** :
  transformation de Lorentz (TL) = changement **linéaire** des coordonnées

$$\boxed{\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}$$ où $\beta = u/c$ et $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$

avec u = vitesse relative des référentiels (en configuration standard)

Formalisme de Minkowski (1907) :

- réinterprétation **géométrique** des équations de la relativité restreinte
- **ingrédient fondamental** :
  espace-temps (de Minkowski) = espace **affine** 4d
- **points** = événements
  $\Longrightarrow$ coordonnées spatio-temporelles (ct, x, y, z) dans référentiel inertiel fixé
  $\Longrightarrow$ notation indicielle : $\boldsymbol{x}^\mu$, avec $\mu \in (0, 1, 2, 3)$
- **changement de référentiel inertiel** :
  transformation de Lorentz (TL) = changement **linéaire** des coordonnées

$$\boxed{\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}$$ où $\beta = u/c$ et $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$

avec u = vitesse relative des référentiels (en configuration standard)

Formalisme de Minkowski (1907) :

- réinterprétation **géométrique** des équations de la relativité restreinte
- **ingrédient fondamental** :
  espace-temps (de Minkowski) = espace **affine** 4d
- **points** = événements
  $\Longrightarrow$ coordonnées spatio-temporelles (ct, x, y, z) dans référentiel inertiel fixé
  $\Longrightarrow$ notation indicielle : x^μ, avec $\mu \in (0, 1, 2, 3)$
- **changement de référentiel inertiel** :
  transformation de Lorentz (TL) = changement **linéaire** des coordonnées

$$\boxed{\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}$$ où $\beta = u/c$ et $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$

avec u = vitesse relative des référentiels (en configuration standard)

Physique spatio-temporelle :

- **grandeurs physiques** : invariants de Lorentz, 4-vecteurs, 4-matrices, etc.

  $\Longrightarrow$ **tenseurs Lorentziens**
  (composantes dans deux référentiels inertiels reliées par « TL »)

  exemples : masse m ou charge électrique q

- **principe de relativité restreint** :
  « Dans un référentiel inertiel, les lois non-gravitationnelles de la physique s'expriment comme des relations entre tenseurs lorentziens »

Physique spatio-temporelle :

- **grandeurs physiques** : invariants de Lorentz, 4-vecteurs, 4-matrices, etc.
  $\Longrightarrow$ **tenseurs Lorentziens**
  (composantes dans deux référentiels inertiels reliées par « TL »)
  exemples : masse m ou charge électrique q

- **principe de relativité restreint** :
  « Dans un référentiel inertiel, les lois non-gravitationnelles de la physique s'expriment comme des relations entre tenseurs lorentziens »

Physique spatio-temporelle :

- **grandeurs physiques** : invariants de Lorentz, 4-vecteurs, 4-matrices, etc.

  $\Longrightarrow$ **tenseurs Lorentziens**
  (composantes dans deux référentiels inertiels reliées par « TL »)

  exemples : masse m ou charge électrique q

- **principe de relativité restreint** :
  « Dans un référentiel inertiel, les lois non-gravitationnelles de la physique s'expriment comme des relations entre tenseurs lorentziens »

Physique spatio-temporelle :

- **grandeurs physiques** : invariants de Lorentz, 4-vecteurs, 4-matrices, etc.

  $\Longrightarrow$ **tenseurs Lorentziens**
  (composantes dans deux référentiels inertiels reliées par « TL »)

  exemples : masse m ou charge électrique q,
  4-impulsion $p^\mu = (E/c, p_x, p_y, p_z)$

- **principe de relativité restreint** :
  « Dans un référentiel inertiel, les lois non-gravitationnelles de la physique s'expriment comme des relations entre tenseurs lorentziens »

Physique spatio-temporelle :

- **grandeurs physiques** : invariants de Lorentz, 4-vecteurs, 4-matrices, etc.

  $\Longrightarrow$ **tenseurs Lorentziens**
  (composantes dans deux référentiels inertiels reliées par « TL »)

  exemples : masse m ou charge électrique q,
  4-impulsion $p^{\mu} = (E/c, p_x, p_y, p_z)$, tenseur électromagnétique $F^{\mu\nu}$
  (contient $\vec{E}$ et $\vec{B}$), etc.
- **principe de relativité restreint** :
  « Dans un référentiel inertiel, les lois non-gravitationnelles de la physique s'expriment comme des relations entre tenseurs lorentziens »

Physique spatio-temporelle :

- **grandeurs physiques** : invariants de Lorentz, 4-vecteurs, 4-matrices, etc.

  $\Longrightarrow$ **tenseurs Lorentziens**
  (composantes dans deux référentiels inertiels reliées par « TL »)

  exemples : masse m ou charge électrique q,
  4-impulsion $p^\mu = (E/c, p_x, p_y, p_z)$, tenseur électromagnétique $F^{\mu\nu}$
  (contient $\vec{E}$ et $\vec{B}$), etc.

- **principe de relativité restreint** :
  « Dans un référentiel inertiel, les lois non-gravitationnelles de la physique s'expriment comme des relations entre tenseurs lorentziens »

- TL en configuration standard :

$$\Lambda^{\mu}{}_{\mu'} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\simeq$ « rotation hyperbolique » :
laisse invariant l'intervalle spatio-temporel Δs^2 entre deux événements :

$$\Delta s^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \implies \boxed{ds^2 = -c^2\,dt^2 + d\ell^2}$$

$\implies$ même **valeur** et même **expression** dans tous les référentiels inertiels

$\implies$ espace-temps de Minkowski = espace affine pseudo-euclidien

- rotations 3d et TL : groupe de Lorentz (restreint et orthochrone) $SO^+(1,3)$; analogue spatio-temporel de $SO(3)$ (groupe des rotations spatiales 3d)

remarque : deux **conventions de signature** possibles pour la **métrique de Minkowski** : $\boxed{\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,\,1,\,1,\,1)}$ ou $\mathrm{diag}(1,\,-1,\,-1,\,-1)$

- TL en configuration standard :

$$\Lambda^{\mu}{}_{\mu'} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\simeq$ « rotation hyperbolique » :
laisse invariant l'intervalle spatio-temporel Δs^2 entre deux événements :

$$\Delta s^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \implies \boxed{ds^2 = -c^2\, dt^2 + d\ell^2}$$

$\implies$ même **valeur** et même **expression** dans tous les référentiels inertiels

$\implies$ espace-temps de Minkowski = espace affine pseudo-euclidien

- rotations 3d et TL : groupe de Lorentz (restreint et orthochrone) $SO^+(1,3)$; analogue spatio-temporel de $SO(3)$ (groupe des rotations spatiales 3d)

remarque : deux **conventions de signature** possibles pour la **métrique de Minkowski** : $\boxed{\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1,\ 1,\ 1,\ 1)}$ ou $\text{diag}(1,\ -1,\ -1,\ -1)$

- TL en configuration standard :

$$\Lambda^{\mu}{}_{\mu'} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\simeq$ « rotation hyperbolique » :
laisse invariant l'intervalle spatio-temporel Δs^2 entre deux événements :

$$\Delta s^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \implies \boxed{ds^2 = -c^2\, dt^2 + d\ell^2}$$

$\implies$ même **valeur** et même **expression** dans tous les référentiels inertiels

$\implies$ espace-temps de Minkowski = espace affine pseudo-euclidien

- rotations 3d et TL : groupe de Lorentz (restreint et orthochrone) $SO^+(1,3)$; analogue spatio-temporel de $SO(3)$ (groupe des rotations spatiales 3d)

remarque : deux **conventions de signature** possibles pour la **métrique de Minkowski** : $\boxed{\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)}$ ou $\mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$

- TL en configuration standard :

$$\Lambda^{\mu}{}_{\mu'} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\simeq$ « rotation hyperbolique » :
laisse invariant l'intervalle spatio-temporel Δs^2 entre deux événements :

$$\Delta s^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \implies \boxed{ds^2 = -c^2\, dt^2 + d\ell^2}$$

$\implies$ même **valeur** et même **expression** dans tous les référentiels inertiels

$\implies$ espace-temps de Minkowski = espace affine pseudo-euclidien

- rotations 3d et TL : groupe de Lorentz (restreint et orthochrone) $SO^+(1,3)$; analogue spatio-temporel de $SO(3)$ (groupe des rotations spatiales 3d)

remarque : deux **conventions de signature** possibles pour la **métrique de Minkowski** : $\boxed{\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,\, 1,\, 1,\, 1)}$ ou $\mathrm{diag}(1,\, -1,\, -1,\, -1)$

- TL en configuration standard :

$$\Lambda^{\mu}{}_{\mu'} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\simeq$ « rotation hyperbolique » :
laisse invariant l'intervalle spatio-temporel Δs^2 entre deux événements :

$$\Delta s^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{ds^2 = -c^2\,dt^2 + d\ell^2}$$

$\Longrightarrow$ même **valeur** et même **expression** dans tous les référentiels inertiels

$\Longrightarrow$ espace-temps de Minkowski = espace affine pseudo-euclidien

- rotations 3d et TL : groupe de Lorentz (restreint et orthochrone) $SO^+(1,3)$; analogue spatio-temporel de $SO(3)$ (groupe des rotations spatiales 3d)

remarque : deux **conventions de signature** possibles pour la **métrique de Minkowski** : $\boxed{\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,\,1,\,1,\,1)}$ ou $\mathrm{diag}(1,\,-1,\,-1,\,-1)$

- TL en configuration standard :

$$\Lambda^{\mu}{}_{\mu'} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\simeq$ « rotation hyperbolique » :
laisse invariant l'intervalle spatio-temporel Δs^2 entre deux événements :

$$\Delta s^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \implies \boxed{ds^2 = -c^2\,dt^2 + d\ell^2}$$

$\implies$ même **valeur** et même **expression** dans tous les référentiels inertiels

$\implies$ espace-temps de Minkowski $=$ espace affine pseudo-euclidien

- rotations 3d et TL : groupe de Lorentz (restreint et orthochrone) $SO^+(1,3)$; analogue spatio-temporel de $SO(3)$ (groupe des rotations spatiales 3d)

remarque : deux **conventions de signature** possibles pour la **métrique de Minkowski** : $\boxed{\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,\,1,\,1,\,1)}$ ou $\mathrm{diag}(1,\,-1,\,-1,\,-1)$

$$ds^2 = -c^2\,dt^2 + d\ell^2$$

- ds^2 = grandeur scalaire (invariant de Lorentz)
- signe de ds^2 dépend des **deux événements** :

$$ds^2_{AB} < 0 \quad \text{: genre temps}$$
$$ds^2_{AC} = 0 \quad \text{: genre lumière}$$
$$ds^2_{AD} > 0 \quad \text{: genre espace}$$

- **valeur** et **signe** indépendants de l'**observateur**
  $\Longrightarrow$ structure causale **absolue**
  $\Longrightarrow$ cône de lumière associé à chaque événement (ici cône de A)
- $v \leqslant c \Longrightarrow$ trajectoire d'**objet physique** nécessairement **interne** au cône ($ds^2 \leqslant 0$)

$$ds^2 = -c^2\,dt^2 + d\ell^2$$

- ds^2 = grandeur scalaire (invariant de Lorentz)
- signe de ds^2 dépend des **deux événements** :

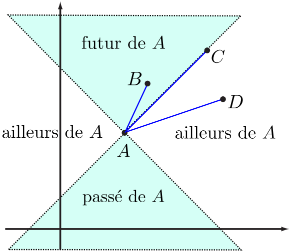
$$ds^2_{AB} < 0 \text{ : genre temps}$$
$$ds^2_{AC} = 0 \text{ : genre lumière}$$
$$ds^2_{AD} > 0 \text{ : genre espace}$$

- **valeur** et **signe** indépendants de l'**observateur**
  $\Longrightarrow$ structure causale **absolue**
  $\Longrightarrow$ cône de lumière associé à chaque événement (ici cône de A)
- $v \leqslant c \Longrightarrow$ trajectoire d'**objet physique** nécessairement **interne** au cône ($ds^2 \leqslant 0$)

$$ds^2 = -c^2\,dt^2 + d\ell^2$$

- ds^2 = grandeur scalaire (invariant de Lorentz)
- signe de ds^2 dépend des **deux événements** :

$$ds^2_{AB} < 0 \quad : \text{genre temps}$$
$$ds^2_{AC} = 0 \quad : \text{genre lumière}$$
$$ds^2_{AD} > 0 \quad : \text{genre espace}$$

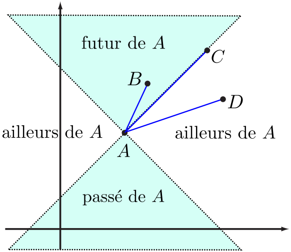


- **valeur** et **signe** indépendants de l'**observateur**
  $\Longrightarrow$ structure causale **absolue**
  $\Longrightarrow$ cône de lumière associé à chaque événement (ici cône de A)
- $v \leqslant c \Longrightarrow$ trajectoire d'**objet physique** nécessairement **interne** au cône ($ds^2 \leqslant 0$)

$$ds^2 = -c^2\,dt^2 + d\ell^2$$

- ds^2 = grandeur scalaire (invariant de Lorentz)
- signe de ds^2 dépend des **deux événements** :

$$ds^2_{AB} < 0 \quad : \text{genre temps}$$
$$ds^2_{AC} = 0 \quad : \text{genre lumière}$$
$$ds^2_{AD} > 0 \quad : \text{genre espace}$$



- **valeur** et **signe** indépendants de l'**observateur**

  $\Longrightarrow$ structure causale **absolue**

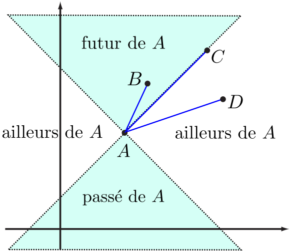
  $\Longrightarrow$ cône de lumière associé à chaque événement (ici cône de A)

- $v \leqslant c \Longrightarrow$ trajectoire d'**objet physique** nécessairement **interne** au cône ($ds^2 \leqslant 0$)

$$ds^2 = -c^2\,dt^2 + d\ell^2$$

- ds^2 = grandeur scalaire (invariant de Lorentz)
- signe de ds^2 dépend des **deux événements** :

$$ds^2_{AB} < 0 \text{ : genre temps}$$
$$ds^2_{AC} = 0 \text{ : genre lumière}$$
$$ds^2_{AD} > 0 \text{ : genre espace}$$



- **valeur** et **signe** indépendants de l'**observateur**

  $\Longrightarrow$ structure causale **absolue**

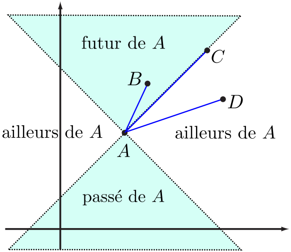
  $\Longrightarrow$ cône de lumière associé à chaque événement (ici cône de A)

- $v \leqslant c \Longrightarrow$ trajectoire d'**objet physique** nécessairement **interne** au cône ($ds^2 \leqslant 0$)

$$ds^2 = -c^2\,dt^2 + d\ell^2$$

- ds^2 = grandeur scalaire (invariant de Lorentz)
- signe de ds^2 dépend des **deux événements** :

$$ds^2_{AB} < 0 \;:\; \text{genre temps}$$
$$ds^2_{AC} = 0 \;:\; \text{genre lumière}$$
$$ds^2_{AD} > 0 \;:\; \text{genre espace}$$

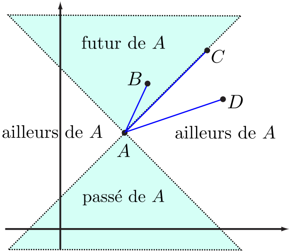


- **valeur** et **signe** indépendants de l'**observateur**
  $\Longrightarrow$ structure causale **absolue**
  $\Longrightarrow$ cône de lumière associé à chaque événement (ici cône de A)
- $v \leqslant c \implies$ trajectoire d'**objet physique** nécessairement **interne** au cône ($ds^2 \leqslant 0$)

$$ds^2 = -c^2\,dt^2 + d\ell^2$$

- ds^2 = grandeur scalaire (invariant de Lorentz)
- signe de ds^2 dépend des **deux événements** :

$$ds^2_{AB} < 0 \text{ : genre temps}$$
$$ds^2_{AC} = 0 \text{ : genre lumière}$$
$$ds^2_{AD} > 0 \text{ : genre espace}$$



- **valeur** et **signe** indépendants de l'**observateur**
  $\Longrightarrow$ structure causale **absolue**
  $\Longrightarrow$ cône de lumière associé à chaque événement (ici cône de A)
- $v \leqslant c \Longrightarrow$ trajectoire d'**objet physique** nécessairement **interne** au cône ($ds^2 \leqslant 0$)

courbes spatio-temporelles :

- ligne d'univers **ssi** $ds^2 < 0$ en tout point de la courbe

$\Longrightarrow$ observateur ou particule massive ($v < c$, $\forall$ référentiel)

$\Longrightarrow$ rectiligne **ssi** inertiel(le)

$\Longrightarrow$ temps propre (vieillissement)

$$\boxed{d\tau = \frac{\sqrt{-ds^2}}{c}} = \frac{dt}{\gamma(t)}$$

- courbe nulle **ssi** $ds^2 = 0$ en tout point

$\Longrightarrow$ trajectoire de particule avec $m = 0$ ($v = c$, $\forall$ référentiel)

- courbe géométrique (3d) si $ds^2 > 0$

exemple : événements séparés de M (cf figure) par $dt = 0$

$\Longrightarrow$ $ds^2 = d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

$\Longrightarrow$ **espace euclidien 3d** pour **observateur inertiel**

courbes spatio-temporelles :

- ligne d'univers **ssi** $ds^2 < 0$ en tout point de la courbe

  $\Longrightarrow$ observateur ou particule massive ($v < c$, $\forall$ référentiel)

  $\Longrightarrow$ rectiligne **ssi** inertiel(le)

  $\Longrightarrow$ temps propre (vieillissement)

$$\boxed{d\tau = \frac{\sqrt{-ds^2}}{c}} = \frac{dt}{\gamma(t)}$$

- courbe nulle **ssi** $ds^2 = 0$ en tout point

  $\Longrightarrow$ trajectoire de particule avec $m = 0$ ($v = c$, $\forall$ référentiel)

- courbe géométrique (3d) si $ds^2 > 0$

  exemple : événements séparés de M (cf figure) par $dt = 0$

  $\Longrightarrow$ $ds^2 = d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

  $\Longrightarrow$ **espace euclidien 3d** pour **observateur inertiel**

courbes spatio-temporelles :

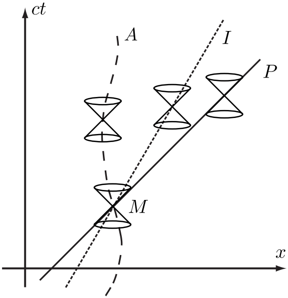
- ligne d'univers **ssi** $ds^2 < 0$ en tout point de la courbe

  $\Longrightarrow$ observateur ou particule massive ($v < c$, $\forall$ référentiel)

  $\Longrightarrow$ rectiligne **ssi** inertiel(le)

  $\Longrightarrow$ temps propre (vieillissement)

$$\boxed{d\tau = \frac{\sqrt{-ds^2}}{c}} = \frac{dt}{\gamma(t)}$$



- courbe nulle **ssi** $ds^2 = 0$ en tout point

  $\Longrightarrow$ trajectoire de particule avec $m = 0$ ($v = c$, $\forall$ référentiel)

- courbe géométrique (3d) si $ds^2 > 0$

  exemple : événements séparés de M (cf figure) par $dt = 0$

  $\Longrightarrow$ $ds^2 = d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

  $\Longrightarrow$ **espace euclidien 3d** pour **observateur inertiel**

courbes spatio-temporelles :

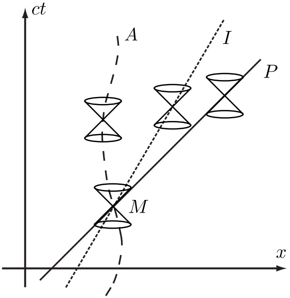
- ligne d'univers **ssi** $ds^2 < 0$ en tout point de la courbe

  $\Longrightarrow$ observateur ou particule massive ($v < c$, $\forall$ référentiel)

  $\Longrightarrow$ rectiligne **ssi** inertiel(le)

  $\Longrightarrow$ temps propre (vieillissement)

$$\boxed{d\tau = \frac{\sqrt{-ds^2}}{c}} = \frac{dt}{\gamma(t)}$$



- courbe nulle **ssi** $ds^2 = 0$ en tout point

  $\Longrightarrow$ trajectoire de particule avec $m = 0$ ($v = c$, $\forall$ référentiel)

- courbe géométrique (3d) si $ds^2 > 0$

  exemple : événements séparés de M (cf figure) par $dt = 0$

  $\Longrightarrow$ $ds^2 = d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

  $\Longrightarrow$ **espace euclidien 3d** pour **observateur inertiel**

courbes spatio-temporelles :

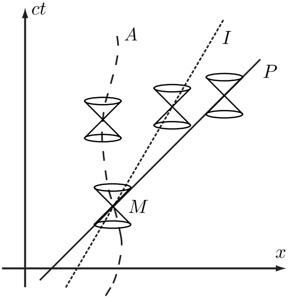
- ligne d'univers **ssi** $ds^2 < 0$ en tout point de la courbe

  $\Longrightarrow$ observateur ou particule massive ($v < c$, $\forall$ référentiel)

  $\Longrightarrow$ rectiligne **ssi** inertiel(le)

  $\Longrightarrow$ temps propre (vieillissement)

$$\boxed{d\tau = \frac{\sqrt{-ds^2}}{c}} = \frac{dt}{\gamma(t)}$$



- courbe nulle **ssi** $ds^2 = 0$ en tout point

  $\Longrightarrow$ trajectoire de particule avec $m = 0$ ($v = c$, $\forall$ référentiel)

- courbe géométrique (3d) si $ds^2 > 0$

  exemple : événements séparés de M (cf figure) par $dt = 0$

  $\Longrightarrow$ $ds^2 = d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

  $\Longrightarrow$ **espace euclidien 3d** pour **observateur inertiel**

courbes spatio-temporelles :

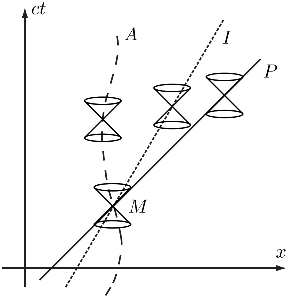
- ligne d'univers **ssi** $ds^2 < 0$ en tout point de la courbe

  $\Longrightarrow$ observateur ou particule massive ($v < c$, $\forall$ référentiel)

  $\Longrightarrow$ rectiligne **ssi** inertiel(le)

  $\Longrightarrow$ temps propre (vieillissement)

$$\boxed{d\tau = \frac{\sqrt{-ds^2}}{c}} = \frac{dt}{\gamma(t)}$$



- courbe nulle **ssi** $ds^2 = 0$ en tout point

  $\Longrightarrow$ trajectoire de particule avec $m = 0$ ($v = c$, $\forall$ référentiel)

- courbe géométrique (3d) si $ds^2 > 0$

  exemple : événements séparés de M (cf figure) par $dt = 0$

  $\Longrightarrow$ $ds^2 = d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

  $\Longrightarrow$ **espace euclidien 3d** pour **observateur inertiel**

courbes spatio-temporelles :

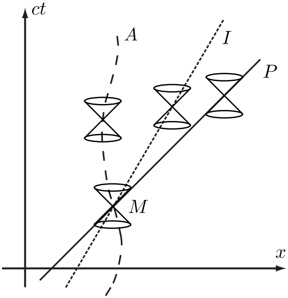
- ligne d'univers **ssi** $ds^2 < 0$ en tout point de la courbe

  $\Longrightarrow$ observateur ou particule massive ($v < c$, $\forall$ référentiel)

  $\Longrightarrow$ rectiligne **ssi** inertiel(le)

  $\Longrightarrow$ temps propre (vieillissement)

$$\boxed{d\tau = \frac{\sqrt{-ds^2}}{c}} = \frac{dt}{\gamma(t)}$$



- courbe nulle **ssi** $ds^2 = 0$ en tout point

  $\Longrightarrow$ trajectoire de particule avec $m = 0$ ($v = c$, $\forall$ référentiel)

- courbe géométrique (3d) si $ds^2 > 0$

  exemple : événements séparés de M (cf figure) par $dt = 0$

  $\Longrightarrow$ $ds^2 = d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

  $\Longrightarrow$ **espace euclidien 3d** pour **observateur inertiel**

courbes spatio-temporelles :

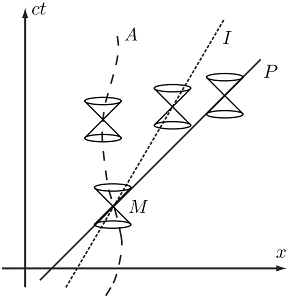
- ligne d'univers **ssi** $ds^2 < 0$ en tout point de la courbe

  $\Longrightarrow$ observateur ou particule massive ($v < c$, $\forall$ référentiel)

  $\Longrightarrow$ rectiligne **ssi** inertiel(le)

  $\Longrightarrow$ temps propre (vieillissement)

$$\boxed{d\tau = \frac{\sqrt{-ds^2}}{c}} = \frac{dt}{\gamma(t)}$$



- courbe nulle **ssi** $ds^2 = 0$ en tout point

  $\Longrightarrow$ trajectoire de particule avec $m = 0$ ($v = c$, $\forall$ référentiel)

- courbe géométrique (3d) si $ds^2 > 0$

  exemple : événements séparés de M (cf figure) par $dt = 0$

  $\Longrightarrow$ $ds^2 = d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

  $\Longrightarrow$ **espace euclidien 3d** pour **observateur inertiel**

courbes spatio-temporelles :

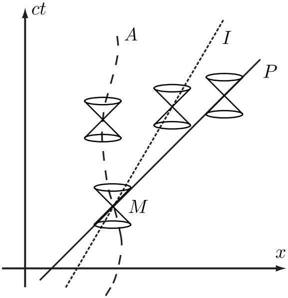
- ligne d'univers **ssi** $ds^2 < 0$ en tout point de la courbe

  $\Longrightarrow$ observateur ou particule massive ($v < c$, $\forall$ référentiel)

  $\Longrightarrow$ rectiligne **ssi** inertiel(le)

  $\Longrightarrow$ temps propre (vieillissement)

$$\boxed{d\tau = \frac{\sqrt{-ds^2}}{c}} = \frac{dt}{\gamma(t)}$$



- courbe nulle **ssi** $ds^2 = 0$ en tout point

  $\Longrightarrow$ trajectoire de particule avec $m = 0$ ($v = c$, $\forall$ référentiel)

- courbe géométrique (3d) si $ds^2 > 0$

  exemple : événements séparés de M (cf figure) par $dt = 0$

  $\Longrightarrow$ $ds^2 = d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

  $\Longrightarrow$ **espace euclidien 3d** pour **observateur inertiel**

courbes spatio-temporelles :

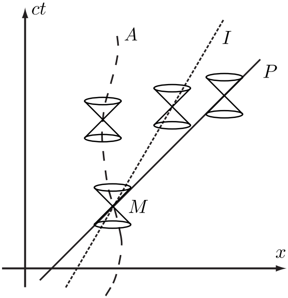
- ligne d'univers **ssi** $ds^2 < 0$ en tout point de la courbe

  $\Longrightarrow$ observateur ou particule massive ($v < c$, $\forall$ référentiel)

  $\Longrightarrow$ rectiligne **ssi** inertiel(le)

  $\Longrightarrow$ temps propre (vieillissement)

$$\boxed{d\tau = \frac{\sqrt{-ds^2}}{c}} = \frac{dt}{\gamma(t)}$$



- courbe nulle **ssi** $ds^2 = 0$ en tout point

  $\Longrightarrow$ trajectoire de particule avec $m = 0$ ($v = c$, $\forall$ référentiel)

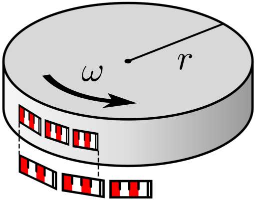
- courbe géométrique (3d) si $ds^2 > 0$

  exemple : événements séparés de M (cf figure) par $dt = 0$

  $\Longrightarrow$ $ds^2 = d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

  $\Longrightarrow$ **espace euclidien 3d** pour **observateur inertiel**

- **Paradoxe d'Ehrenfest** : disque en **rotation** $\Longrightarrow$ contraction dans direction du mouvement, mais pas rayon



$\Longrightarrow$ **circonférence** $< 2\pi \times$ **rayon**

$\Longrightarrow$ géométrie **euclidienne** incorrecte ?

- **Coordonnées de Born** :

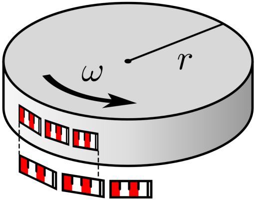
$$ds^2 = -c^2dt^2 + d\ell^2 = -c^2dt^2 + dr^2 + r^2\,d\theta^2 + dz^2$$

- **Langevin** : pour $R\omega < c$, on peut écrire

$$ds^2 = -c^2d\tau^2 + dL^2 \text{ avec } \boxed{dL^2 = dR^2 + \frac{R^2\,d\Theta^2}{1 - R^2\,\omega^2/c^2} + dZ^2}$$

$\Longrightarrow$ espace non-euclidien pour un **observateur accéléré** ? (si $\omega \neq 0$)

- **Paradoxe d'Ehrenfest** : disque en **rotation** $\Longrightarrow$ contraction dans direction du mouvement, mais pas rayon
  $\Longrightarrow$ **circonférence** $< 2\pi \times$ **rayon**
  $\Longrightarrow$ géométrie **euclidienne** incorrecte ?



- **Coordonnées de Born** :

$$ds^2 = -c^2dt^2 + d\ell^2 = -c^2dt^2 + dr^2 + r^2\,d\theta^2 + dz^2$$

- **Langevin** : pour $R\omega < c$, on peut écrire

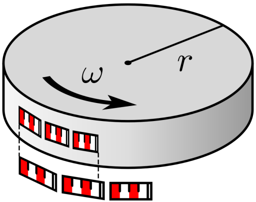
$$ds^2 = -c^2d\tau^2 + dL^2 \text{ avec } \boxed{dL^2 = dR^2 + \frac{R^2\,d\Theta^2}{1 - R^2\,\omega^2/c^2} + dZ^2}$$

$\Longrightarrow$ espace non-euclidien pour un **observateur accéléré** ? (si $\omega \neq 0$)

- **Paradoxe d'Ehrenfest** : disque en **rotation** $\Longrightarrow$ contraction dans direction du mouvement, mais pas rayon

  $\Longrightarrow$ **circonférence** $< 2\pi \times$ **rayon**

  $\Longrightarrow$ géométrie **euclidienne** incorrecte ?



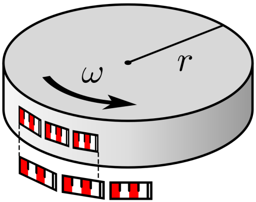
- **Coordonnées de Born** :

$$ds^2 = -c^2dt^2 + d\ell^2 = -c^2dt^2 + dr^2 + r^2\,d\theta^2 + dz^2$$

- **Langevin** : pour $R\omega < c$, on peut écrire

$$ds^2 = -c^2d\tau^2 + dL^2 \text{ avec } \boxed{dL^2 = dR^2 + \frac{R^2\,d\Theta^2}{1 - R^2\,\omega^2/c^2} + dZ^2}$$

$\Longrightarrow$ espace non-euclidien pour un **observateur accéléré** ? (si $\omega \neq 0$)



- **Paradoxe d'Ehrenfest** : disque en **rotation**
  $\Longrightarrow$ contraction dans direction du mouvement, mais pas rayon
  $\Longrightarrow$ **circonférence** $< 2\pi \times$ **rayon**
  $\Longrightarrow$ géométrie **euclidienne** incorrecte ?

- **Coordonnées de Born** :

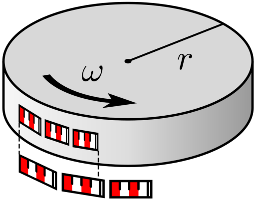
$$ds^2 = -c^2 dt^2 + d\ell^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2\, d\theta^2 + dz^2$$

- **Langevin** : pour $R\omega < c$, on peut écrire

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 + dL^2 \text{ avec } \boxed{dL^2 = dR^2 + \frac{R^2\, d\Theta^2}{1 - R^2\,\omega^2/c^2} + dZ^2}$$

$\Longrightarrow$ espace non-euclidien pour un **observateur accéléré** ? (si $\omega \neq 0$)

- **Paradoxe d'Ehrenfest** : disque en **rotation**
  $\Longrightarrow$ contraction dans direction du mouvement, mais pas rayon
  $\Longrightarrow$ **circonférence** $< 2\pi \times$ **rayon**
  $\Longrightarrow$ géométrie **euclidienne** incorrecte ?



- **Coordonnées de Born** :

$$ds^2 = -c^2dt^2 + d\ell^2 = -c^2dt^2 + dr^2 + r^2\,d\theta^2 + dz^2$$

$$\Longrightarrow \quad ds^2 = -(c^2 - R^2\omega^2)\,dT^2 + 2\,R^2\,\omega\,dT\,d\Theta + dR^2 + R^2\,d\Theta^2 + dZ^2$$

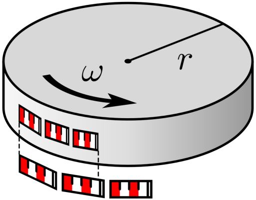
avec $T = t\,,\ R = r\,,\ \Theta = \theta - \omega\,t\,,\ Z = z$ (coordonnées en rotation)

- **Langevin** : pour $R\omega < c$, on peut écrire

$$ds^2 = -c^2d\tau^2 + dL^2 \quad \text{avec} \quad \boxed{dL^2 = dR^2 + \frac{R^2\,d\Theta^2}{1 - R^2\,\omega^2/c^2} + dZ^2}$$

$\Longrightarrow$ espace non-euclidien pour un **observateur accéléré** ? (si $\omega \neq 0$)

- **Paradoxe d'Ehrenfest** : disque en **rotation** $\Longrightarrow$ contraction dans direction du mouvement, mais pas rayon
  $\Longrightarrow$ **circonférence** $< 2\pi \times$ **rayon**
  $\Longrightarrow$ géométrie **euclidienne** incorrecte ?



- **Coordonnées de Born** :

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + d\ell^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2\, d\theta^2 + dz^2$$
$$\Longrightarrow \quad ds^2 = -(c^2 - R^2\omega^2)\, dT^2 + 2\, R^2\, \omega\, dT\, d\Theta + dR^2 + R^2\, d\Theta^2 + dZ^2$$

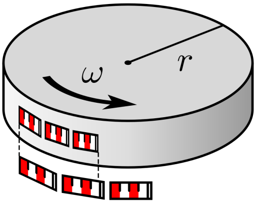
avec $T = t\,,\ R = r\,,\ \Theta = \theta - \omega\, t\,,\ Z = z$ (coordonnées en rotation)

- **Langevin** : pour $R\omega < c$, on peut écrire

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 + dL^2 \text{ avec } \boxed{dL^2 = dR^2 + \frac{R^2\, d\Theta^2}{1 - R^2\,\omega^2/c^2} + dZ^2}$$

$\Longrightarrow$ espace non-euclidien pour un **observateur accéléré** ? (si $\omega \neq 0$)

- **Paradoxe d'Ehrenfest** : disque en **rotation**
  $\Longrightarrow$ contraction dans direction du mouvement, mais pas rayon
  $\Longrightarrow$ **circonférence** $< 2\pi \times$ **rayon**
  $\Longrightarrow$ géométrie **euclidienne** incorrecte ?



- **Coordonnées de Born** :

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + d\ell^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2\, d\theta^2 + dz^2$$

$$\Longrightarrow \quad ds^2 = -(c^2 - R^2\omega^2)\, dT^2 + 2\, R^2\, \omega\, dT\, d\Theta + dR^2 + R^2\, d\Theta^2 + dZ^2$$

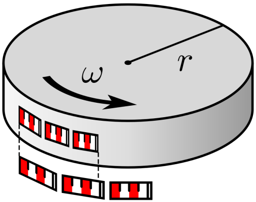
avec $T = t\,,\ R = r\,,\ \Theta = \theta - \omega\, t\,,\ Z = z$ (coordonnées en rotation)

- **Langevin** : pour $R\omega < c$, on peut écrire

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 + dL^2 \text{ avec } \boxed{dL^2 = dR^2 + \frac{R^2\, d\Theta^2}{1 - R^2\, \omega^2/c^2} + dZ^2}$$

$\Longrightarrow$ espace non-euclidien pour un **observateur accéléré** ? (si $\omega \neq 0$)

- **Paradoxe d'Ehrenfest** : disque en **rotation**
  $\Longrightarrow$ contraction dans direction du mouvement, mais pas rayon
  $\Longrightarrow$ **circonférence** $< 2\,\pi \times$ **rayon**
  $\Longrightarrow$ géométrie **euclidienne** incorrecte ?



- **Coordonnées de Born** :

$$ds^2 = -c^2dt^2 + d\ell^2 = -c^2dt^2 + dr^2 + r^2\,d\theta^2 + dz^2$$

$$\Longrightarrow \quad ds^2 = -(c^2 - R^2\omega^2)\,dT^2 + 2\,R^2\,\omega\,dT\,d\Theta + dR^2 + R^2\,d\Theta^2 + dZ^2$$

avec $T = t\,,\ R = r\,,\ \Theta = \theta - \omega\,t\,,\ Z = z$ (coordonnées en rotation)

- **Langevin** : pour $R\omega < c$, on peut écrire

$$ds^2 = -c^2d\tau^2 + dL^2 \text{ avec } \boxed{dL^2 = dR^2 + \frac{R^2\,d\Theta^2}{1 - R^2\,\omega^2/c^2} + dZ^2}$$

$\Longrightarrow$ espace non-euclidien pour un **observateur accéléré** ? (si $\omega \neq 0$)
(en fait problème très subtil !)

III

Notions sur les espaces riemanniens ($\simeq$ courbes)

Variété riemannienne (définition du physicien)

ensemble de points P (= espace) qui

- ressemble **localement** à $\mathbb{R}^d$ ($d =$ dimension)

  $\Longrightarrow$ $\exists$ localement cartes (= systèmes de coordonnées) telles que

  $$P \leftrightarrow \left(x^1, x^2, \ldots, x^d\right) \leftrightarrow \boldsymbol{x^i} \text{ avec } i \in (1, \ldots, d)$$

  $\Longrightarrow$ grande utilité de la **notation indicielle**

- est muni de notions **locales** de distance et d'angle

  $\Longrightarrow$ informations décrites par la **métrique**

  (plus correctement : « champ tensoriel métrique »)

- *contre-exemple* :
  espace des phases : $P \leftrightarrow$ coordonnées (x, y, p_x, p_y), mais pas de **distance**

  $\Longrightarrow$ autre type de variété (« symplectique »)

Variété riemannienne (définition du physicien)

ensemble de points P (= **espace**) qui

- ressemble **localement** à $\mathbb{R}^d$ (d = dimension)

  $\Longrightarrow$ $\exists$ localement cartes (= systèmes de coordonnées) telles que

$$P \leftrightarrow (x^1, x^2, \ldots, x^d) \leftrightarrow \boldsymbol{x^i} \text{ avec } i \in (1, \ldots, d)$$

  $\Longrightarrow$ grande utilité de la **notation indicielle**

- est muni de notions **locales** de distance et d'angle

  $\Longrightarrow$ informations décrites par la **métrique**

  (plus correctement : « champ tensoriel métrique »)

- *contre-exemple* :

  espace des phases : $P \leftrightarrow$ coordonnées (x, y, p_x, p_y), mais pas de **distance**

  $\Longrightarrow$ autre type de variété (« symplectique »)

Variété riemannienne (définition du physicien)

ensemble de points P (= **espace**) qui

- ressemble **localement** à $\mathbb{R}^d$ (d = dimension)

  $\Longrightarrow$ $\exists$ localement cartes (= systèmes de coordonnées) telles que

$$P \leftrightarrow (x^1, x^2, \ldots, x^d) \leftrightarrow \boldsymbol{x^i} \text{ avec } i \in (1, \ldots, d)$$

  $\Longrightarrow$ grande utilité de la **notation indicielle**

- est muni de notions **locales** de distance et d'angle

  $\Longrightarrow$ informations décrites par la **métrique**

  (plus correctement : « champ tensoriel métrique »)

- *contre-exemple* :
  espace des phases : $P \leftrightarrow$ coordonnées (x, y, p_x, p_y), mais pas de **distance**

  $\Longrightarrow$ autre type de variété (« symplectique »)

Variété riemannienne (définition du physicien)

ensemble de points P (= **espace**) qui

- ressemble **localement** à $\mathbb{R}^d$ (d = dimension)

  $\Longrightarrow$ $\exists$ localement cartes (= systèmes de coordonnées) telles que

$$P \leftrightarrow (x^1, x^2, \ldots, x^d) \leftrightarrow \boldsymbol{x^i} \text{ avec } i \in (1, \ldots, d)$$

  $\Longrightarrow$ grande utilité de la **notation indicielle**
- est muni de notions **locales** de distance et d'angle

  $\Longrightarrow$ informations décrites par la **métrique**

  (plus correctement : « champ tensoriel métrique »)
- *contre-exemple* :

  espace des phases : $P \leftrightarrow$ coordonnées (x, y, p_x, p_y), mais pas de **distance**

  $\Longrightarrow$ autre type de variété (« symplectique »)

Variété riemannienne (définition du physicien)

ensemble de points P **(= espace)** qui

- ressemble **localement** à $\mathbb{R}^d$ (d = dimension)

  $\Longrightarrow$ $\exists$ localement cartes (= systèmes de coordonnées) telles que

$$P \leftrightarrow (x^1, x^2, \ldots, x^d) \leftrightarrow \boldsymbol{x^i} \text{ avec } i \in (1, \ldots, d)$$

  $\Longrightarrow$ grande utilité de la **notation indicielle**

- est muni de notions **locales** de distance et d'angle

  $\Longrightarrow$ informations décrites par la **métrique**

  (plus correctement : « champ tensoriel métrique »)

- *contre-exemple* :
  espace des phases : $P \leftrightarrow$ coordonnées (x, y, p_x, p_y), mais pas de **distance**

  $\Longrightarrow$ autre type de variété (« symplectique »)

Variété riemannienne (définition du physicien)

ensemble de points P **(= espace)** qui

- ressemble **localement** à $\mathbb{R}^d$ (d = dimension)

  $\Longrightarrow$ $\exists$ localement cartes (= systèmes de coordonnées) telles que

$$P \leftrightarrow (x^1, x^2, \ldots, x^d) \leftrightarrow \boldsymbol{x^i} \text{ avec } i \in (1, \ldots, d)$$

  $\Longrightarrow$ grande utilité de la **notation indicielle**

- est muni de notions **locales** de distance et d'angle

  $\Longrightarrow$ informations décrites par la **métrique**

  (plus correctement : « champ tensoriel métrique »)

- *contre-exemple* :
  espace des phases : $P \leftrightarrow$ coordonnées (x, y, p_x, p_y), mais pas de **distance**

  $\Longrightarrow$ autre type de variété (« symplectique »)

Variété riemannienne (définition du physicien)

ensemble de points P **(= espace)** qui

- ressemble **localement** à $\mathbb{R}^d$ (d = dimension)

  $\Longrightarrow$ $\exists$ localement cartes (= systèmes de coordonnées) telles que

  $$P \leftrightarrow (x^1, x^2, \ldots, x^d) \leftrightarrow \boldsymbol{x^i} \text{ avec } i \in (1, \ldots, d)$$

  $\Longrightarrow$ grande utilité de la **notation indicielle**
- est muni de notions **locales** de distance et d'angle

  $\Longrightarrow$ informations décrites par la **métrique**

  (plus correctement : « champ tensoriel métrique »)
- *contre-exemple* :
  espace des phases : $P \leftrightarrow$ coordonnées (x, y, p_x, p_y), mais pas de **distance**

  $\Longrightarrow$ autre type de variété (« symplectique »)

Variété riemannienne (définition du physicien)

ensemble de points P **(= espace)** qui

- ressemble **localement** à $\mathbb{R}^d$ (d = dimension)

  $\Longrightarrow$ $\exists$ localement cartes (= systèmes de coordonnées) telles que

$$P \leftrightarrow (x^1, x^2, \ldots, x^d) \leftrightarrow \boldsymbol{x^i} \text{ avec } i \in (1, \ldots, d)$$

  $\Longrightarrow$ grande utilité de la **notation indicielle**

- est muni de notions **locales** de distance et d'angle

  $\Longrightarrow$ informations décrites par la **métrique**

  (plus correctement : « champ tensoriel métrique »)

- *contre-exemple* :
  espace des phases : $P \leftrightarrow$ coordonnées (x, y, p_x, p_y), mais pas de **distance**

  $\Longrightarrow$ autre type de variété (« symplectique »)

Variété riemannienne : exemple du plan ($d = 2$)

- **distance** infinitésimale ds^2 avec

$$ds^2 \;=\; dx^2 \;+\; dy^2$$

- on a aussi (coordonnées polaires)

$$ds^2 \;=\; dr^2 + r^2\, d\theta^2 \;=\; (dr, r\, d\theta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ r\, d\theta \end{pmatrix}$$

- soit plus généralement, si l'on pose $(x^1 = x,\, x^2 = y)$ et $(x^{1'} = r,\, x^{2'} = \theta)$,

$$ds^2 \;=\; \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} g_{ij}\, dx^i\, dx^j \;=\; \sum_{i'=1'}^{2'} \sum_{j'=1'}^{2'} g_{i'j'}\, dx^{i'}\, dx^{j'} \quad \text{(cf. produit matriciel)}$$

Variété riemannienne : exemple du plan ($d = 2$)

- **distance** infinitésimale ds^2 avec

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r}$$

$\implies$ **angle** défini par **produit scalaire**

- on a aussi (coordonnées polaires)

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 = (dr, r\, d\theta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ r\, d\theta \end{pmatrix}$$

- soit plus généralement, si l'on pose $(x^1 = x,\, x^2 = y)$ et $(x^{1'} = r,\, x^{2'} = \theta)$,

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} g_{ij}\, dx^i\, dx^j = \sum_{i'=1'}^{2'} \sum_{j'=1'}^{2'} g_{i'j'}\, dx^{i'}\, dx^{j'} \quad \text{(cf. produit matriciel)}$$

Variété riemannienne : exemple du plan ($d = 2$)

- **distance** infinitésimale ds^2 avec

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (dx, dy) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ **angle** défini par **produit scalaire** décrit par **métrique** (symétrique)

- on a aussi (coordonnées polaires)

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 = (dr, r\, d\theta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ r\, d\theta \end{pmatrix}$$

- soit plus généralement, si l'on pose $(x^1 = x,\, x^2 = y)$ et $(x^{1'} = r,\, x^{2'} = \theta)$,

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} g_{ij}\, dx^i\, dx^j = \sum_{i'=1'}^{2'} \sum_{j'=1'}^{2'} g_{i'j'}\, dx^{i'}\, dx^{j'} \quad \text{(cf. produit matriciel)}$$

Variété riemannienne : exemple du plan ($d = 2$)

- **distance** infinitésimale ds^2 avec

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (dx, dy) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ **angle** défini par **produit scalaire** décrit par **métrique** (symétrique)

- on a aussi (coordonnées polaires)

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 = (dr, r\, d\theta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ r\, d\theta \end{pmatrix}$$

- soit plus généralement, si l'on pose ($x^1 = x,\ x^2 = y$) et ($x^{1'} = r,\ x^{2'} = \theta$),

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} g_{ij}\, dx^i\, dx^j = \sum_{i'=1'}^{2'} \sum_{j'=1'}^{2'} g_{i'j'}\, dx^{i'}\, dx^{j'} \quad \text{(cf. produit matriciel)}$$

Variété riemannienne : exemple du plan ($d = 2$)

- **distance** infinitésimale ds^2 avec

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (dx, dy) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ **angle** défini par **produit scalaire** décrit par **métrique** (symétrique)

- on a aussi (coordonnées polaires)

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 = (dr, r\, d\theta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ r\, d\theta \end{pmatrix} = (dr, d\theta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix}$$

- soit plus généralement, si l'on pose $(x^1 = x,\, x^2 = y)$ et $(x^{1'} = r,\, x^{2'} = \theta)$,

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} g_{ij}\, dx^i\, dx^j = \sum_{i'=1'}^{2'} \sum_{j'=1'}^{2'} g_{i'j'}\, dx^{i'}\, dx^{j'} \quad \text{(cf. produit matriciel)}$$

Variété riemannienne : exemple du plan ($d = 2$)

- **distance** infinitésimale ds^2 avec

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (dx, dy) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ **angle** défini par **produit scalaire** décrit par **métrique** (symétrique)

- on a aussi (coordonnées polaires)

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 = (dr, r\, d\theta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ r\, d\theta \end{pmatrix} = (dr, d\theta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix}$$

- soit plus généralement, si l'on pose ($x^1 = x,\ x^2 = y$) et ($x^{1'} = r,\ x^{2'} = \theta$),

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} g_{ij}\, dx^i\, dx^j = \sum_{i'=1'}^{2'} \sum_{j'=1'}^{2'} g_{i'j'}\, dx^{i'}\, dx^{j'} \text{ (cf. produit matriciel)}$$

Variété riemannienne : exemple du plan ($d = 2$)

- **distance** infinitésimale ds^2 avec

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (dx, dy) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ **angle** défini par **produit scalaire** décrit par **métrique** (symétrique)

- on a aussi (coordonnées polaires)

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 = (dr, r\, d\theta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ r\, d\theta \end{pmatrix} = (dr, d\theta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix}$$

- soit plus généralement, si l'on pose $(x^1 = x,\, x^2 = y)$ et $(x^{1'} = r,\, x^{2'} = \theta)$,

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} g_{ij}\, dx^i\, dx^j = \sum_{i'=1'}^{2'} \sum_{j'=1'}^{2'} g_{i'j'}\, dx^{i'}\, dx^{j'} \quad \text{(cf. produit matriciel)}$$

$\Longrightarrow$ métrique $\boldsymbol{g} \equiv$ coefficients g_{ij} qui dépendent du système de coordonnées

Variété riemannienne de dimension d :

- distance infinitésimale ds^2 :
- valeur **positive** indépendante du système de coordonnées ($\Longrightarrow$ grandeur scalaire)
- décrite par une métrique g (**matrice symétrique**) avec, en coordonnées x^i,

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} g_{ij}\, dx^i\, dx^j = \begin{pmatrix} dx^1 & \cdots & dx^d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1d} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{d1} & g_{d2} & \cdots & g_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^d \end{pmatrix}$$

où g_{ij} = **fonctions** des coordonnées x^i, avec $i \in (1, \ldots, d)$

- Convention d'Einstein : **sommation** sous-entendue si **indice répété deux fois à des altitudes différentes** (jamais plus de 2 occurences d'un indice)

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} g_{ij}\, dx^i\, dx^j \Longrightarrow \boxed{ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j}$$

Variété riemannienne de dimension d :

- distance infinitésimale ds^2 :
- valeur **positive** indépendante du système de coordonnées ($\Longrightarrow$ grandeur scalaire)
- décrite par une métrique g (**matrice symétrique**) avec, en coordonnées x^i,

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} g_{ij}\, dx^i\, dx^j = \begin{pmatrix} dx^1 & \cdots & dx^d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1d} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{d1} & g_{d2} & \cdots & g_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^d \end{pmatrix}$$

où g_{ij} = **fonctions** des coordonnées x^i, avec $i \in (1, \ldots, d)$

- Convention d'Einstein : **sommation** sous-entendue si **indice répété deux fois à des altitudes différentes** (jamais plus de 2 occurences d'un indice)

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} g_{ij}\, dx^i\, dx^j \Longrightarrow \boxed{ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j}$$

Variété riemannienne de dimension d :

- distance infinitésimale ds^2 :
  - valeur **positive** indépendante du système de coordonnées ($\Longrightarrow$ grandeur scalaire)
  - décrite par une métrique $\boldsymbol{g}$ (**matrice symétrique**) avec, en coordonnées x^i,

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{\boldsymbol{d}} \sum_{j=1}^{\boldsymbol{d}} g_{ij}\, dx^i\, dx^j = \left(dx^1 \;\cdots\; dx^d\right) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1d} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{d1} & g_{d2} & \cdots & g_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^d \end{pmatrix}$$

  où g_{ij} = **fonctions** des coordonnées x^i, avec $i \in (1, \ldots, d)$

- Convention d'Einstein : **sommation** sous-entendue si **indice répété deux fois à des altitudes différentes** (jamais plus de 2 occurences d'un indice)

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} g_{ij}\, dx^i\, dx^j \Longrightarrow \boxed{ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j}$$

Variété riemannienne de dimension d :

- distance infinitésimale ds^2 :
  - valeur **positive** indépendante du système de coordonnées ($\Longrightarrow$ grandeur scalaire)
  - décrite par une métrique $\boldsymbol{g}$ (**matrice symétrique**) avec, en coordonnées x^i,

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{\boldsymbol{d}} \sum_{j=1}^{\boldsymbol{d}} g_{ij}\, dx^i\, dx^j = \begin{pmatrix} dx^1 & \cdots & dx^d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1d} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{d1} & g_{d2} & \cdots & g_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^d \end{pmatrix}$$

  où g_{ij} = **fonctions** des coordonnées x^i, avec $i \in (1, \ldots, d)$

- Convention d'Einstein : **sommation** sous-entendue si **indice répété deux fois à des altitudes différentes** (jamais plus de 2 occurences d'un indice)

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} g_{ij}\, dx^i\, dx^j \Longrightarrow \boxed{ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j}$$

Variété riemannienne (exemples simples avec $d = 2$)

- **cylindre de rayon** R en coordonnées (θ, z) :

$$ds^2 = R^2\, d\theta^2 + dz^2 \implies g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **sphère de rayon** R en coordonnées (θ, ϕ) :

$$ds^2 = R^2\, d\theta^2 + R^2 \sin^2\theta\, d\phi^2 \implies g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

- **remarques** :

- cylindre : $X = R\,\theta$ (où R = constante) et $Y = z$

$$\implies ds^2 = dX^2 + dY^2$$

- courbure extrinsèque quand on le plonge dans $\mathbb{R}^3$ (cf. figures plus loin)

Variété riemannienne (exemples simples avec $d = 2$)

- **cylindre de rayon** R en coordonnées (θ, z) :

$$ds^2 = R^2\, d\theta^2 + dz^2 \implies g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **sphère de rayon** R en coordonnées (θ, ϕ) :

$$ds^2 = R^2\, d\theta^2 + R^2 \sin^2\theta\, d\phi^2 \implies g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

- **remarques** :
  - cylindre : $X = R\,\theta$ (où R = constante) et $Y = z$

$$\implies ds^2 = dX^2 + dY^2$$

  - courbure extrinsèque quand on le plonge dans $\mathbb{R}^3$ (cf. figures plus loin)

Variété riemannienne (exemples simples avec $d = 2$)

- **cylindre de rayon** R en coordonnées (θ, z) :

$$ds^2 = R^2\, d\theta^2 + dz^2 \implies g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **sphère de rayon** R en coordonnées (θ, ϕ) :

$$ds^2 = R^2\, d\theta^2 + R^2 \sin^2\theta\, d\phi^2 \implies g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

- **remarques** :
  - cylindre : $X = R\,\theta$ (où R = constante) et $Y = z$

$$\implies ds^2 = dX^2 + dY^2$$

  - courbure extrinsèque quand on le plonge dans $\mathbb{R}^3$ (cf. figures plus loin)

Variété riemannienne (exemples simples avec $d = 2$)

- **cylindre de rayon** R en coordonnées (θ, z) :

$$ds^2 = R^2\, d\theta^2 + dz^2 \implies g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **sphère de rayon** R en coordonnées (θ, ϕ) :

$$ds^2 = R^2\, d\theta^2 + R^2 \sin^2\theta\, d\phi^2 \implies g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

- **remarques** :

- cylindre : $X = R\,\theta$ (où $R =$ constante) et $Y = z$

$$\implies ds^2 = dX^2 + dY^2$$

- courbure extrinsèque quand on le plonge dans $\mathbb{R}^3$ (cf. figures plus loin)

Variété riemannienne (exemples simples avec $d = 2$)

- **cylindre de rayon** R en coordonnées (θ, z) :

$$ds^2 = R^2 \, d\theta^2 + dz^2 \implies g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **sphère de rayon** R en coordonnées (θ, ϕ) :

$$ds^2 = R^2 \, d\theta^2 + R^2 \sin^2\theta \, d\phi^2 \implies g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

- **remarques** :

- cylindre : $X = R\,\theta$ (où R = constante) et $Y = z$

$$\implies ds^2 = dX^2 + dY^2 \implies \text{le cylindre est plat (euclidien)}$$

- courbure extrinsèque quand on le plonge dans $\mathbb{R}^3$ (cf. figures plus loin)

Variété riemannienne (exemples simples avec $d = 2$)

- **cylindre de rayon** R en coordonnées (θ, z) :

$$ds^2 = R^2\,d\theta^2 + dz^2 \implies g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **sphère de rayon** R en coordonnées (θ, ϕ) :

$$ds^2 = R^2\,d\theta^2 + R^2\sin^2\theta\,d\phi^2 \implies g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

- **remarques** :

• cylindre : $X = R\,\theta$ (où $R =$ constante) et $Y = z$

$$\implies ds^2 = dX^2 + dY^2 \implies \text{le cylindre est plat (euclidien)}$$

• courbure extrinsèque quand on le plonge dans $\mathbb{R}^3$ (cf. figures plus loin)

Variété riemannienne (sphère $d = 2$)

$$ds^2 = R^2\, d\theta^2 + R^2 \sin^2\theta\, d\phi^2 \implies g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

- **Propriété** : $\nexists$ de système de coordonnées dans lequel $g =$ identité

  $\implies$ sphère $\neq$ euclidienne (ou plate), mais courbe
- Cependant :

$$\theta' = \theta - \theta_0 \text{ avec } \theta' \ll 1 \implies ds^2 \simeq R^2 \left(d\theta'^2 + \sin^2\theta_0\, d\phi^2 \right)$$

$\implies$ la sphère est **intrinsèquement courbe**, mais **localement plate** (comme toute variété riemannienne)

Variété riemannienne (sphère $d = 2$)

$$ds^2 = R^2\, d\theta^2 + R^2 \sin^2\theta\, d\phi^2 \implies g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

- **Propriété** : $\nexists$ de système de coordonnées dans lequel g = identité

$\implies$ sphère $\neq$ euclidienne (ou plate), mais courbe

- Cependant :

$$\theta' = \theta - \theta_0 \text{ avec } \theta' \ll 1 \implies ds^2 \simeq R^2 \left(d\theta'^2 + \sin^2\theta_0\, d\phi^2 \right)$$

$\implies$ la sphère est **intrinsèquement courbe**, mais **localement plate** (comme toute variété riemannienne)

Variété riemannienne (sphère $d = 2$)

$$ds^2 = R^2\, d\theta^2 + R^2 \sin^2\theta\, d\phi^2 \implies g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

- **Propriété** : $\nexists$ de système de coordonnées dans lequel $\boldsymbol{g}$ = identité

  $\implies$ sphère $\neq$ euclidienne (ou plate), mais courbe
- Cependant :

$$\theta' = \theta - \theta_0 \text{ avec } \theta' \ll 1 \implies ds^2 \simeq R^2 \left(d\theta'^2 + \sin^2\theta_0\, d\phi^2\right)$$

$\implies$ la sphère est **intrinsèquement courbe**, mais **localement plate** (comme toute variété riemannienne)

Variété riemannienne (sphère $d = 2$)

$$ds^2 = R^2\, d\theta^2 + R^2 \sin^2\theta\, d\phi^2 \implies g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

- **Propriété** : $\nexists$ de système de coordonnées dans lequel $\boldsymbol{g} = \text{identité}$
  $\implies$ sphère $\neq$ euclidienne (ou plate), mais courbe
- Cependant :

$$\theta' = \theta - \theta_0 \text{ avec } \theta' \ll 1 \implies ds^2 \simeq R^2 \left(d\theta'^2 + \sin^2\theta_0\, d\phi^2 \right)$$

$\implies$ la sphère est **intrinsèquement courbe**, mais **localement plate** (comme toute variété riemannienne)

Variété riemannienne (sphère $d = 2$)

$$ds^2 = R^2\, d\theta^2 + R^2 \sin^2\theta\, d\phi^2 \implies g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

- **Propriété** : $\nexists$ de système de coordonnées dans lequel $\boldsymbol{g} =$ identité
  $\implies$ sphère $\neq$ euclidienne (ou plate), mais courbe
- Cependant :

$$\theta' = \theta - \theta_0 \text{ avec } \theta' \ll 1 \implies ds^2 \simeq R^2 \left(d\theta'^2 + \sin^2\theta_0\, d\phi^2\right)$$
$$\implies ds^2 = dX^2 + dY^2$$

avec $X = R\,(\theta - \theta_0)$ et $Y = R \sin\theta_0\, \phi$

$\implies$ la sphère est **intrinsèquement courbe**, mais **localement plate** (comme toute variété riemannienne)

Variété riemannienne (sphère $d = 2$)

$$ds^2 = R^2\, d\theta^2 + R^2 \sin^2\theta\, d\phi^2 \implies g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

- **Propriété** : $\nexists$ de système de coordonnées dans lequel $\boldsymbol{g} = $ identité

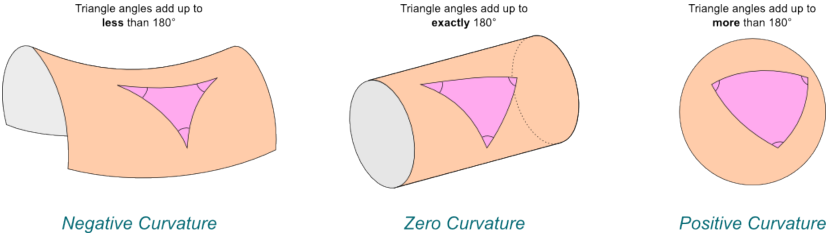
  $\implies$ sphère $\neq$ euclidienne (ou plate), mais courbe
- Cependant :

$$\theta' = \theta - \theta_0 \text{ avec } \theta' \ll 1 \implies ds^2 \simeq R^2 \left(d\theta'^2 + \sin^2\theta_0\, d\phi^2 \right)$$
$$\implies ds^2 = dX^2 + dY^2$$

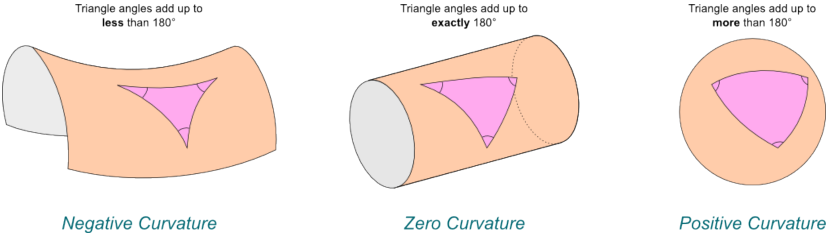
avec $X = R\,(\theta - \theta_0)$ et $Y = R \sin\theta_0\, \phi$

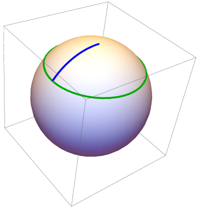
$\implies$ la sphère est **intrinsèquement courbe**, mais **localement plate** (comme toute variété riemannienne)

Manifestations de la courbure (1/2)



Manifestations de la courbure (1/2)

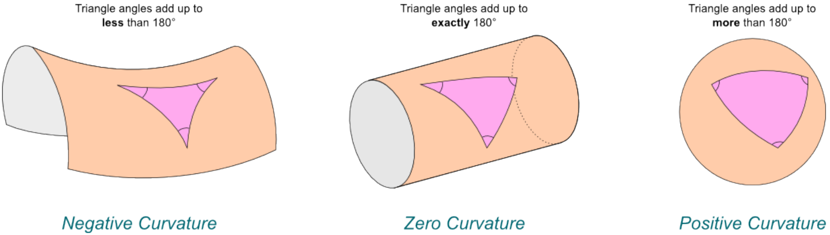


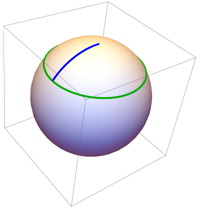


cercle sur une surface (intrinsèquement) courbe :

circonférence $\neq$ 2π rayon

Manifestations de la courbure (1/2)

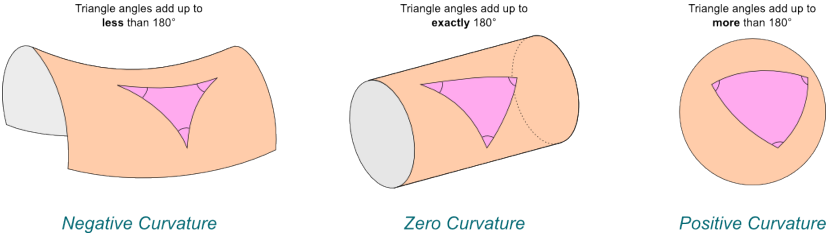


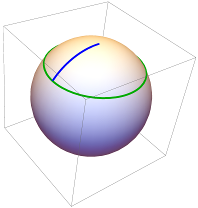


cercle sur une surface (intrinsèquement) courbe :
circonférence $\neq \; 2\,\pi$ rayon

ici : rayon $>$ circonférence$/(2\pi)$ car courbure positive

Manifestations de la courbure (1/2)





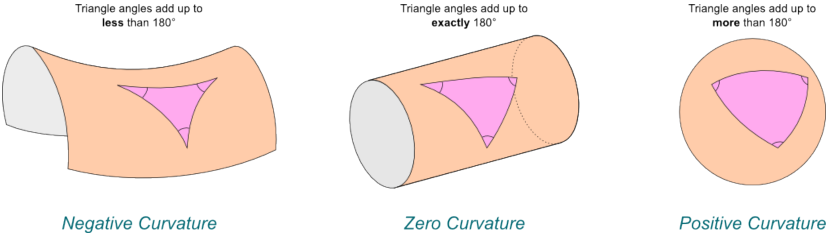
cercle sur une surface (intrinsèquement) courbe :
circonférence $\neq\ 2\,\pi$ rayon

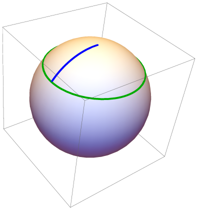
ici : rayon $>$ circonférence$/(2\pi)$ car courbure positive

En effet, $ds^2 \;=\; R^2\,d\theta^2 \;+\; R^2\,\sin^2\theta\,d\phi^2$

$$\Longrightarrow \quad \text{circonférence} \;=\; \int_0^{2\pi} R\,\sin\theta_0\,d\phi$$

Manifestations de la courbure (1/2)





cercle sur une surface (intrinsèquement) courbe :

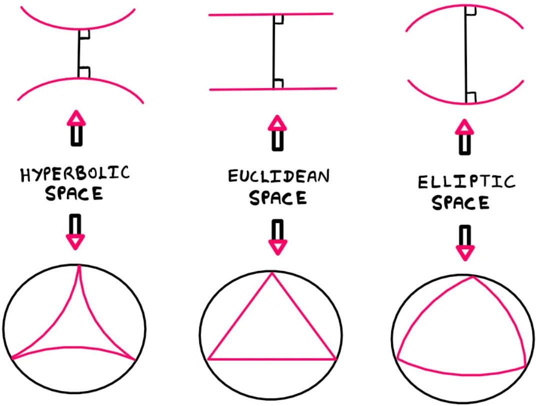
circonférence $\neq\ 2\,\pi$ rayon

ici : rayon $>$ circonférence$/(2\pi)$ car courbure positive

En effet, $ds^2 \;=\; R^2\,d\theta^2 \;+\; R^2\,\sin^2\theta\,d\phi^2$

$$\Longrightarrow \text{ circonférence } = \int_0^{2\pi} R\,\sin\theta_0\,d\phi \quad \text{et rayon } = \int_0^{\theta_0} R\,d\theta$$

Manifestations de la courbure (2/2)



$\Longrightarrow$ « **déviation** des géodésiques » ($\simeq$ lignes droites)
(lien avec $5^{\text{ème}}$ postulat d'Euclide)

Métrique et courbure :

- cas 1) g constante $\Longrightarrow$ espace euclidien (plat)

  remarque : situation d'un espace affine associé à un espace vectoriel qui lui est « identique » avec $P \Longrightarrow \overrightarrow{OP}$

- cas 2) g pas constante

- sous-cas a) $\exists$ un changement de coordonnées permettant g = identité

  $\Longrightarrow$ espace euclidien en **coordonnées non-cartésiennes (curvilignes)**

- sous-cas b) $\nexists$ un changement de coordonnées permettant g = identité

  $\Longrightarrow$ espace non-euclidien (courbe)

remarque : **localement** $\exists$ toujours coordonnées telles que $g \simeq$ identité

$\Longrightarrow$ $\exists$ espace euclidien tangent (cf. plan tangent à une surface)

Métrique et courbure :

- cas 1) g constante $\Longrightarrow$ espace euclidien (plat)

  remarque : situation d'un espace affine associé à un espace vectoriel qui lui est « identique » avec $P \Longrightarrow \overrightarrow{OP}$

- cas 2) g pas constante

- sous-cas a) $\exists$ un changement de coordonnées permettant g = identité

  $\Longrightarrow$ espace euclidien en **coordonnées non-cartésiennes (curvilignes)**

- sous-cas b) $\nexists$ un changement de coordonnées permettant g = identité

  $\Longrightarrow$ espace non-euclidien (courbe)

remarque : **localement** $\exists$ toujours coordonnées telles que $g \simeq$ identité

$\Longrightarrow$ $\exists$ espace euclidien tangent (cf. plan tangent à une surface)

Métrique et courbure :

- cas 1) g constante $\Longrightarrow$ espace euclidien (plat)

  remarque : situation d'un espace affine associé à un espace vectoriel qui lui est « identique » avec $P \Longrightarrow \overrightarrow{OP}$
- cas 2) g pas constante
  - sous-cas a) $\exists$ un changement de coordonnées permettant g = identité
    $\Longrightarrow$ espace euclidien en **coordonnées non-cartésiennes (curvilignes)**
  - sous-cas b) $\nexists$ un changement de coordonnées permettant g = identité
    $\Longrightarrow$ espace non-euclidien (courbe)

  remarque : **localement** $\exists$ toujours coordonnées telles que $g \simeq$ identité
  $\Longrightarrow$ $\exists$ espace euclidien tangent (cf. plan tangent à une surface)

Métrique et courbure :

- cas 1) g constante $\implies$ espace euclidien (plat)

  remarque : situation d'un espace affine associé à un espace vectoriel qui lui est « identique » avec $P \implies \overrightarrow{OP}$

- cas 2) g pas constante

- sous-cas a) $\exists$ un changement de coordonnées permettant g = identité

  $\implies$ espace euclidien en **coordonnées non-cartésiennes (curvilignes)**

- sous-cas b) $\nexists$ un changement de coordonnées permettant g = identité

  $\implies$ espace non-euclidien (courbe)

remarque : **localement** $\exists$ toujours coordonnées telles que $g \simeq$ identité

$\implies$ $\exists$ espace euclidien tangent (cf. plan tangent à une surface)

Métrique et courbure :

- cas 1) g constante $\implies$ espace euclidien (plat)

  remarque : situation d'un espace affine associé à un espace vectoriel qui lui est « identique » avec $P \implies \overrightarrow{OP}$
- cas 2) g pas constante

- sous-cas a) $\exists$ un changement de coordonnées permettant g $=$ identité

  $\implies$ espace euclidien en **coordonnées non-cartésiennes (curvilignes)**
- sous-cas b) $\nexists$ un changement de coordonnées permettant g $=$ identité

  $\implies$ espace non-euclidien (courbe)

remarque : **localement** $\exists$ toujours coordonnées telles que $g \simeq$ identité

$\implies$ $\exists$ espace euclidien tangent (cf. plan tangent à une surface)

Métrique et courbure :

- cas 1) g constante $\Longrightarrow$ espace euclidien (plat)

  remarque : situation d'un espace affine associé à un espace vectoriel qui lui est « identique » avec $P \Longrightarrow \overrightarrow{OP}$

- cas 2) g pas constante

- sous-cas a) $\exists$ un changement de coordonnées permettant g = identité

  $\Longrightarrow$ espace euclidien en **coordonnées non-cartésiennes (curvilignes)**

- sous-cas b) $\nexists$ un changement de coordonnées permettant g = identité

  $\Longrightarrow$ espace non-euclidien (courbe)

  remarque : **localement** $\exists$ toujours coordonnées telles que $g \simeq$ identité

  $\Longrightarrow$ $\exists$ espace euclidien tangent (cf. plan tangent à une surface)

Métrique et courbure :

- cas 1) g constante $\implies$ espace euclidien (plat)

  remarque : situation d'un espace affine associé à un espace vectoriel qui lui est « identique » avec $P \implies \overrightarrow{OP}$

- cas 2) g pas constante

- sous-cas a) $\exists$ un changement de coordonnées permettant g $=$ identité

  $\implies$ espace euclidien en **coordonnées non-cartésiennes (curvilignes)**

- sous-cas b) $\nexists$ un changement de coordonnées permettant g $=$ identité

  $\implies$ espace non-euclidien (courbe)

remarque : **localement** $\exists$ toujours coordonnées telles que g $\simeq$ identité

$\implies$ $\exists$ espace euclidien tangent (cf. plan tangent à une surface)

Métrique et courbure :

- cas 1) $\boldsymbol{g}$ constante $\implies$ espace euclidien (plat)

  remarque : situation d'un espace affine associé à un espace vectoriel qui lui est « identique » avec $P \implies \overrightarrow{OP}$

- cas 2) $\boldsymbol{g}$ pas constante

- sous-cas a) $\exists$ un changement de coordonnées permettant $\boldsymbol{g} =$ identité

  $\implies$ espace euclidien en **coordonnées non-cartésiennes (curvilignes)**

- sous-cas b) $\nexists$ un changement de coordonnées permettant $\boldsymbol{g} =$ identité

  $\implies$ espace non-euclidien (courbe)

remarque : **localement** $\exists$ toujours coordonnées telles que $\boldsymbol{g} \simeq$ identité

$\implies$ $\exists$ espace euclidien tangent (cf. plan tangent à une surface)

Métrique et courbure :

- cas 1) g constante $\Longrightarrow$ espace euclidien (plat)

  remarque : situation d'un espace affine associé à un espace vectoriel qui lui est « identique » avec $P \Longrightarrow \overrightarrow{OP}$
- cas 2) g pas constante

- sous-cas a) $\exists$ un changement de coordonnées permettant g = identité

  $\Longrightarrow$ espace euclidien en **coordonnées non-cartésiennes (curvilignes)**
- sous-cas b) $\nexists$ un changement de coordonnées permettant g = identité

  $\Longrightarrow$ espace non-euclidien (courbe)

remarque : **localement** $\exists$ toujours coordonnées telles que $g \simeq$ identité

$\Longrightarrow$ $\exists$ espace euclidien tangent (cf. plan tangent à une surface)

Moyens d'identifier et de mesurer la courbure ?

- tenseur de Riemann :
  $\simeq$ matrice $d \times d$ dont les éléments sont des matrice $d \times d$
  $\Longrightarrow$ objet à **4 indices** : ${R^{ij}}_{k\ell}$ (tenseur d'ordre 4)
- **Propriétés** :

- éléments = combinaisons non-linéaires de **dérivées partielles des** g_{ij} (d'ordres 1 et 2) par rapport aux x^k
- ${R^{ij}}_{k\ell} = 0$ **ssi** espace plat (vrai $\forall$ système de coordonnées **car tenseur**)
- « accélération relative » de deux géodésiques proportionnelle à ${R^{ij}}_{k\ell}$
- ${R^{ij}}_{k\ell} \simeq$ terme du 2ème ordre dans le développement de Taylor de g_{ij}

Moyens d'identifier et de mesurer la courbure ?

- tenseur de Riemann :
  $\simeq$ matrice $d \times d$ dont les éléments sont des matrice $d \times d$

  $\Longrightarrow$ objet à **4 indices** : ${R^{ij}}_{k\ell}$ (tenseur d'ordre 4)
- **Propriétés** :

- éléments = combinaisons non-linéaires de **dérivées partielles des** g_{ij} (d'ordres 1 et 2) par rapport aux x^k
- ${R^{ij}}_{k\ell} = 0$ **ssi** espace plat (vrai $\forall$ système de coordonnées **car tenseur**)
- « accélération relative » de deux géodésiques proportionnelle à ${R^{ij}}_{k\ell}$
- ${R^{ij}}_{k\ell} \simeq$ terme du 2ème ordre dans le développement de Taylor de g_{ij}

Moyens d'identifier et de mesurer la courbure ?

- tenseur de Riemann :
  $\simeq$ matrice $d \times d$ dont les éléments sont des matrice $d \times d$
  $\Longrightarrow$ objet à **4 indices** : ${R^{ij}}_{k\ell}$ (tenseur d'ordre 4)
- **Propriétés** :
  - éléments $=$ combinaisons non-linéaires de **dérivées partielles des** g_{ij} (d'ordres 1 et 2) par rapport aux x^k
  - ${R^{ij}}_{k\ell} = 0$ **ssi** espace plat (vrai $\forall$ système de coordonnées **car tenseur**)
  - « accélération relative » de deux géodésiques proportionnelle à ${R^{ij}}_{k\ell}$
  - ${R^{ij}}_{k\ell} \simeq$ terme du 2ème ordre dans le développement de Taylor de g_{ij}

Moyens d'identifier et de mesurer la courbure ?

- tenseur de Riemann :
  $\simeq$ matrice $d \times d$ dont les éléments sont des matrice $d \times d$
  $\Longrightarrow$ objet à **4 indices** : ${R^{ij}}_{k\ell}$ (tenseur d'ordre 4)
- **Propriétés** :
  - éléments = combinaisons non-linéaires de **dérivées partielles des** g_{ij} (d'ordres 1 et 2) par rapport aux x^k
  - ${R^{ij}}_{k\ell} = 0$ **ssi** espace plat (vrai ∀ système de coordonnées **car tenseur**)
  - « accélération relative » de deux géodésiques proportionnelle à ${R^{ij}}_{k\ell}$
  - ${R^{ij}}_{k\ell} \simeq$ terme du 2ème ordre dans le développement de Taylor de g_{ij}

Moyens d'identifier et de mesurer la courbure ?

- tenseur de Riemann :
  $\simeq$ matrice $d \times d$ dont les éléments sont des matrice $d \times d$
  $\Longrightarrow$ objet à **4 indices** : $R^{ij}{}_{k\ell}$ (tenseur d'ordre 4)
- **Propriétés** :

- éléments = combinaisons non-linéaires de **dérivées partielles des** g_{ij} (d'ordres 1 et 2) par rapport aux x^k
- $R^{ij}{}_{k\ell} = 0$ **ssi** espace plat (vrai $\forall$ système de coordonnées **car tenseur**)
- « accélération relative » de deux géodésiques proportionnelle à $R^{ij}{}_{k\ell}$
- $R^{ij}{}_{k\ell} \simeq$ terme du 2ème ordre dans le développement de Taylor de g_{ij}

Moyens d'identifier et de mesurer la courbure ?

- tenseur de Riemann :
  $\simeq$ matrice $d \times d$ dont les éléments sont des matrice $d \times d$
  $\Longrightarrow$ objet à **4 indices** : ${R^{ij}}_{k\ell}$ (tenseur d'ordre 4)
- **Propriétés** :

- éléments $=$ combinaisons non-linéaires de **dérivées partielles des** g_{ij} (d'ordres 1 et 2) par rapport aux x^k
- ${R^{ij}}_{k\ell} = 0$ **ssi** espace plat (vrai $\forall$ système de coordonnées **car tenseur**)
- « accélération relative » de deux géodésiques proportionnelle à ${R^{ij}}_{k\ell}$
- ${R^{ij}}_{k\ell} \simeq$ terme du 2ème ordre dans le développement de Taylor de g_{ij}

Moyens d'identifier et de mesurer la courbure ?

- tenseur de Riemann :
  $\simeq$ matrice $d \times d$ dont les éléments sont des matrice $d \times d$
  $\implies$ objet à **4 indices** : $R^{ij}{}_{k\ell}$ (tenseur d'ordre 4)
- **Propriétés** :

- éléments $=$ combinaisons non-linéaires de **dérivées partielles des** g_{ij} (d'ordres 1 et 2) par rapport aux x^k
- $R^{ij}{}_{k\ell} = 0$ **ssi** espace plat (vrai $\forall$ système de coordonnées **car tenseur**)
- « accélération relative » de deux géodésiques proportionnelle à $R^{ij}{}_{k\ell}$
- $R^{ij}{}_{k\ell} \simeq$ terme du 2ème ordre dans le développement de Taylor de g_{ij}

Moyens d'identifier et de mesurer la courbure ?

- tenseur de Riemann :
  $\simeq$ matrice $d \times d$ dont les éléments sont des matrice $d \times d$
  $\implies$ objet à **4 indices** : $R^{ij}{}_{k\ell}$ (tenseur d'ordre 4)
- **Propriétés** :

- éléments $=$ combinaisons non-linéaires de **dérivées partielles des** g_{ij} (d'ordres 1 et 2) par rapport aux x^k
- $R^{ij}{}_{k\ell} = 0$ **ssi** espace plat (vrai $\forall$ système de coordonnées **car tenseur**)
- « accélération relative » de deux géodésiques proportionnelle à $R^{ij}{}_{k\ell}$
- $R^{ij}{}_{k\ell} \simeq$ terme du 2ème ordre dans le développement de Taylor de g_{ij}

Moyens d'identifier et de mesurer la courbure ?

- tenseur de Riemann :
  $\simeq$ matrice $d \times d$ dont les éléments sont des matrice $d \times d$
  $\Longrightarrow$ objet à **4 indices** : ${R^{ij}}_{k\ell}$ (tenseur d'ordre 4)
- **Propriétés** :

- éléments = combinaisons non-linéaires de **dérivées partielles des** g_{ij} (d'ordres 1 et 2) par rapport aux x^k
- ${R^{ij}}_{k\ell} = 0$ **ssi** espace plat (vrai $\forall$ système de coordonnées **car tenseur**)
- « accélération relative » de deux géodésiques proportionnelle à ${R^{ij}}_{k\ell}$
- ${R^{ij}}_{k\ell} \simeq$ terme du 2ème ordre dans le développement de Taylor de g_{ij}

remarque : **tenseur** $\simeq$ **objet mathématico-physique** décrit par des composantes (repérées par des indices) qui se mélangent linéairement entre elles de façons particulières lors d'un **changement de base**, de **coordonnées**, etc. (*exemples* : vecteurs, matrices, etc.)

Moyens d'identifier et de mesurer la courbure ?

- tenseur de Riemann :
  $\simeq$ matrice $d \times d$ dont les éléments sont des matrice $d \times d$
  $\Longrightarrow$ objet à **4 indices** : $R^{ij}{}_{k\ell}$ (tenseur d'ordre 4)
- **Propriétés** :

- éléments = combinaisons non-linéaires de **dérivées partielles des** g_{ij} (d'ordres 1 et 2) par rapport aux x^k
- $R^{ij}{}_{k\ell} = 0$ **ssi** espace plat (vrai $\forall$ système de coordonnées **car tenseur**)
- « accélération relative » de deux géodésiques proportionnelle à $R^{ij}{}_{k\ell}$
- $R^{ij}{}_{k\ell} \simeq$ terme du 2ème ordre dans le développement de Taylor de g_{ij}

remarque : **tenseur** $\simeq$ **objet mathématico-physique** décrit par des composantes (repérées par des indices) qui se mélangent linéairement entre elles de façons particulières lors d'un **changement de base**, de **coordonnées**, etc. (*exemples* : vecteurs, matrices, etc.)
$\Longrightarrow$ **divers types de tenseurs** selon les changements considérés. **Ici** : tenseurs généraux, avec changement de coordonnées quelconques.

Autres objets géométriques utiles :

- tenseur de Ricci :
  $\simeq$ matrice $d \times d$ dont les éléments sont obtenus en prenant les traces des éléments de ${R^{ij}}_{k\ell}$

  $\Longrightarrow$ objet à **2 indices** : R^{ij} (tenseur d'ordre 2)
- scalaire de Ricci :
  $\simeq$ nombre (fonction des x^i) obtenu en prenant la trace de R^{ij}

  $\Longrightarrow$ objet à **0 indice** : R (tenseur d'ordre 0 ou scalaire)

  $\Longrightarrow$ valeur **indépendante** des coordonnées utilisées pour le calcul

Autres objets géométriques utiles :

- tenseur de Ricci :
  $\simeq$ matrice $d \times d$ dont les éléments sont obtenus en prenant les traces des éléments de ${R^{ij}}_{k\ell}$
  $\Longrightarrow$ objet à **2 indices** : R^{ij} (tenseur d'ordre 2)
- scalaire de Ricci :
  $\simeq$ nombre (fonction des x^i) obtenu en prenant la trace de R^{ij}
  $\Longrightarrow$ objet à **0 indice** : R (tenseur d'ordre 0 ou scalaire)
  $\Longrightarrow$ valeur **indépendante** des coordonnées utilisées pour le calcul

Autres objets géométriques utiles :

- tenseur de Ricci :
  $\simeq$ matrice $d \times d$ dont les éléments sont obtenus en prenant les traces des éléments de ${R^{ij}}_{k\ell}$

  $\Longrightarrow$ objet à **2 indices** : R^{ij} (tenseur d'ordre 2)
- scalaire de Ricci :
  $\simeq$ nombre (fonction des x^i) obtenu en prenant la trace de R^{ij}

  $\Longrightarrow$ objet à **0 indice** : R (tenseur d'ordre 0 ou scalaire)

  $\Longrightarrow$ valeur **indépendante** des coordonnées utilisées pour le calcul

Autres objets géométriques utiles :

- tenseur de Ricci :
  $\simeq$ matrice $d \times d$ dont les éléments sont obtenus en prenant les traces des éléments de ${R^{ij}}_{k\ell}$

  $\Longrightarrow$ objet à **2 indices** : R^{ij} (tenseur d'ordre 2)
- scalaire de Ricci :
  $\simeq$ nombre (fonction des x^i) obtenu en prenant la trace de R^{ij}

  $\Longrightarrow$ objet à **0 indice** : R (tenseur d'ordre 0 ou scalaire)

  $\Longrightarrow$ valeur **indépendante** des coordonnées utilisées pour le calcul

Autres objets géométriques utiles :

- tenseur de Ricci :
  $\simeq$ matrice $d \times d$ dont les éléments sont obtenus en prenant les traces des éléments de ${R^{ij}}_{k\ell}$

  $\Longrightarrow$ objet à **2 indices** : R^{ij} (tenseur d'ordre 2)
- scalaire de Ricci :
  $\simeq$ nombre (fonction des x^i) obtenu en prenant la trace de R^{ij}

  $\Longrightarrow$ objet à **0 indice** : R (tenseur d'ordre 0 ou scalaire)

  $\Longrightarrow$ valeur **indépendante** des coordonnées utilisées pour le calcul

Autres objets géométriques utiles :

- tenseur de Ricci :
  $\simeq$ matrice $d \times d$ dont les éléments sont obtenus en prenant les traces des éléments de $R^{ij}{}_{k\ell}$
  $\Longrightarrow$ objet à **2 indices** : R^{ij} (tenseur d'ordre 2)
- scalaire de Ricci :
  $\simeq$ nombre (fonction des x^i) obtenu en prenant la trace de R^{ij}
  $\Longrightarrow$ objet à **0 indice** : R (tenseur d'ordre 0 ou scalaire)
  $\Longrightarrow$ valeur **indépendante** des coordonnées utilisées pour le calcul

remarque : équations qui relient des tenseurs sont **identiques** dans tous les systèmes de coordonnées (*exemples* : équations vectorielles, matricielles, etc.)

Attention : tous les objets à indices ne sont pas des tenseurs

Attention : tous les objets à indices ne sont pas des tenseurs

exemple important : symboles de Christoffel

$\simeq$ vecteur de dimension d dont les éléments sont des matrice $d \times d$

- éléments $\simeq$ dérivées partielles des g_{ij} (d'ordre 1) par rapport aux x^k

$\Longrightarrow$ objet à 3 indices : Γ^i_{jk}

- **pas** tenseur d'ordre 3 : peut s'annuler dans **certains** systèmes de coordonnées
- **Propriété** :
  $\Gamma^i_{jk} = 0$ **(globalement) ssi** espace plat **et** coordonnées cartésiennes
  (situation dans laquelle g_{ij} = identité)
- équation des géodésiques : chemin paramétré $x^i(s)$ = géodésique si

$$\boxed{\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0}$$

$\Longrightarrow$ $x^i(s) = x^i_0 + v^i_0\, s$ si Christoffel nuls ($\equiv$ ligne droite cartésienne)

Attention : tous les objets à indices ne sont pas des tenseurs

exemple important : symboles de Christoffel

$\simeq$ vecteur de dimension d dont les éléments sont des matrice $d \times d$

- éléments $\simeq$ dérivées partielles des g_{ij} (d'ordre 1) par rapport aux x^k

$\Longrightarrow$ objet à 3 indices : Γ^i_{jk}

- **pas** tenseur d'ordre 3 : peut s'annuler dans **certains** systèmes de coordonnées
- **Propriété** :
  $\Gamma^i_{jk} = 0$ **(globalement) ssi** espace plat **et** coordonnées cartésiennes
  (situation dans laquelle g_{ij} = identité)
- équation des géodésiques : chemin paramétré $x^i(s)$ = géodésique si

$$\boxed{\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk}\,\frac{dx^j}{ds}\,\frac{dx^k}{ds} = 0}$$

$\Longrightarrow$ $x^i(s) = x^i_0 + v^i_0\, s$ si Christoffel nuls ($\equiv$ ligne droite cartésienne)

Attention : tous les objets à indices ne sont pas des tenseurs

exemple important : symboles de Christoffel

$\simeq$ vecteur de dimension d dont les éléments sont des matrice $d \times d$

- éléments $\simeq$ dérivées partielles des g_{ij} (d'ordre 1) par rapport aux x^k

$\Longrightarrow$ objet à 3 indices : Γ^i_{jk}

- **pas** tenseur d'ordre 3 : peut s'annuler dans **certains** systèmes de coordonnées
- **Propriété** :
$\Gamma^i_{jk} = 0$ **(globalement) ssi** espace plat **et** coordonnées cartésiennes
(situation dans laquelle g_{ij} = identité)
- équation des géodésiques : chemin paramétré $x^i(s)$ = géodésique si

$$\boxed{\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0}$$

$\Longrightarrow$ $x^i(s) = x^i_0 + v^i_0\, s$ si Christoffel nuls ($\equiv$ ligne droite cartésienne)

Attention : tous les objets à indices ne sont pas des tenseurs

exemple important : symboles de Christoffel

$\simeq$ vecteur de dimension d dont les éléments sont des matrice $d \times d$

- éléments $\simeq$ dérivées partielles des g_{ij} (d'ordre 1) par rapport aux x^k

  $\Longrightarrow$ objet à 3 indices : Γ^i_{jk}
- **pas** tenseur d'ordre 3 : peut s'annuler dans **certains** systèmes de coordonnées
- **Propriété** :
  $\Gamma^i_{jk} = 0$ **(globalement) ssi** espace plat **et** coordonnées cartésiennes (situation dans laquelle g_{ij} = identité)
- équation des géodésiques : chemin paramétré $x^i(s)$ = géodésique si

$$\boxed{\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0}$$

$\Longrightarrow$ $x^i(s) = x^i_0 + v^i_0\, s$ si Christoffel nuls ($\equiv$ ligne droite cartésienne)

Attention : tous les objets à indices ne sont pas des tenseurs

exemple important : symboles de Christoffel

$\simeq$ vecteur de dimension d dont les éléments sont des matrice $d \times d$

- éléments $\simeq$ dérivées partielles des g_{ij} (d'ordre 1) par rapport aux x^k

  $\Longrightarrow$ objet à 3 indices : Γ^i_{jk}
- **pas** tenseur d'ordre 3 : peut s'annuler dans **certains** systèmes de coordonnées
- **Propriété** :
  $\Gamma^i_{jk} = 0$ **(globalement) ssi** espace plat **et** coordonnées cartésiennes (situation dans laquelle g_{ij} = identité)
- équation des géodésiques : chemin paramétré $x^i(s)$ = géodésique si

$$\boxed{\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0}$$

$\Longrightarrow$ $x^i(s) = x^i_0 + v^i_0\, s$ si Christoffel nuls ($\equiv$ ligne droite cartésienne)

Attention : tous les objets à indices ne sont pas des tenseurs

exemple important : symboles de Christoffel

$\simeq$ vecteur de dimension d dont les éléments sont des matrice $d \times d$

- éléments $\simeq$ dérivées partielles des g_{ij} (d'ordre 1) par rapport aux x^k

  $\Longrightarrow$ objet à 3 indices : Γ^i_{jk}
- **pas** tenseur d'ordre 3 : peut s'annuler dans **certains** systèmes de coordonnées
- **Propriété** :
  $\Gamma^i_{jk} = 0$ **(globalement) ssi** espace plat **et** coordonnées cartésiennes (situation dans laquelle g_{ij} = identité)
- équation des géodésiques : chemin paramétré $x^i(s)$ = géodésique si

$$\boxed{\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk}\,\frac{dx^j}{ds}\,\frac{dx^k}{ds} = 0}$$

$\Longrightarrow$ $x^i(s) = x^i_0 + v^i_0\, s$ si Christoffel nuls ($\equiv$ ligne droite cartésienne)

IV

Abrégé de relativité générale

principe de relativité généralisé :
« Les lois de la physique s'expriment comme des relations entre tenseurs lorentziens généraux (= même forme dans **tous** *les systèmes de coordonnées), et pour les observateurs en chute libre, elles ont* **localement** *la même expression qu'en relativité restreinte »*

principe de relativité généralisé :
« Les lois de la physique s'expriment comme des relations entre tenseurs lorentziens généraux (= même forme dans **tous** *les systèmes de coordonnées), et pour les observateurs en chute libre, elles ont* **localement** *la même expression qu'en relativité restreinte »*

$\Longrightarrow$ invariance sous les **difféomorphismes spatio-temporelles** ($\simeq$ changement de coordonnées quelconques), et pas seulement sous les transformations de Lorentz

Espace-temps sans gravitation (cf. relativité restreinte) :

- variété pseudo-euclidienne :

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu \, dx^\nu$$

où $g_{\mu\nu}$ = matrice de taille 4×4

- coordonnées lorentziennes (inertielles) $\equiv$ coordonnées cartésiennes

$$\Longrightarrow \quad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$$

ssi espace-temps décrit en coordonnées inertielles
($=$ temps d'un observateur inertiel **et** coordonnées spatiales cartésiennes)

$\Longrightarrow$ trajectoires d'**objets libres rectilignes**

- **référentiel non-inertiel** :

$$g_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu} \text{ et } \Gamma^\mu_{\nu\rho} \neq 0 \, (\equiv \text{ forces d'inertie})$$

$\Longrightarrow$ trajectoires d'objets libres complexes, non rectilignes (en apparence)
mais **tenseur de Riemann** identiquement nul

Espace-temps sans gravitation (cf. relativité restreinte) :

- variété pseudo-euclidienne :

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu \, dx^\nu$$

où $g_{\mu\nu}$ = matrice de taille 4×4

- coordonnées lorentziennes (inertielles) $\equiv$ coordonnées cartésiennes

$$\Longrightarrow \quad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$$

ssi espace-temps décrit en coordonnées inertielles
(= temps d'un observateur inertiel **et** coordonnées spatiales cartésiennes)

$\Longrightarrow$ trajectoires d'**objets libres rectilignes**

- **référentiel non-inertiel** :

$$g_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu} \text{ et } \Gamma^\mu_{\nu\rho} \neq 0 \, (\equiv \text{ forces d'inertie})$$

$\Longrightarrow$ trajectoires d'objets libres complexes, non rectilignes (en apparence)
mais **tenseur de Riemann** identiquement nul

Espace-temps sans gravitation (cf. relativité restreinte) :

- variété pseudo-euclidienne :

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu \, dx^\nu$$

  où $g_{\mu\nu}$ = matrice de taille 4×4

- coordonnées lorentziennes (inertielles) $\equiv$ coordonnées cartésiennes

$$\Longrightarrow \quad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$$

  ssi espace-temps décrit en coordonnées inertielles
  (= temps d'un observateur inertiel **et** coordonnées spatiales cartésiennes)

  $\Longrightarrow$ trajectoires d'**objets libres rectilignes**

- **référentiel non-inertiel** :

$$g_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu} \text{ et } \Gamma^\mu_{\nu\rho} \neq 0 \, (\equiv \text{ forces d'inertie})$$

  $\Longrightarrow$ trajectoires d'objets libres complexes, non rectilignes (en apparence)
  mais **tenseur de Riemann** identiquement nul

Espace-temps sans gravitation (cf. relativité restreinte) :

- variété pseudo-euclidienne :

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu \, dx^\nu$$

où $g_{\mu\nu}$ = matrice de taille 4×4

- coordonnées lorentziennes (inertielles) $\equiv$ coordonnées cartésiennes

$$\Longrightarrow \quad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,\, 1,\, 1,\, 1)$$

ssi espace-temps décrit en coordonnées inertielles
(= temps d'un observateur inertiel **et** coordonnées spatiales cartésiennes)

$\Longrightarrow$ trajectoires d'**objets libres rectilignes**

- **référentiel non-inertiel** :

$$g_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu} \ \text{ et } \ \Gamma^\mu_{\nu\rho} \neq 0 \, (\equiv \text{ forces d'inertie})$$

$\Longrightarrow$ trajectoires d'objets libres complexes, non rectilignes (en apparence)
mais **tenseur de Riemann** identiquement nul

Espace-temps sans gravitation (cf. relativité restreinte) :

- variété pseudo-euclidienne :

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu \, dx^\nu$$

  où $g_{\mu\nu}$ = matrice de taille 4×4

- coordonnées lorentziennes (inertielles) $\equiv$ coordonnées cartésiennes

$$\Longrightarrow \quad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1,\,1,\,1,\,1)$$

  ssi espace-temps décrit en coordonnées inertielles
  (= temps d'un observateur inertiel **et** coordonnées spatiales cartésiennes)

  $\Longrightarrow$ trajectoires d'**objets libres rectilignes**

- **référentiel non-inertiel** :

$$g_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu} \ \text{ et } \ \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} \neq 0 \, (\equiv \text{ forces d'inertie})$$

  $\Longrightarrow$ trajectoires d'objets libres complexes, non rectilignes (en apparence)
  mais **tenseur de Riemann** identiquement nul

Espace-temps sans gravitation (cf. relativité restreinte) :

- variété pseudo-euclidienne :

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu \, dx^\nu$$

où $g_{\mu\nu}$ = matrice de taille 4×4

- coordonnées lorentziennes (inertielles) $\equiv$ coordonnées cartésiennes

$$\Longrightarrow \quad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$$

ssi espace-temps décrit en coordonnées inertielles
($=$ temps d'un observateur inertiel **et** coordonnées spatiales cartésiennes)

$\Longrightarrow$ trajectoires d'**objets libres rectilignes**

- **référentiel non-inertiel** :

$$g_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu} \;\text{ et }\; \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} \neq 0 \,(\equiv \text{ forces d'inertie})$$

$\Longrightarrow$ trajectoires d'objets libres complexes, non rectilignes (en apparence)

mais **tenseur de Riemann** identiquement nul

Espace-temps sans gravitation (cf. relativité restreinte) :

- variété pseudo-euclidienne :

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

  où $g_{\mu\nu}$ = matrice de taille 4×4

- coordonnées lorentziennes (inertielles) $\equiv$ coordonnées cartésiennes

$$\Longrightarrow \quad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1,\, 1,\, 1,\, 1)$$

  ssi espace-temps décrit en coordonnées inertielles
  (= temps d'un observateur inertiel **et** coordonnées spatiales cartésiennes)

  $\Longrightarrow$ trajectoires d'**objets libres rectilignes**

- **référentiel non-inertiel** :

$$g_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu} \;\text{ et }\; \Gamma^\mu_{\nu\rho} \neq 0\,(\equiv \text{ forces d'inertie})$$

  $\Longrightarrow$ trajectoires d'objets libres complexes, non rectilignes (en apparence)
  mais **tenseur de Riemann** identiquement nul

Espace-temps avec gravitation :

- variété pseudo-riemannienne :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu \, dx^\nu$$

où $g_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu}$ (**globalement**), $\forall$ le système de coordonnées/référentiel

- mais $g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu}$ et $\Gamma^\mu_{\nu\rho} \simeq 0$ (**localement**) si système de coordonnées inertiel (c'est-à-dire dans le système de coordonnées d'un observateur en chute libre)
- **trajectoires d'objets libres** : équation des géodésiques (avec $\Gamma^\mu_{\nu\rho} \neq 0$)
- **équations d'Einstein** :

$$\underbrace{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R \, g_{\mu\nu}}_{\text{« géométrie de l'espace-temps »}} = \underbrace{\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}}_{\text{« flux spatio-temporels d'énergie »}}$$

où $T_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion

- **limite newtonienne** :

$$\Delta \phi = 4 \pi G \rho$$

Espace-temps avec gravitation :

- variété pseudo-riemannienne :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu \, dx^\nu$$

où $g_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu}$ (**globalement**), $\forall$ le système de coordonnées/référentiel

- mais $g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu}$ et $\Gamma^\mu_{\nu\rho} \simeq 0$ (**localement**) si système de coordonnées inertiel (c'est-à-dire dans le système de coordonnées d'un observateur en chute libre)
- **trajectoires d'objets libres** : équation des géodésiques (avec $\Gamma^\mu_{\nu\rho} \neq 0$)
- **équations d'Einstein** :

$$\underbrace{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R \, g_{\mu\nu}}_{\text{« géométrie de l'espace-temps »}} = \underbrace{\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}}_{\text{« flux spatio-temporels d'énergie »}}$$

où $T_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion

- **limite newtonienne** :

$$\Delta \phi = 4 \pi G \rho$$

Espace-temps avec gravitation :

- variété pseudo-riemannienne :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu \, dx^\nu$$

  où $g_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu}$ (**globalement**), $\forall$ le système de coordonnées/référentiel
- mais $g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu}$ et $\Gamma^\mu_{\nu\rho} \simeq 0$ (**localement**) si système de coordonnées inertiel (c'est-à-dire dans le système de coordonnées d'un observateur en chute libre)
- **trajectoires d'objets libres** : équation des géodésiques (avec $\Gamma^\mu_{\nu\rho} \neq 0$)
- **équations d'Einstein** :

$$\underbrace{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R \, g_{\mu\nu}}_{\text{« géométrie de l'espace-temps »}} = \underbrace{\frac{8 \pi G}{c^4} T_{\mu\nu}}_{\text{« flux spatio-temporels d'énergie »}}$$

  où $T_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion
- **limite newtonienne** :

$$\Delta \phi = 4 \pi G \rho$$

Espace-temps avec gravitation :

- variété pseudo-riemannienne :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu \, dx^\nu$$

où $g_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu}$ (**globalement**), $\forall$ le système de coordonnées/référentiel

- mais $g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu}$ et $\Gamma^\mu_{\nu\rho} \simeq 0$ (**localement**) si système de coordonnées inertiel (c'est-à-dire dans le système de coordonnées d'un observateur en chute libre)
- **trajectoires d'objets libres** : équation des géodésiques (avec $\Gamma^\mu_{\nu\rho} \neq 0$)
- **équations d'Einstein** :

$$\underbrace{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R \, g_{\mu\nu}}_{\text{« géométrie de l'espace-temps »}} = \underbrace{\frac{8\,\pi\,G}{c^4} T_{\mu\nu}}_{\text{« flux spatio-temporels d'énergie »}}$$

où $T_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion

- limite newtonienne :

$$\Delta\,\phi = 4\,\pi\,G\,\rho$$

Espace-temps avec gravitation :

- variété pseudo-riemannienne :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu \, dx^\nu$$

  où $g_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu}$ (**globalement**), $\forall$ le système de coordonnées/référentiel
- mais $g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu}$ et $\Gamma^\mu_{\nu\rho} \simeq 0$ (**localement**) si système de coordonnées inertiel (c'est-à-dire dans le système de coordonnées d'un observateur en chute libre)
- **trajectoires d'objets libres** : équation des géodésiques (avec $\Gamma^\mu_{\nu\rho} \neq 0$)
- **équations d'Einstein** :

$$\underbrace{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R \, g_{\mu\nu}}_{\text{« géométrie de l'espace-temps »}} = \underbrace{\frac{8\,\pi\,G}{c^4} T_{\mu\nu}}_{\text{« flux spatio-temporels d'énergie »}}$$

  où $T_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion
- **limite newtonienne** :

$$\Delta\,\phi = 4\,\pi\,G\,\rho$$

Espace-temps avec gravitation :

- variété pseudo-riemannienne :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu \, dx^\nu$$

où $g_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu}$ (**globalement**), $\forall$ le système de coordonnées/référentiel

- mais $g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu}$ et $\Gamma^\mu_{\nu\rho} \simeq 0$ (**localement**) si système de coordonnées inertiel (c'est-à-dire dans le système de coordonnées d'un observateur en chute libre)
- **trajectoires d'objets libres** : équation des géodésiques (avec $\Gamma^\mu_{\nu\rho} \neq 0$)
- **équations d'Einstein** :

$$\underbrace{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R \, g_{\mu\nu}}_{\text{« géométrie de l'espace-temps »}} = \underbrace{\frac{8\,\pi\,G}{c^4} T_{\mu\nu}}_{\text{« flux spatio-temporels d'énergie »}}$$

où $T_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion

- **limite newtonienne** :

$$\Delta\,\phi = 4\,\pi\,G\,\rho \quad \left(\simeq R_{00} - \frac{1}{2} R \, g_{00} = \frac{8\,\pi\,G}{c^4} T_{00}\right)$$

Exemples d'espace-temps :

- **Univers euclidien** en expansion ou contraction :

$$ds^2 = -c^2\, dt^2 + a(t)^2\, d\ell^2 \ \text{ avec } a(t) = \text{facteur d'échelle}$$

- Métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (cosmologie) :

$$ds^2 = -c^2\, dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \ \text{ avec } k = 0, \pm 1$$

- Métrique de Schwarzschild (autour d'une masse M sphérique) :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_\mathrm{s}}{r}\right) c^2\, dt^2 + \left(1 - \frac{r_\mathrm{s}}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

où $r_\mathrm{s} = 2GM/c^2$ avec $r_\mathrm{s}/r = 2GM/(r\, c^2) = -2\, \varphi_{\text{Newt.}}/c^2$

Exemples d'espace-temps :

- **Univers euclidien** en expansion ou contraction :

$$ds^2 = -c^2\,dt^2 + a(t)^2\,d\ell^2 \quad \text{avec } a(t) = \text{facteur d'échelle}$$

- Métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (cosmologie) :

$$ds^2 = -c^2\,dt^2 + a(t)^2\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2\right) \quad \text{avec } k = 0, \pm 1$$

- Métrique de Schwarzschild (autour d'une masse M sphérique) :

$$ds^2 = -\left(1-\frac{r_\mathrm{s}}{r}\right)c^2\,dt^2 + \left(1-\frac{r_\mathrm{s}}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

où $r_\mathrm{s} = 2GM/c^2$ avec $r_\mathrm{s}/r = 2GM/(r\,c^2) = -2\,\varphi_{\mathrm{Newt.}}/c^2$

Exemples d'espace-temps :

- **Univers euclidien** en expansion ou contraction :

$$ds^2 = -c^2\, dt^2 + a(t)^2\, d\ell^2 \ \text{ avec } a(t) = \text{facteur d'échelle}$$

- Métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (cosmologie) :

$$ds^2 = -c^2\, dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \ \text{ avec } k = 0, \pm 1$$

- Métrique de Schwarzschild (autour d'une masse M sphérique) :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_\mathrm{s}}{r}\right) c^2\, dt^2 + \left(1 - \frac{r_\mathrm{s}}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

où $r_\mathrm{s} = 2GM/c^2$ avec $r_\mathrm{s}/r = 2GM/(r\, c^2) = -2\, \varphi_{\text{Newt.}}/c^2$

Exemples d'espace-temps :

- **Univers euclidien** en expansion ou contraction :

$$ds^2 = -c^2\,dt^2 + a(t)^2\,d\ell^2 \text{ avec } a(t) = \text{facteur d'échelle}$$

- Métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (cosmologie) :

$$ds^2 = -c^2\,dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2\right) \text{ avec } k = 0, \pm 1$$

- Métrique de Schwarzschild (autour d'une masse M sphérique) :

$$ds^2 = -\left(1-\frac{r_{\mathrm{s}}}{r}\right) c^2\,dt^2 + \left(1-\frac{r_{\mathrm{s}}}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

où $r_{\mathrm{s}} = 2GM/c^2$ avec $r_{\mathrm{s}}/r = 2GM/(r\,c^2) = -2\,\varphi_{\text{Newt.}}/c^2$

remarque : dans tous ces cas, $dt = 0 \implies$ **espace riemannien** pour une famille d'**observateurs**, mais problème général plus subtil (coordonnées pas adaptées partout, cf. Schwarzschild/Mercator ; observateurs ne percevant qu'une partie de l'espace-temps ; etc.)

Quelques points laissés sous le tapis :

- espace-temps **pas donné** *a priori* (« *background independence* »)
- **Wheeler** : *« spacetime tells matter how to move ; matter tells spacetime how to curve. »*
- **aspects techniques** : lien entre géométrie et physique (grandeurs mesurables/mesurées) ; formalisme variationnel (lagrangien d'Einstein-Hilbert) ; énergie du vide (constante cosmologique ?) ; etc.
- **prédictions exotiques** : possibilité d'un « espace dynamique », de régions causalement déconnectées (horizons), de singularités, de boucles fermées du genre temps (« voyage dans le temps » ?), etc.
- **déconstruction de grandeurs fondamentales** : notions de masse et de distances pas toujours simples à définir, etc.
- **conséquences/questions épistémologiques et ontologiques** : grandeurs délocalisées, possibilité de changer de la géométrie en matière (et réciproquement), etc.

Quelques points laissés sous le tapis :

- espace-temps **pas donné** *a priori* (« *background independence* »)
- **Wheeler** : *« spacetime tells matter how to move ; matter tells spacetime how to curve. »*
- **aspects techniques** : lien entre géométrie et physique (grandeurs mesurables/mesurées) ; formalisme variationnel (lagrangien d'Einstein-Hilbert) ; énergie du vide (constante cosmologique ?) ; etc.
- **prédictions exotiques** : possibilité d'un « espace dynamique », de régions causalement déconnectées (horizons), de singularités, de boucles fermées du genre temps (« voyage dans le temps » ?), etc.
- **déconstruction de grandeurs fondamentales** : notions de masse et de distances pas toujours simples à définir, etc.
- **conséquences/questions épistémologiques et ontologiques** : grandeurs délocalisées, possibilité de changer de la géométrie en matière (et réciproquement), etc.

Quelques points laissés sous le tapis :

- espace-temps **pas donné** *a priori* (« *background independence* »)
- **Wheeler** : *« spacetime tells matter how to move ; matter tells spacetime how to curve. »*
- **aspects techniques** : lien entre géométrie et physique (grandeurs mesurables/mesurées) ; formalisme variationnel (lagrangien d'Einstein-Hilbert) ; énergie du vide (constante cosmologique ?) ; etc.
- **prédictions exotiques** : possibilité d'un « espace dynamique », de régions causalement déconnectées (horizons), de singularités, de boucles fermées du genre temps (« voyage dans le temps » ?), etc.
- **déconstruction de grandeurs fondamentales** : notions de masse et de distances pas toujours simples à définir, etc.
- **conséquences/questions épistémologiques et ontologiques** : grandeurs délocalisées, possibilité de changer de la géométrie en matière (et réciproquement), etc.

Quelques points laissés sous le tapis :

- espace-temps **pas donné** *a priori* (« *background independence* »)
- **Wheeler** : *« spacetime tells matter how to move ; matter tells spacetime how to curve. »*
- **aspects techniques** : lien entre géométrie et physique (grandeurs mesurables/mesurées) ; formalisme variationnel (lagrangien d'Einstein-Hilbert) ; énergie du vide (constante cosmologique ?) ; etc.
- **prédictions exotiques** : possibilité d'un « espace dynamique », de régions causalement déconnectées (horizons), de singularités, de boucles fermées du genre temps (« voyage dans le temps » ?), etc.
- **déconstruction de grandeurs fondamentales** : notions de masse et de distances pas toujours simples à définir, etc.
- **conséquences/questions épistémologiques et ontologiques** : grandeurs délocalisées, possibilité de changer de la géométrie en matière (et réciproquement), etc.

Quelques points laissés sous le tapis :

- espace-temps **pas donné** *a priori* (« *background independence* »)
- **Wheeler** : *« spacetime tells matter how to move ; matter tells spacetime how to curve. »*
- **aspects techniques** : lien entre géométrie et physique (grandeurs mesurables/mesurées) ; formalisme variationnel (lagrangien d'Einstein-Hilbert) ; énergie du vide (constante cosmologique ?) ; etc.
- **prédictions exotiques** : possibilité d'un « espace dynamique », de régions causalement déconnectées (horizons), de singularités, de boucles fermées du genre temps (« voyage dans le temps » ?), etc.
- **déconstruction de grandeurs fondamentales** : notions de masse et de distances pas toujours simples à définir, etc.
- **conséquences/questions épistémologiques et ontologiques** : grandeurs délocalisées, possibilité de changer de la géométrie en matière (et réciproquement), etc.

Quelques points laissés sous le tapis :

- espace-temps **pas donné** *a priori* (« *background independence* »)
- **Wheeler** : *« spacetime tells matter how to move ; matter tells spacetime how to curve. »*
- **aspects techniques** : lien entre géométrie et physique (grandeurs mesurables/mesurées) ; formalisme variationnel (lagrangien d'Einstein-Hilbert) ; énergie du vide (constante cosmologique ?) ; etc.
- **prédictions exotiques** : possibilité d'un « espace dynamique », de régions causalement déconnectées (horizons), de singularités, de boucles fermées du genre temps (« voyage dans le temps » ?), etc.
- **déconstruction de grandeurs fondamentales** : notions de masse et de distances pas toujours simples à définir, etc.
- **conséquences/questions épistémologiques et ontologiques** : grandeurs délocalisées, possibilité de changer de la géométrie en matière (et réciproquement), etc.

Quelques points laissés sous le tapis :

- espace-temps **pas donné** *a priori* (« *background independence* »)
- **Wheeler** : *« spacetime tells matter how to move ; matter tells spacetime how to curve. »*
- **aspects techniques** : lien entre géométrie et physique (grandeurs mesurables/mesurées) ; formalisme variationnel (lagrangien d'Einstein-Hilbert) ; énergie du vide (constante cosmologique ?) ; etc.
- **prédictions exotiques** : possibilité d'un « espace dynamique », de régions causalement déconnectées (horizons), de singularités, de boucles fermées du genre temps (« voyage dans le temps » ?), etc.
- **déconstruction de grandeurs fondamentales** : notions de masse et de distances pas toujours simples à définir, etc.
- **conséquences/questions épistémologiques et ontologiques** : grandeurs délocalisées, possibilité de changer de la géométrie en matière (et réciproquement), etc.

Merci de votre attention !

Quelques références/suggestions de lecture :

- Carroll, *Spacetime and geometry*
- Deruelle & Uzan, *Théories de la relativité*
- Hartle, *Gravity*
- Hobson, Efstathiou & Lasenby, *Relativité générale*
- Misner, Thorne & Wheeler (MTW), *Gravitation*
- Moore, *Relativité générale*
- Schutz, *A first course in general relativity*
- Susskind, *General Relativity : The Theoretical Minimum*
- Strauman, *General relativity*
- Wald, *General relativity*
- `https://videos.univ-grenoble-alpes.fr/`
  (vidéos par R. Taillet, 26 épisodes de 25 à 45 minutes)