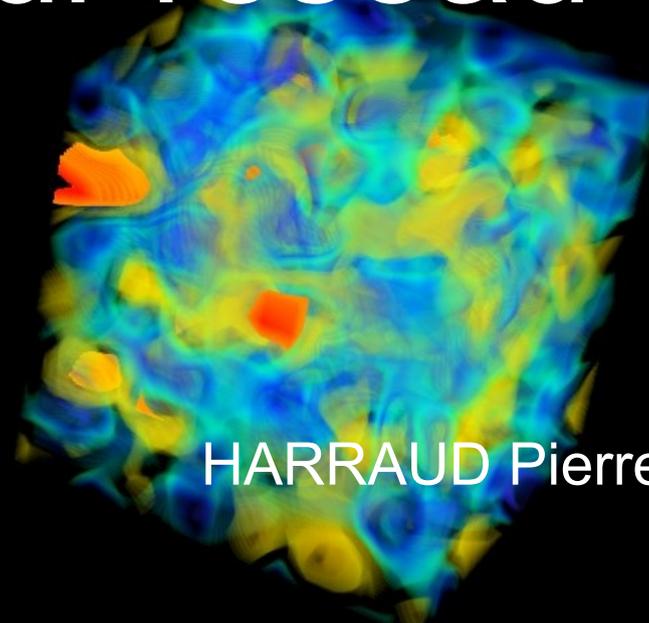
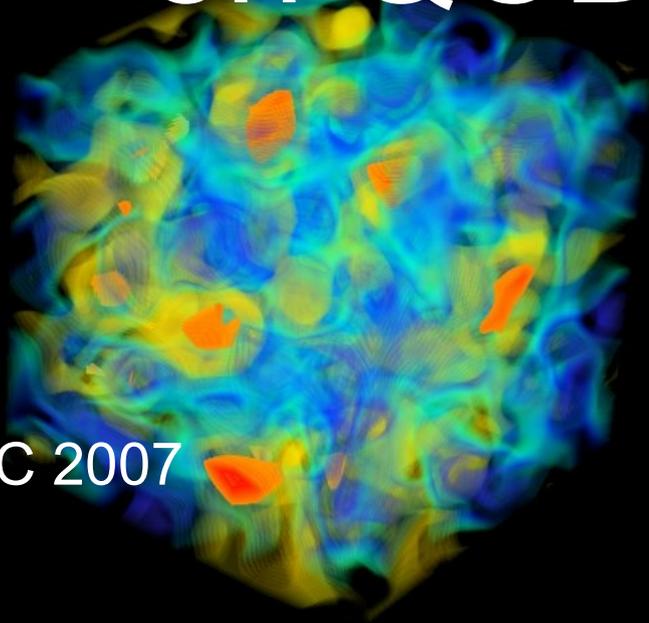
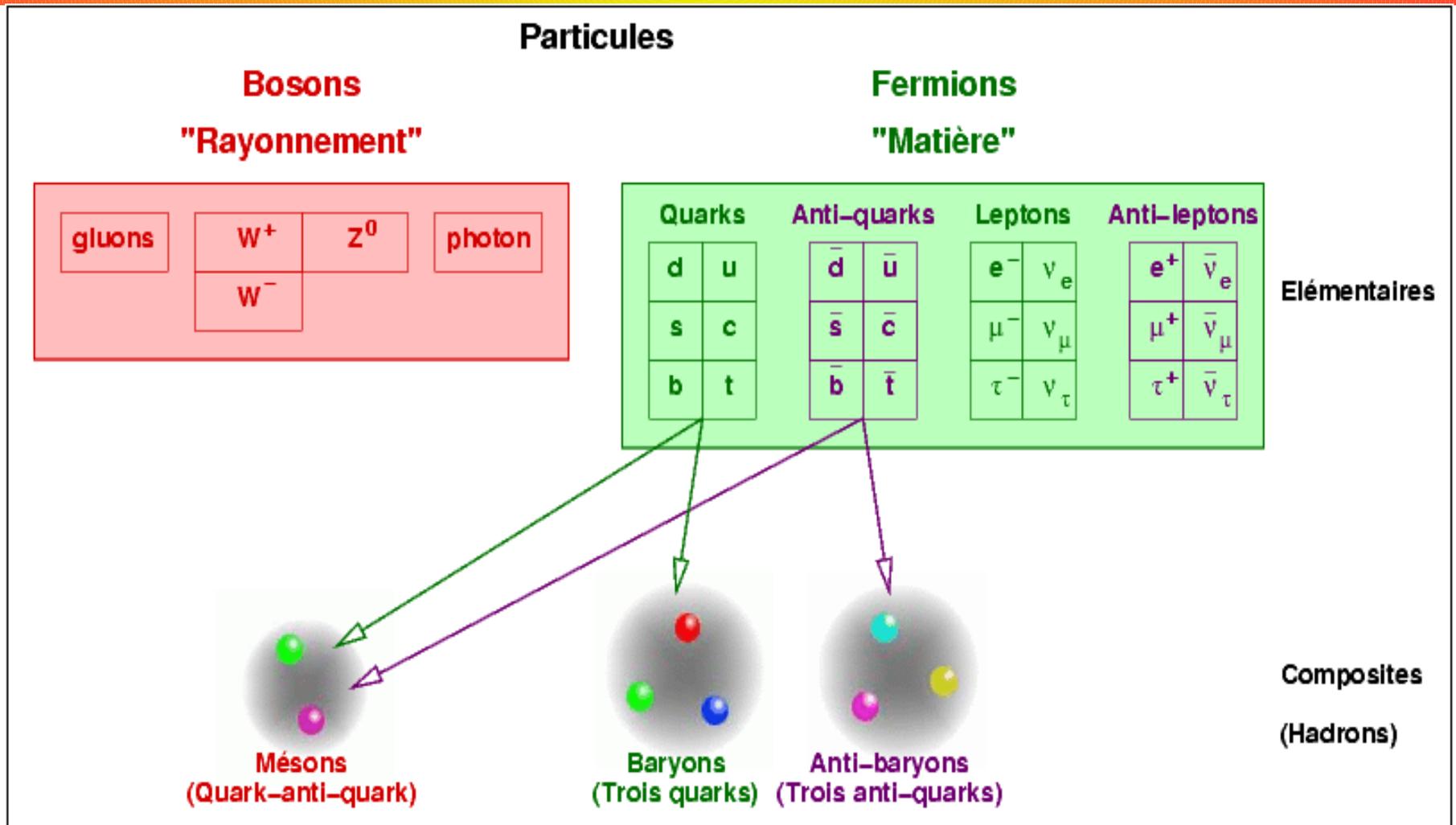


Méthodes de calcul en QCD sur réseau



La QCD

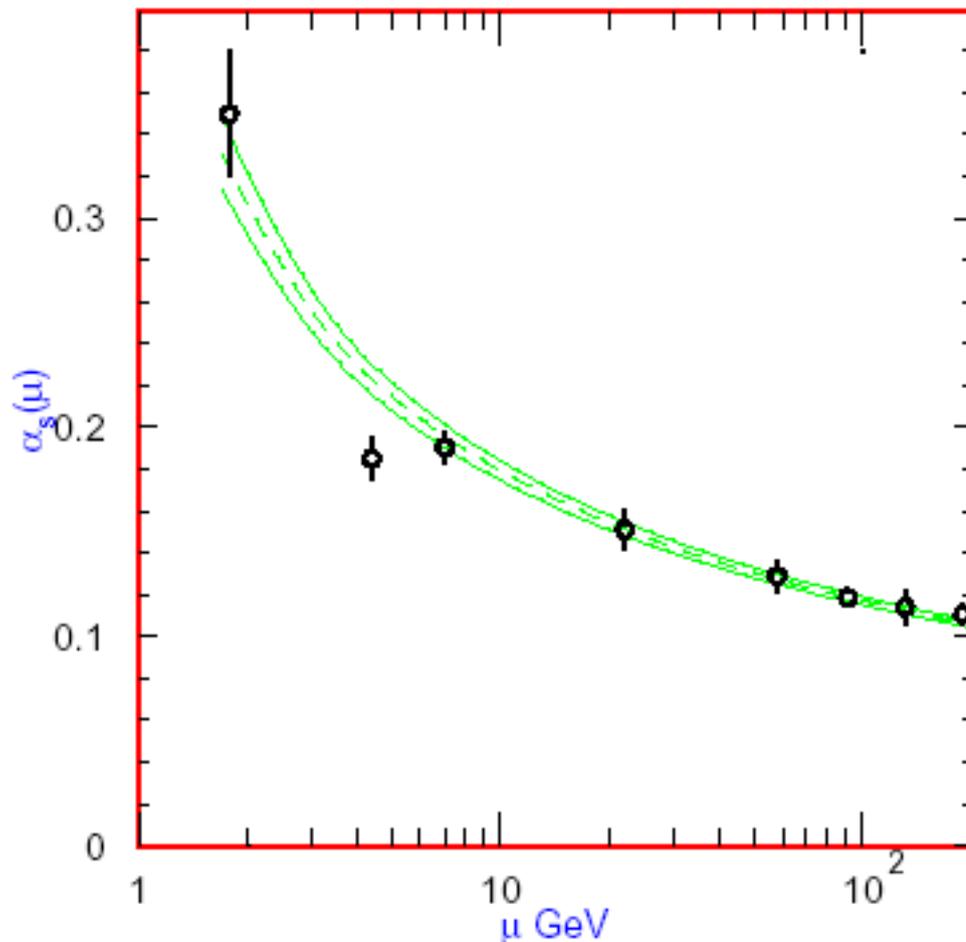


- 6 saveurs de quarks différentes, 3 degrés de liberté de couleur
- 8 gluons médiateurs de l'interaction forte
- Les paramètres de la QCD sont la constante de couplage et les masses des quarks

Les différents régimes de la QCD

- **La liberté asymptotique :**

Aux hautes énergies
(donc aux faibles distances)
la constante de couplage
de la QCD $\rightarrow 0$: quarks
“libres”.



Calculs QCD perturbatifs
confirment la théorie.

Variation de la constante de couplage en fonction de l'énergie

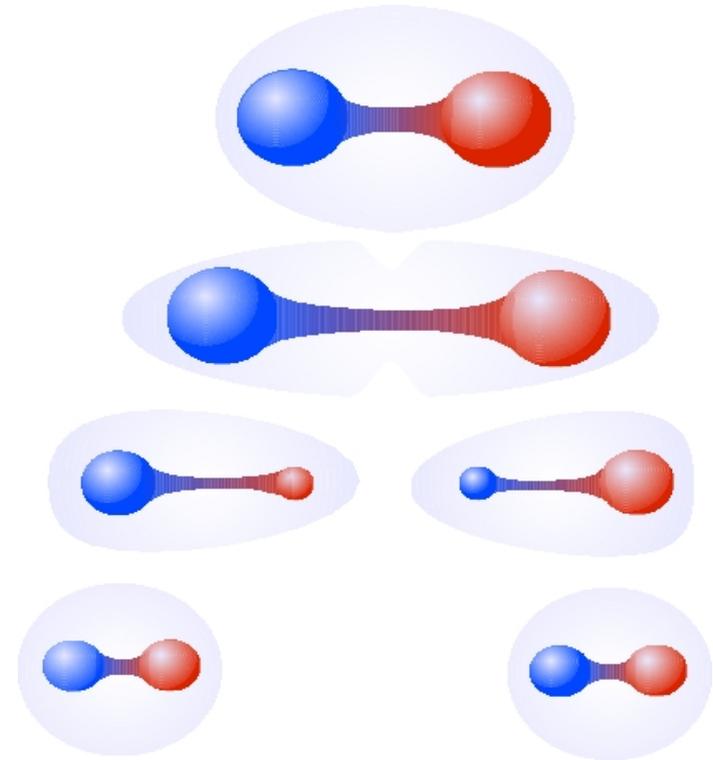
Les différents régimes de la QCD

- **Le confinement :**

→ Aux faibles énergies ou aux grandes distances la constante de couplage devient grande. C'est le **domaine non-perturbatif** de la QCD.

→ L'étude des propriétés des hadrons (énergie ~ 1 GeV) doit s'effectuer dans ce domaine.

→ Pour accéder aux prédictions de la théorie des champs QCD, on va alors résoudre ses équations sur un espace-temps discrétisé tel que pour un pas de réseau $\rightarrow 0$, on retrouve les quantités physiques (masse des hadrons...).



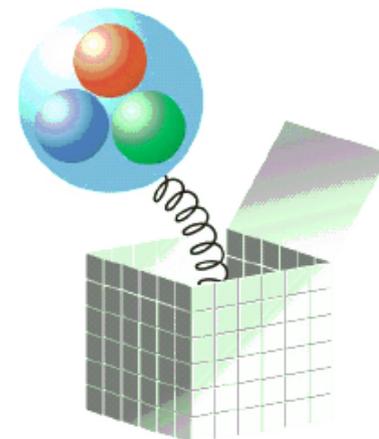
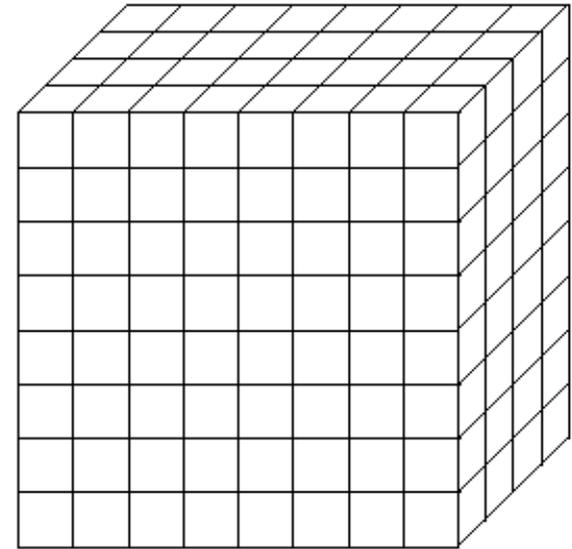
Étapes de calcul

Étapes :

- se placer sur un réseau d'espace-temps (avec 4 dimensions équivalentes)
- déterminer sur ce réseau les champs de gluons représentatifs de la physique
- calculer la propagation des quarks dans ce champ
- Calcul des observables physiques à partir des propagateurs de quarks

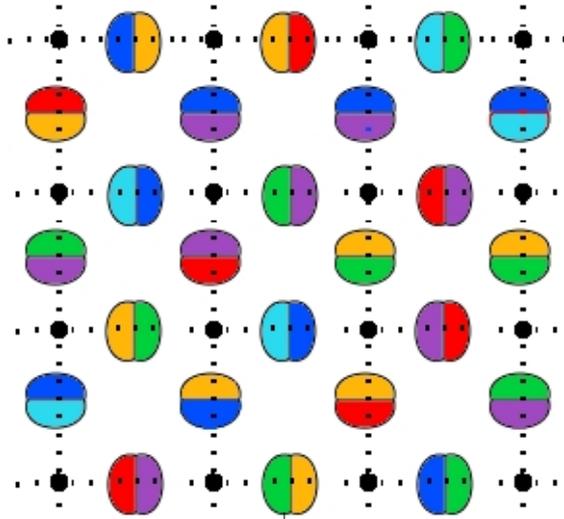
On se place sur des réseaux

- 24 pas pour chaque direction spatiale
- 48 pour la direction temporelle.



Génèse d'un réseau coloré

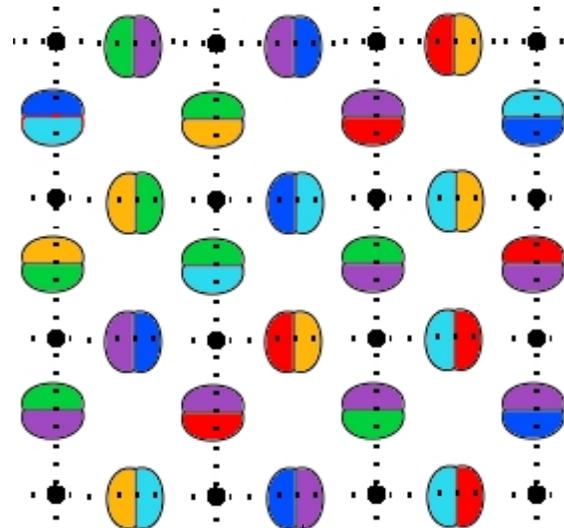
Configuration U1



Poids statistique associé

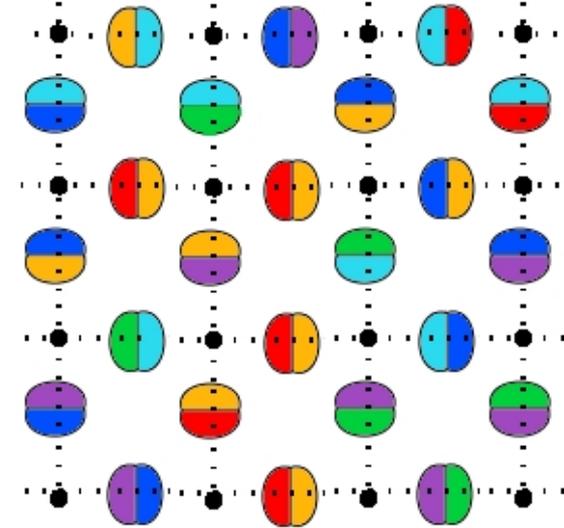
$e^{-S(U1)}$

Configuration U2



$e^{-S(U2)}$

Configuration U3



$e^{-S(U3)}$

où $S(U)$ est l'action associée à la configuration

But : générer des configurations qui ont la **distribution statistique** voulue ; on génère préférentiellement les configurations ayant les plus grands poids ,c'est à dire les plus petites actions.

Outil: méthode type **Monte-Carlo** pour calculer un **ensemble de configuration à l'équilibre**.

Génèse d'un réseau coloré

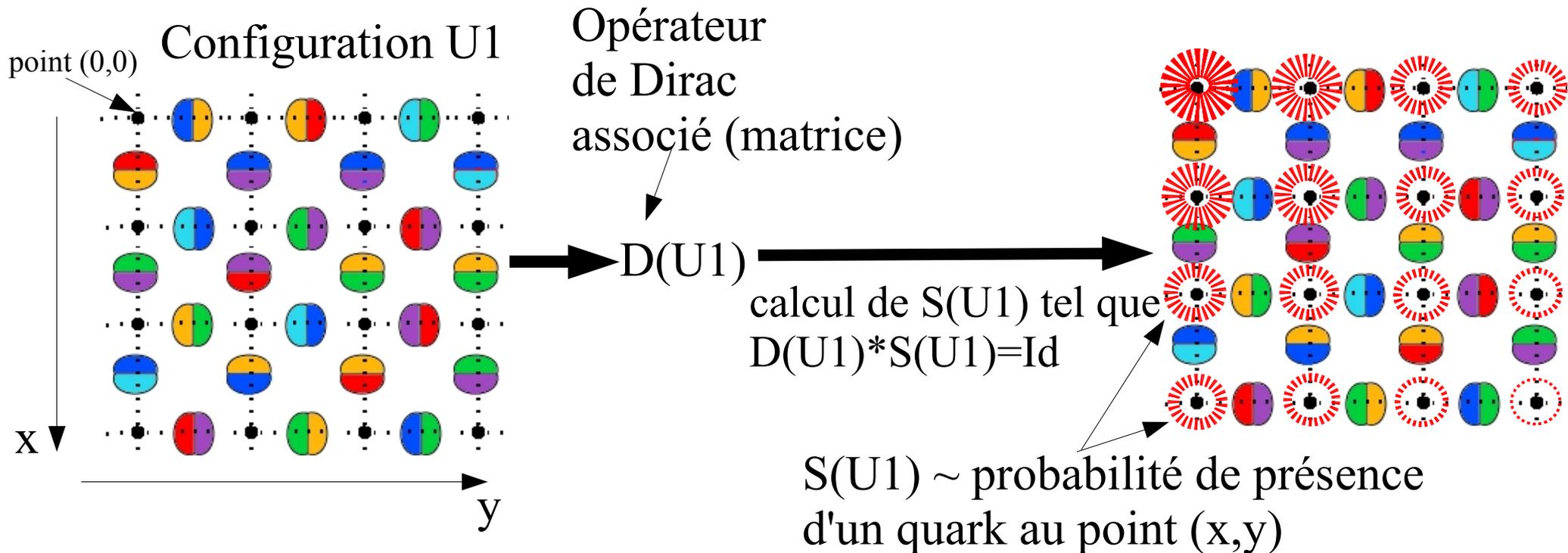
En pratique :

- le champ de gluon entre 2 points est représenté par une **matrice** complexe 3×3 appartenant au groupe **SU(3)**
- pour un réseau 4D $24^3 \times 48$: $\sim 670\,000$ matrices complexes 3×3 soit 12 millions de nombres réels
- utilisation de méthodes Monte-Carlo perfectionnées (Hybrid Monte-Carlo)
- on génère N configurations (~ 100) approchant la distribution des champs de gluons à l'équilibre.
Erreur statistique en $1/\sqrt{N}$.

Propagation des quarks

But : calculer la probabilité qu'un quark se propage du point $(0,0)$ au point (x,y) pour chaque configuration puis moyenner sur l'ensemble des configurations

Outils : en théorie des champs l'équation décrivant le comportement des particules de spin $\frac{1}{2}$ est l'équation de Dirac.
Sur réseau il faut déterminer un opérateur de Dirac discrétisé D (\sim matrice) et calculer son inverse $S =$ propagateur du quark.



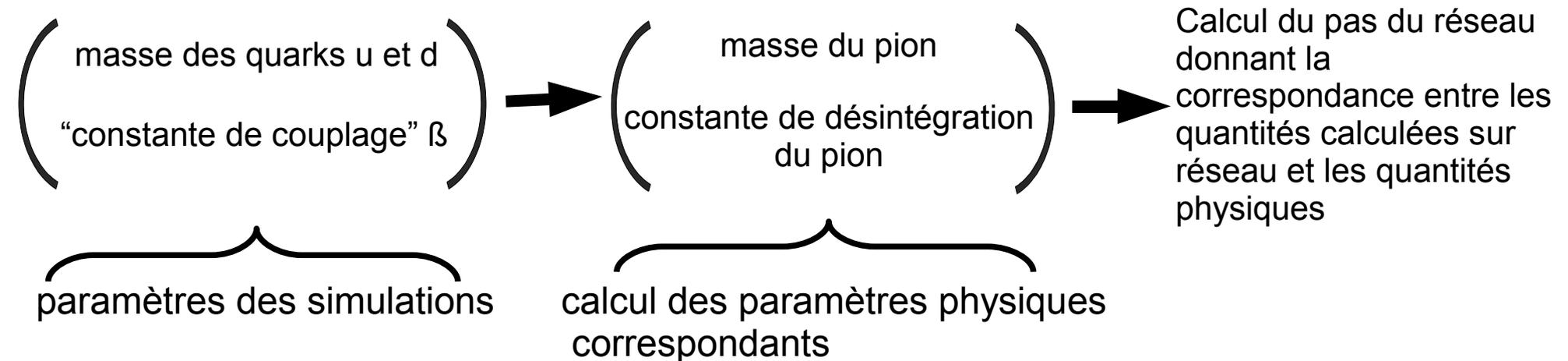
Propagation des quarks

En pratique :

- il existe différentes méthodes pour discrétiser l'opérateur de Dirac sur un réseau, chacune ayant ses propres caractéristiques. (quarks «naifs», quarks de Wilson, Staggered, Domain Wall, Overlap et Twisted Mass)

- La matrice D à inverser est de taille $(12 \times V^3 \times T)^2$ soit une matrice de $(8 \cdot 10^6) \times (8 \cdot 10^6)$ pour un réseau $24^3 \times 48$.

- Les paramètres de l'opérateur de Dirac sont la constante de couplage et les masses de quarks.

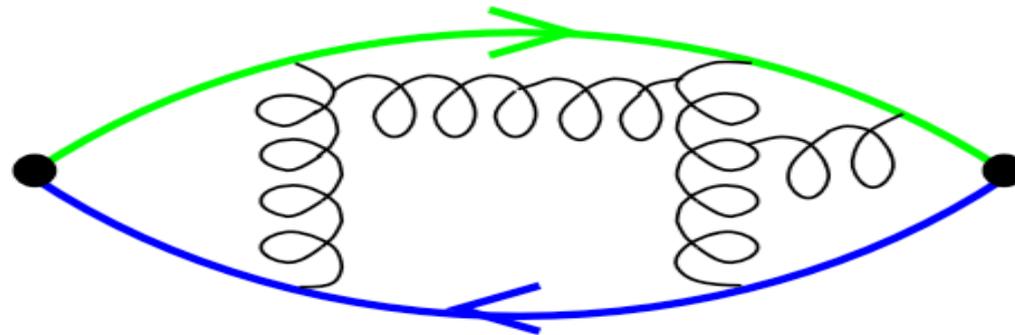


Conditions des simulations

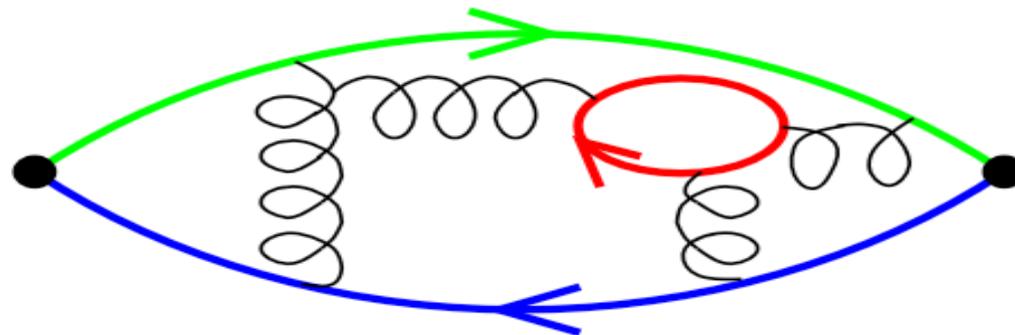
- Les simulations actuelles s'effectuent avec une constante de couplage réaliste . Le pas du réseau est assez fin pour représenter la physique du continu.(pas du réseau $a \leq 0.1$ fm)
- Les masses de pion les plus faibles que l'on peut atteindre sont d'environ 250 Mev (masse du pion physique = 140 MeV).
Pour déterminer la valeur des quantités calculées à la masse du pion physique, on les calcule à différentes masse de pion et on utilise une théorie (perturbation chirale) pour extrapoler les résultats.
- Les tailles de réseau utilisées sont $\sim 2-3$ fm (à comparer avec le rayon physique d'un proton ~ 1 fm)

Conditions des simulations

- Avant : quarks de la mer négligés.(calculs dits quenched)
 - Maintenant : les quarks de la mer pris en compte (calcul unquenched)
- Indication du nombre de saveurs de quarks de la mer considérés.
(ex : $N_f = 2$: quarks de la mer u et d, généralement masses dégénérées)



(A) Quenched QCD: quark loops neglected



(B) Full QCD

Récapitulatif

- **Méthode Monte-Carlo** créant un **ensemble de configurations** de gluon sur un réseau (cause des **erreurs statistiques**)
- Détermination du propagateur des quarks avec différents types de discrétisation possibles.
- Paramètres des simulations voulus tels que l'on retrouve les quantités physiques.
Cependant les **masses de pion atteintes trop grandes**.
On trace les quantités calculées en fonction de la masse du pion puis extrapolation.

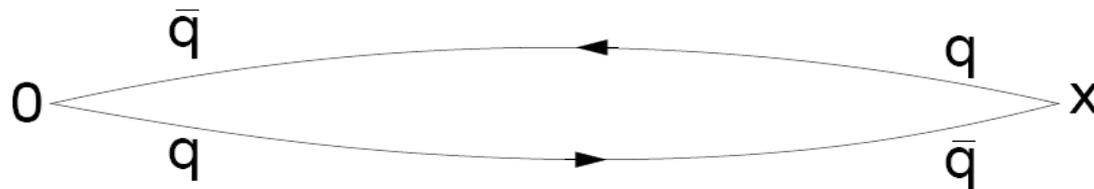
Calcul des quantités physiques

But : calculer comment se propage les hadrons dans les champs de gluons générés

Méthode:

- On construit des objets mathématiques = champs interpolants, ayant les bons nombres quantiques **du hadron considéré** (spin, parité...)
- On calcule ensuite la propagation de ces objets **grâce aux propagateurs des quarks** calculés et on **moyenne sur l'ensemble des configurations**.

Exemple: calcul de la masse des mésons



Calcul de la masse des hadrons

- Un champ interpolant donné décrit une **particule et ses excitations**
- Comportement sur le réseau pour une particule d'impulsion nulle:

$$C(t) = \sum_n A_n e^{(-M_n t)}$$

• On trace :

$$M_{eff}(t) = \log\left(\frac{C(t)}{C(t+1)}\right)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M_{eff}(t) = M_0$$

→ Temps grand sélectionne particule la plus légère = plateau

Détermination de la masse du π^-

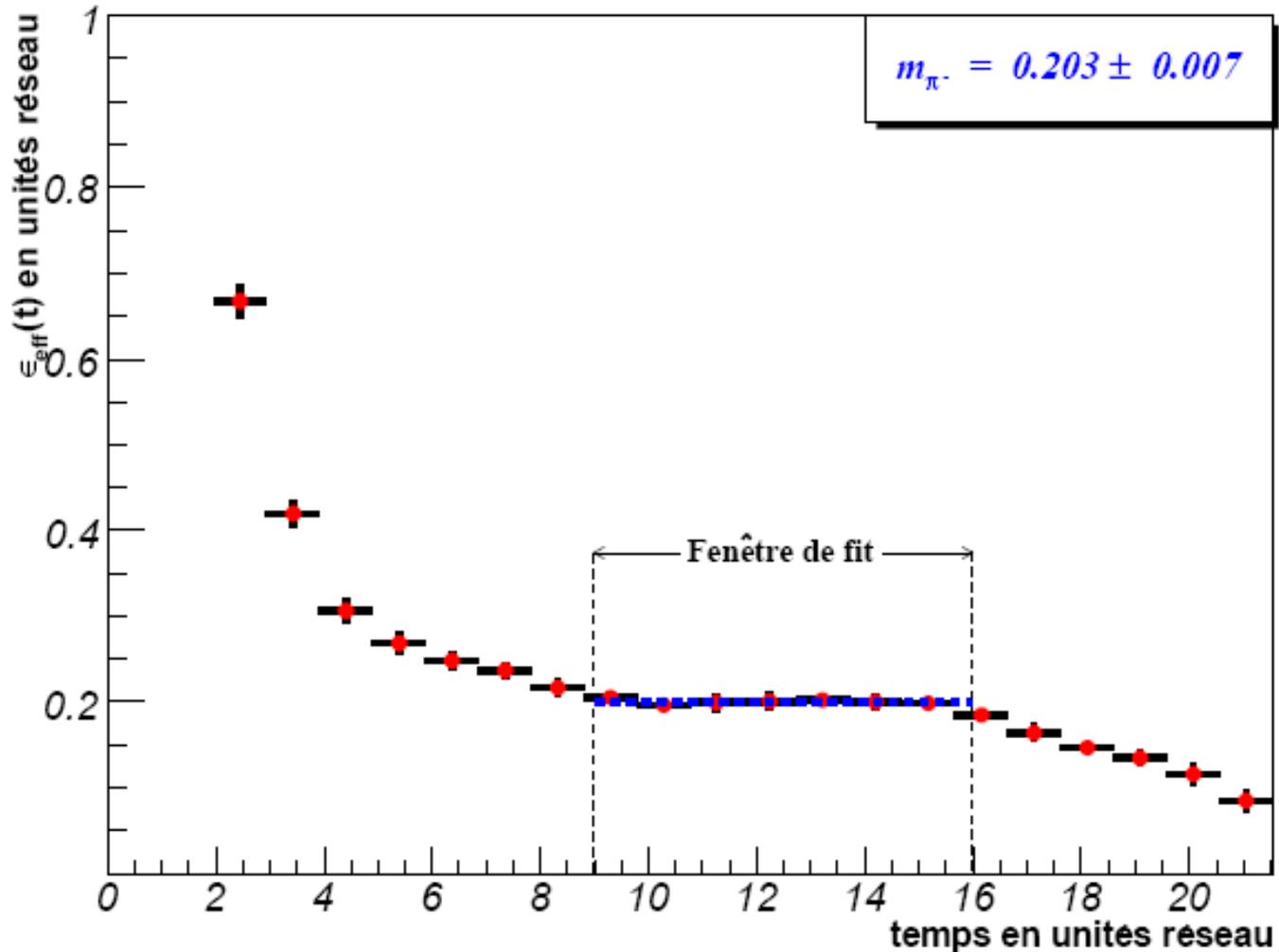


FIG. 3.4 – ϵ_{eff} en fonction du temps pour la détermination de la masse du π^-

$$M_{physique} = a^{-1} M_{reseau} \qquad M_{\pi^-} = 460 MeV$$

$$a = 0.087 \text{ fm}$$

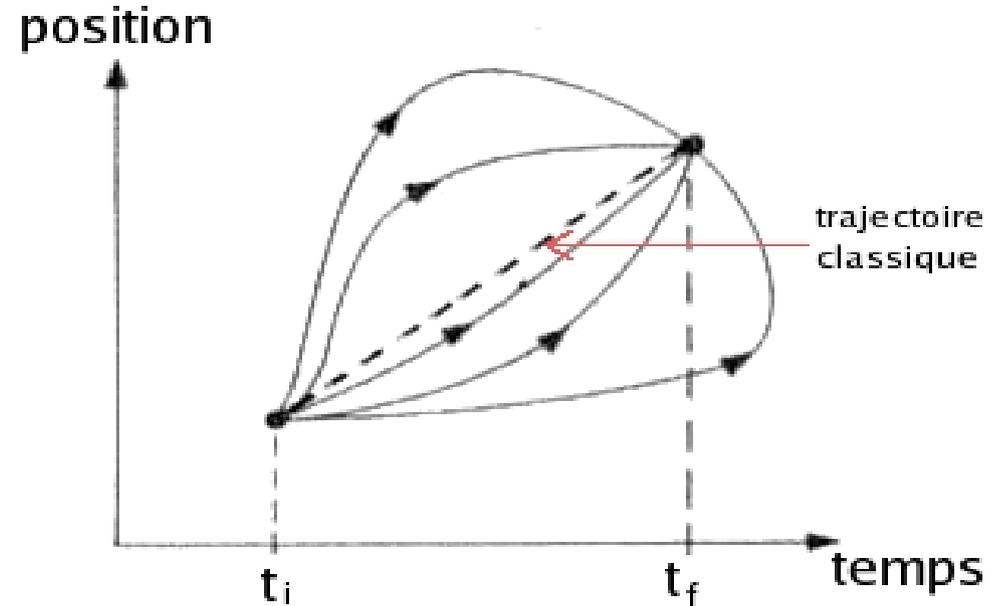
CONCLUSION

Quels sont les éléments nécessaires à la compréhension des résultats en QCD sur réseau ?

- Type de discrétisation
- Nombre de quarks dans la mer
- Erreurs = erreurs statistiques Monte-Carlo
- Fit d'un plateau = sélection de la particule la plus légère
- Extrapolation à la masse de pion physique

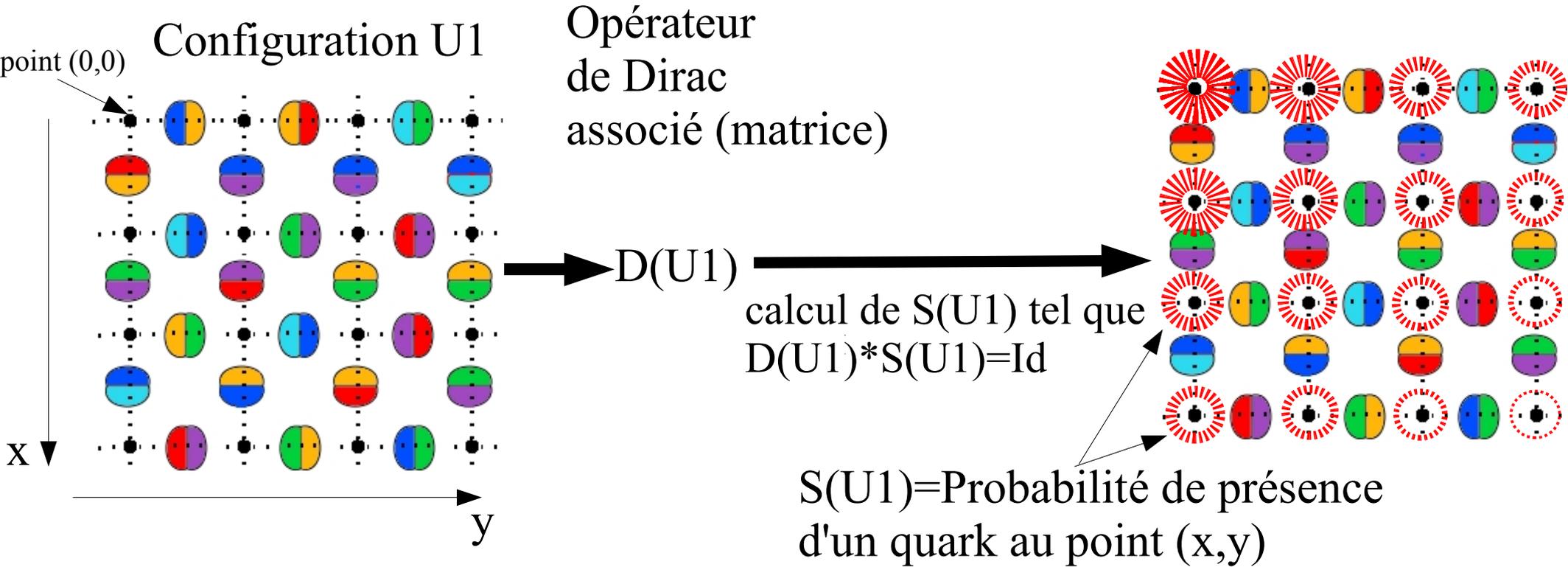
Integrale de chemin et variable de champs

Le chemin suivi par une particule quantique est la somme de tous les chemins possibles ponderes par l'action associee au chemin. Les contributions principales proviennent de la trajectoire classique.



La QCD est batie sur la theorie des champs.

Génèse d'un réseau coloré



But : calculer la probabilité qu'un quark se propage du point (0,0) au point (x,y) pour chaque configuration.

Outils : il faut inverser l'opérateur de Dirac associé à chaque configuration