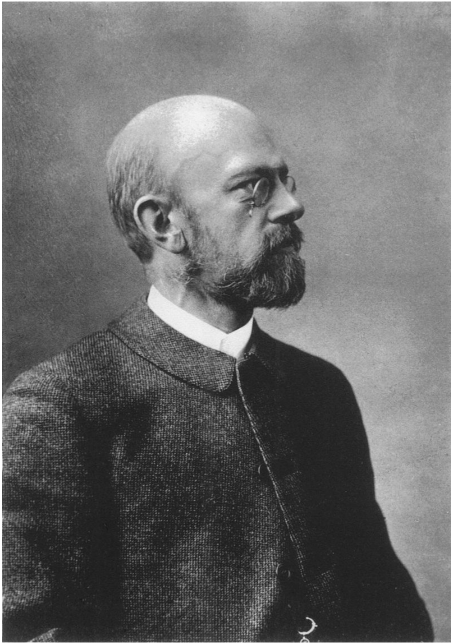
David Hilbert et la relativité générale

Antoine Bourget

IPhT, CEA Saclay.

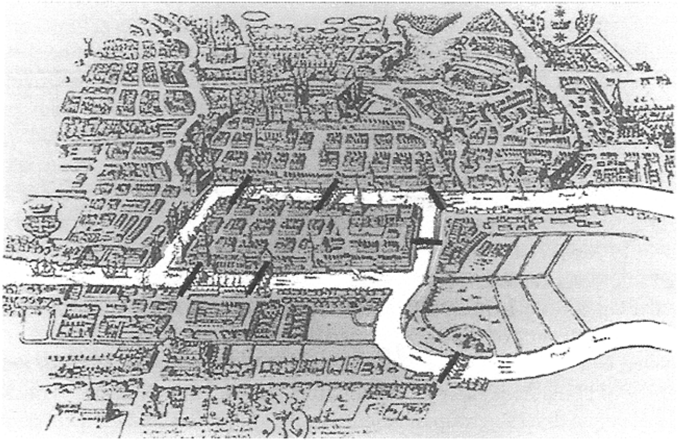
XII$^{\text{ème}}$ Rencontres d'été de Physique
De l'infiniment grand à l'infiniment petit

Orsay, 1$^{\text{er}}$ juillet 2024.



David Hilbert (1862-1943) en 1907.


DER DEUTSCHE BUND
1815–1866
1862-1895
Königsberg
1895-1943
Göttingen
Nordsee
Ostsee
Adria
Helgoland (brit.)
Flensburg
Kgr. Dänemark
Schleswig
Holstein (Personalunion m. Dänemark)
zu HH
Cuxhaven
Wilhelmshaven (1854 preuß.)
Bremerhaven
Altona
Hansestadt Hamburg
Emden
Oldenburg
Ghzm. Oldenburg
Hansestadt Bremen
Königreich Hannover
(bis 1837 Personalunion mit Großbritannien)
Rostock
Stralsund
Greifswald
Grhzm. Mecklenburg-Schwerin
Schwerin
Ghzm. M-St.
Neu-Strelitz
Swinemünde
Stettin
Kolberg
Danzig
Elbing
Graudenz
Thorn
1848–1851 zum Deutschen Bund
Weichsel
Warthe
Posen
Warschau
Kgr. Polen
(zu Kaiserreich Russland)
Kgr. Niederlande
(ab 1830)
Amsterdam
Den Haag
Verein. Königreich der Niederlande
Osnabrück
Hannover
Braunschweig
Magdeburg
Potsdam
Berlin
Küstrin
Frankfurt
Preußen
Cottbus
Oder
Münster
Detmold
Dessau
Herzogtum Anhalt
Wesel
Dortmund
Essen
Ruhr
Düsseldorf
Königreich
Köln
Bonn
Siegen
Kassel
Fsm. Waldeck
Kurfsm. Hessen
Sondersh.
Halle
Leipzig
Kgr. Sachsen
Dresden
Görlitz
Breslau
Königr. Belgien
(ab 1830)
Marburg
Gießen
Wetzlar
Hzm. Nassau
Koblenz
Homburg
Wiesbaden
Freie Stadt Frankfurt
Mainz
Erfurt
Weimar
Jena
Altenbg.
Chemnitz
Königstein
Oppeln
Königshütte
Beuthen
Gleiwitz
Kattowitz
Rep. Krakau (1846 österr.)
Krakau
1818 z. Dt. Bund
Ghzm. Luxemburg
1839 belg.
Personalunion mit Kgr. Niederlande
Luxemburg
Trier
Grhzm. Darmstadt
Aschaffenbg.
Würzbg.
Meiningen
Coburg
Karlsbad
Prag
Elbe
Königgrätz
Moldau
Maas
Verdun
Metz
Mosel
Kgr. Bayern
Landau
Heidelberg
Baden
Heilbronn
Karlsruhe
Rastatt
Nancy
Straßburg
Großherzogtum
Kgr. Württemberg
Stuttgart
Tübingen
Ulm
Hohenzollern
Königreich Bayern
Nürnberg
Regensburg
Ingolstadt
Isar
Donau
Landshut
Augsburg
München
Brünn
Kaiserreich
Kgr. Ungarn
Krems
Wien
Linz
Salzburg
Österreich
Kgr. Frankreich
(1848 Republik, 1852 Kaiserreich)
Freiburg
Basel
Zürich
Bern
Schweiz
Fsm. Liechtenstein
Inn
Innsbruck
Mur
Graz
Klagenfurt
Drau
Marburg
Bozen
Etsch
Piave
Triest
Genf
Rhone
Savoyen
(1860 an Frankreich abgetreten)
Kgr. Sardinien
(ab 1861 Kgr. Italien)
Turin
Mailand
Lombardo-Venezien
(1866 an Kgr. Italien)
Po
Venedig
Hzm. Parma
(1861 zu Italien)
Hzm. Modena
(1861 zu Italien)
Kirchenstaat
(1861 zu Italien)
Kgr. Ungarn
FL = Fürstentum Lichtenberg (1834 preussisch)
FW = Fürstentum Waldeck und Pyrmont (Landesteil Pyrmont)
HH = Hansestadt Hamburg
HL = Hansestadt Lübeck
HLB = Herzogtum Lauenburg (1865 preussisch)
KH = Kurfürstentum Hessen
LD = Fürstentum Lippe
LH = Landgrafschaft Hessen-Homburg
MS = Großherzogtum Mecklenburg-Strelitz
OL = Großherzogtum Oldenburg
RÄL = Fürstentum Reuß ältere Linie
RJL = Fürstentum Reuß jüngere Linie
SA = Herzogtum Sachsen-Altenburg
SCG = Herzogtum Sachsen-Coburg und Gotha
SL = Fürstentum Schaumburg-Lippe
SM = Herzogtum Sachsen-Meiningen
SR = Fürstentum Schwarzburg-Rudolstadt
SWE = Großherzogtum Sachsen-Weimar-Eisenach
Anhalt ist nach Aussterben der Linien Anhalt-Köthen und Anhalt-Bernburg dargestellt, die thüringischen Staaten nach der 1826 erfolgten Neuordnung der ernestinischen Herzogtümer.
Städte
Festungen
Bundesfestungen
0 50 100 150 200
Kilometer



Königsberg et ses ponts (Euler 1735).

Georg-August-Universität Göttingen




Gauss Riemann Klein Minkowski

Des contributions majeures en mathématiques

Impossible de tout lister ici !

- Axiomatisation de la géométrie
- Le "programme de Hilbert" pour les fondations des mathématiques
- Analyse fonctionnelle et "espaces de Hilbert"
- Le théorème de la base de Hilbert (tout ensemble défini par une famille de polynôme peut être décrit par une famille finie de polynômes)

Mots d'ordre :

Axiomatiser, systématiser.

Ignoramus et ignorabimus?

Histoire de la relativité générale

- 1905 : Einstein publie la théorie de la relativité restreinte.
- 1907 : Principe d'équivalence (les principes de la relativité restreinte s'appliquent pour un observateur en chute libre).
- 1911 : Prédiction de la déviation des rayons lumineux par les astres massifs .
- 1912 : Incorporation de la géométrie Riemannienne et usage des tenseur.
- Eté 1915 : Intenses échanges entre Einstein et Hilbert.
- Automne 1915 : Publication des équations de champ d'Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}$$

avec

$$\kappa = \frac{8\pi G_N}{c^4}$$

Simultanément, Hilbert obtient les mêmes équations en utilisant un principe variationnel.

Einstein and Hilbert: Two Months in the History of General Relativity

JOHN EARMAN & CLARK GLYMOUR

Communicated by J.D. NORTH

1. Introduction

The vast majority of current English language textbooks on relativity theory treat, either explicitly or implicitly, the field equations of general relativity as EINSTEIN's equations.[1] By contrast, PAULI[2] credits HILBERT as being co-discover of the field equations.[3] GUTH[4] has claimed that HILBERT deserves no credit since he knew of EINSTEIN's formulation of the field equations before proceeding to an after-the-fact derivation from a variational principle. GUTH's claims have in turn been disputed by MEHRA.[5] Questions about the priority of discoveries are often among the least interesting and least important issues in the history of science, and our main purpose here is to illuminate the development of EINSTEIN's ideas rather than to engage in priority disputes. It turns out, however, that for the crucial period of 1915, these two matters are intimately linked.

Die Feldgleichungen der Gravitation.

Von A. Einstein.

In zwei vor kurzem erschienenen Mitteilungen[1] habe ich gezeigt, wie man zu Feldgleichungen der Gravitation gelangen kann, die dem Postulat allgemeiner Relativität entsprechen, d. h. die in ihrer allgemeinen Fassung beliebigen Substitutionen der Raumzeitvariabeln gegenüber kovariant sind.

Der Entwicklungsgang war dabei folgender. Zunächst fand ich Gleichungen, welche die Newtonsche Theorie als Näherung enthalten und beliebigen Substitutionen von der Determinante 1 gegenüber kovariant waren. Hierauf fand ich, daß diesen Gleichungen allgemein kovariante entsprechen, falls der Skalar des Energietensors der »Materie« verschwindet. Das Koordinatensystem war dann nach der einfachen Regel zu spezialisieren, daß $\sqrt{-g}$ zu 1 gemacht wird, wodurch die Gleichungen der Theorie eine eminente Vereinfachung erfahren. Dabei mußte aber, wie erwähnt, die Hypothese eingeführt werden, daß der Skalar des Energietensors der Materie verschwinde.

Neuerdings finde ich nun, daß man ohne Hypothese über den Energietensor der Materie auskommen kann, wenn man den Energietensor der Materie in etwas anderer Weise in die Feldgleichungen einsetzt, als dies in meinen beiden früheren Mitteilungen geschehen ist. Die Feldgleichungen für das Vakuum, auf welche ich die Erklärung der Perihelbewegung des Merkur gegründet habe, bleiben von [2] dieser Modifikation unberührt. Ich gebe hier nochmals die ganze Betrachtung, damit der Leser nicht genötigt ist, die früheren Mitteilungen unausgesetzt heranzuziehen.

Aus der bekannten Riemannschen Kovariante vierten Ranges leitet man folgende Kovariante zweiten Ranges ab:

$$G_{im} = R_{im} + S_{im} \tag{1}$$

$$R_{im} = -\sum_l \frac{\partial \begin{Bmatrix} im \\ l \end{Bmatrix}}{\partial x_l} + \sum_{l\rho} \begin{Bmatrix} il \\ \rho \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} m\rho \\ l \end{Bmatrix} \tag{1a}$$

$$S_{im} = \sum_l \frac{\partial \begin{Bmatrix} il \\ l \end{Bmatrix}}{\partial x_m} - \sum_{l\rho} \begin{Bmatrix} im \\ \rho \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho l \\ l \end{Bmatrix} \tag{1b}$$

Die Grundlagen der Physik.

(Erste Mitteilung.)

Von

David Hilbert.

Vorgelegt in der Sitzung vom 20. November 1915.

Die gewaltigen Problemstellungen von Einstein[1]) sowie dessen scharfsinnige zu ihrer Lösung ersonnenen Methoden und die tiefgreifenden Gedanken und originellen Begriffsbildungen, vermöge derer Mie[2]) seine Elektrodynamik aufbaut, haben der Untersuchung über die Grundlagen der Physik neue Wege eröffnet.

Ich möchte im Folgenden — im Sinne der axiomatischen Methode — wesentlich aus zwei einfachen Axiomen ein neues System von Grundgleichungen der Physik aufstellen, die von idealer Schön-

Das physikalische Geschehen ist nicht willkürlich, es gelten vielmehr folgende zwei Axiome:

Axiom I (Mie's Axiom von der Weltfunktion[1]): *Das Gesetz des physikalischen Geschehens bestimmt sich durch eine Weltfunktion H, die folgende Argumente enthält:*

$$(1)\qquad g_{\mu\nu},\quad g_{\mu\nu l}=\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial w_l},\quad g_{\mu\nu lk}=\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial w_l\,\partial w_k},$$

$$(2)\qquad q_s,\quad q_{sl}=\frac{\partial q_s}{\partial w_l},\qquad (l,k=1,2,3,4)$$

und zwar muß die Variation des Integrals

$$\int H\sqrt{g}\,d\omega$$

$$(g=|g_{\mu\nu}|,\quad d\omega=dw_1\,dw_2\,dw_3\,dw_4)$$

für jedes der 14 Potentiale $g_{\mu\nu}$, q_s verschwinden.

An Stelle der Argumente (1) können offenbar auch die Argumente

$$(3)\qquad g^{\mu\nu},\quad g_l^{\mu\nu}=\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial w_l},\quad g_{lk}^{\mu\nu}=\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial w\,\partial w_k}$$

treten, wobei $g^{\mu\nu}$ die durch g dividierte Unterdeterminante der Determinante g in Bezug auf ihr Element $g_{\mu\nu}$ bedeutet.

Axiom II (Axiom von der allgemeinen Invarianz[2]): *Die Weltfunktion H ist eine Invariante gegenüber einer beliebigen Transformation der Weltparameter w_s.*

Axiom II ist der einfachste mathematische Ausdruck für die Forderung, daß die Verkettung der Potentiale $g_{\mu\nu}$, q_s an und für

Principe de moindre action

On décrit un système physique par une *action* S, qui dépend d'une *trajectoire arbitraire dans l'espace des configurations*.
Les trajectoires *physiques* correspondent aux extrema de l'action.

Exemple : Si

$$S[x(t)] = \int \mathrm{d}t \, \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t)) \,, \qquad \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t)) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x)$$

alors la fonctionnelle $S[x(t)]$ est extrêmale, $\delta S[x(t)] = 0$, si

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \,.$$

Ici on retrouve le principe fondamental de la dynamique

$$m\ddot{x} = -V'(x) = F(x)$$

L'action d'Einstein-Hilbert

Action :

$$\boxed{S_{\mathsf{EH}}[g_{\mu\nu}(x)] = \frac{1}{2\kappa}\int \mathrm{d}^4x\, R(x)\sqrt{-g(x)}}$$

avec $R(x)$ le scalaire de Ricci et $g(x) = \det(g_{\mu\nu}(x))$.
Le principe de l'action stationnaire stipule que les équations de champs s'obtiennent en requérant $\delta S = 0$ pour toute petite variation de la métrique. Cela est équivalent à

$$0 = \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}(R\sqrt{-g}) = \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}}\sqrt{-g} + R\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}}$$

La géométrie différentielle donne

$$\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} \qquad \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{\mu\nu}$$

et on retrouve

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0}.$$

L'action d'Einstein-Hilbert

Les avantages de l'approche variationnelle :

- Les lois physiques découlent d'une formulation générale, simple, et sans ambiguités.
  Exemple : on peut ajouter toute la matière qu'on veut, par exemple le modèle standard.

$$S[g, A, \psi, H] = \int \mathrm{d}^4 x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2\kappa} R + \mathcal{L}_{\mathsf{SM}}(A, \psi, H) \right)$$

- On peut *classifier* les généralisations possibles de la théorie (voir plus loin).
- On obtient une recette automatique de quantification:

$$Z = \int \mathcal{D}g \, \mathcal{D}A \, \mathcal{D}\psi \, \mathcal{D}H \, \exp \left(\frac{i}{\hbar} S[g, A, \psi, H] \right)$$

Nécessité de faire de l'analyse fonctionnelle poussée $\rightarrow$ *espaces de Hilbert* !

Généralisations

- En 4 dimensions d'espace-temps, *l'action la plus générale qui n'utilise que la métrique et ses dérivées est déduite de*

$$\mathcal{L} = \alpha\sqrt{-g}R - 2\lambda\sqrt{-g} + \beta\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} R_{\alpha\beta\rho\sigma} + \gamma\sqrt{-g}E$$

  avec

$$E = R^2 + R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} - 4R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

  le densité d'Euler. Les termes en β et γ sont topologiques et les équations obtenues sont

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(R - 2\Lambda) = 0}$$

  avec $\Lambda = \frac{\lambda}{\alpha}$.
- En supprimant certaines hypothèses, on obtient les théories de *gravité modifiée*.
- En 2 dimensions on peut aussi considérer l'action d'Einstein-Hilbert $\rightarrow$ théorie des cordes.

Merci pour votre attention!