



Caractérisation de la stabilité en temps/fréquence. Application aux comparaisons d'horloges.

Pierre Urich
Ingénieur-chercheur LNE

Cours 2007 de l'unité « Relativité et Temps »
Formation M1 du « Master de Sciences de l'Univers et Technologies Spatiales »
de l'Observatoire de Paris

Décembre 2006

1. Introduction.

2. Modélisation du signal.

3. Caractérisation du bruit.

3.1. Domaine des fréquences : densité spectrale.

3.2. Domaine temporel : variance.

4. Variance d'Allan AVAR.

4.1. Variance à deux échantillons.

4.2. Variance d'Allan avec recouvrement.

4.3. Relation densité spectrale et variance d'Allan : Fonction de transfert.

4.4. Tracé bi-logarithmique de la densité spectrale et de l'écart-type d'Allan.

4.5. Incertitudes sur la variance d'Allan : loi du X^2 (« chi-deux ») et intervalles de confiance.

4.6. Détection d'une dérive linéaire de fréquence.

4.7. Détection d'un signal périodique dans $y(t)$.

5. Variance d'Allan modifiée MVAR.

5.1. Limite de AVAR pour les bruits de phase.

5.2. Définition de MVAR.

5.3. Relation densité spectrale et variance d'Allan modifiée MVAR.

5.4. Tracé bi-logarithmique de l'écart-type d'Allan modifié.

5.5. Incertitudes sur MVAR.

5.6. Relation entre AVAR et MVAR.

6. Variance d'Allan temporelle TVAR.

6.1. Définition de TVAR.

6.2. Tracé bi-logarithmique de l'écart-type temporel d'Allan.

7. Questions non développées dans ce document.

7.1. Mesures non périodiques.

7.2. Temps morts entre les mesures.

7.3. Autres types de variances.

7.4. Bruits non gaussiens.

8. Quelques exemples.

8.1. Caractérisation des performances des horloges atomiques.

8.2. Comparaisons d'horloges distantes par GPS.

8.3. Spécifications de besoin du lien micro-ondes ACES.

Références bibliographiques.

1. Introduction.

L'essentiel de ce document s'inspire directement ou indirectement des références [1], [2], [3] et [13]. Après une description de la modélisation du signal telle qu'elle est utilisée dans l'ensemble du cours, la caractérisation du bruit est spécifiée dans le domaine des fréquences par la densité spectrale et dans le domaine temporel par la variance. On montre à cette occasion pourquoi les bruits présents dans les oscillateurs ne permettent pas le calcul d'une variance classique, ce qui implique d'utiliser d'autres variances pour caractériser leur stabilité temporelle. La variance d'Allan AVAR est une solution qui s'est imposée avec le temps pour plusieurs raisons qui apparaissent au cours de l'analyse détaillée de cet outil. La variance d'Allan AVAR est cependant incapable de discriminer entre différents types de bruits de phase, et c'est la raison pour laquelle la variance d'Allan modifiée MVAR a été introduite, qu'on peut transformer aisément en variance d'Allan temporelle TVAR. Après un rapide aperçu de problèmes qui peuvent se poser sur des données réelles, ce cours est illustré par plusieurs exemples choisis dans des analyses récentes faisant appel aux différentes variances d'Allan.

2. Modélisation du signal.

Un signal temporel délivré par un oscillateur idéal, d'amplitude V_0 et de fréquence nominale ν_0 , est de la forme :

$$V(t) = V_0 \times \sin(2 \times \pi \times \nu_0 \times t) \quad (1)$$

Un signal réel est cependant perturbé. On le modélise sous la forme :

$$V(t) = (V_0 + \varepsilon(t)) \times \sin(2 \times \pi \times \nu_0 \times t + \phi(t)) \quad (2)$$

où $\varepsilon(t)$ est la perturbation en amplitude et $\phi(t)$ la perturbation en phase, qui peut aussi être exprimée comme un perturbation de fréquence.

Ces perturbations ont des composantes déterministes et aléatoires. On fait dans la suite l'hypothèse que les fluctuations déterministes ont été éliminées, et on ne considère donc que des phénomènes aléatoires (à l'exception notable des chapitres 4.6 et 4.7). On note $\varphi(t)$ la partie aléatoire de $\phi(t)$. Par ailleurs, sauf dans le cas de composants non-linéaires qui ne seront pas abordés ici, la contribution de $\varepsilon(t)$ aux fluctuations de fréquence est négligeable. Par conséquent on ne considère dans la suite que le modèle suivant :

$$V(t) = V_0 \times \sin(2 \times \pi \times \nu_0 \times t + \varphi(t)) \quad (3)$$

où $\varphi(t)$ est le bruit de phase exprimé en radian.

On définit, pour une date t donnée, l'écart de temps instantané $x(t)$ en fonction de l'écart entre le signal nominal (équation (1)) et le signal perturbé (équation (3)) par :

$$x(t) = \frac{\varphi(t)}{2 \times \pi \times \nu_0} \quad (4)$$

La fréquence instantanée $\nu(t)$ est donnée par :

$$\nu(t) = \frac{1}{2 \times \pi} \times \frac{d}{dt} (2 \times \pi \times \nu_0 \times t + \varphi(t)) = \nu_0 + \frac{1}{2 \times \pi} \times \frac{d\varphi(t)}{dt} \quad (5)$$

Par conséquent, l'écart de fréquence instantané est donné par :

$$\Delta \nu(t) = \nu(t) - \nu_0 = \frac{1}{2 \times \pi} \times \frac{d\varphi(t)}{dt} \quad (6)$$

On définit enfin l'écart de fréquence normé instantané $y(t)$ par :

$$y(t) = \frac{\nu(t) - \nu_0}{\nu_0} = \frac{1}{2 \times \pi \times \nu_0} \times \frac{d\varphi(t)}{dt} \quad (7)$$

Dans ces conditions, on obtient aisément :

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad (8)$$

Si on calcule la moyenne de $y(t)$ sur un intervalle de temps de durée τ à partir de la date t_k , on obtient :

$$\overline{y(t_k)} = \frac{1}{\tau} \times \int_{t_k}^{t_k + \tau} y(u) \times du \quad (9)$$

Par abus de langage, on note souvent $\overline{y(t_k)}$ par $\overline{y_k}$.

D'après les équations (7) et (8), on obtient :

$$\overline{y_k} = \frac{\varphi(t_k + \tau) - \varphi(t_k)}{2 \times \pi \times \nu_0 \times \tau} = \frac{x(t_k + \tau) - x(t_k)}{\tau} \quad (10)$$

On constate donc que la moyenne de l'écart de fréquence normé instantané entre deux instants consécutifs dépend de la durée de l'intervalle considéré. Par abus de langage, on note aussi souvent $x(t_k)$ par x_k .

Les relations entre les différentes quantités décrites dans ce chapitre sont modélisées par le tableau suivante (d'après [3]), à lire de gauche à droite et de haut en bas.

Tableau 1. Relations fondamentales entre temps et fréquence dans le domaine temporel.

	Phase	Opérateur	Fréquence
Grandeur directe	$\varphi(t)$ [radian]	$\frac{1}{2 \times \pi} \times \frac{d}{dt}$	$\Delta\nu(t)$ [Hertz]
Facteur multiplicatif	$\frac{1}{2 \times \pi \times \nu_0}$		$\frac{1}{\nu_0}$
Grandeur induite	$x(t)$ [seconde]	$\frac{d}{dt}$	$y(t)$ [sans dimension]

Dans la suite, les indices x ou y appliqués à des quantités se rapportent explicitement à x(t) ou y(t) tels que définis dans ce chapitre.

3. Caractérisation du bruit.

On ne présente ici qu'une version très simplifiée de la caractérisation du bruit des oscillateurs. On rappelle que seules les parties aléatoires du signal sont considérées.

3.1. Domaine des fréquences : densité spectrale.

Pour décrire la stabilité des oscillateurs dans le domaine des fréquences, on a recourt aux densités spectrales. La formulation mathématique de la densité spectrale est la suivante. Pour un processus aléatoire p(t) stationnaire au sens large (ce critère est lié à l'existence de la fonction d'autocorrélation définie ici, disons simplement que c'est le cas dans ce qui suit), on peut calculer la fonction d'autocorrélation $R_p(\tau)$ qui peut s'écrire:

$$R_p(\tau) = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2 \times \Omega} \int_{-\Omega}^{+\Omega} p(u + \tau) \times p(u) \times du \right] \quad (11)$$

A partir de cette fonction d'autocorrélation, la densité spectrale bilatérale $S_p^{TS}(f)$ (TS pour « Two Sided », c'est à dire sur tout le spectre des fréquences de $-\infty$ à $+\infty$) peut se déduire par une transformée de Fourier donnée par :

$$S_p^{TS}(f) = TF[R_p(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} R_p(u) \times e^{-2 \times i \times \pi \times f \times u} \times du \quad (12)$$

Une interprétation physique de la densité spectrale est qu'elle caractérise la répartition de l'énergie du signal considéré dans l'espace des fréquences (le « spectre » des fréquences).

Dans le cas qui nous préoccupe, la fonction $R_p(\tau)$ n'est jamais aléatoire. Elle est réelle, puisque p(t) est réelle. La conséquence en est que $S_p^{TS}(f)$ est une fonction paire, et la fonction décrite par l'équation (12) peut se simplifier en ne considérant plus que les fréquences positives du spectre. C'est la densité spectrale unilatérale $S_p(f)$, donnée par :

$$S_p(f) = 2 \times S_p^{TS}(f) \quad \text{pour } f \geq 0 \quad (13)$$

$$S_p(f) = 0 \quad \text{pour } f < 0 \quad (14)$$

d'où l'expression :

$$S_p(f) = 2 \times \int_0^{+\infty} R_p(u) \times e^{-2 \times i \times \pi \times f \times u} \times du \quad (15)$$

Dans la suite, on ne considère que des densités spectrales de cette forme.

Pour chacune des grandeurs définies dans le chapitre 2, on peut produire une densité spectrale suivant les formules (11) et (15). On peut ainsi calculer $S_\varphi(f)$, $S_{\Delta v}(f)$, $S_x(f)$ et $S_y(f)$. Les relations fondamentales entre ces densités spectrales sont données dans le tableau 2 (d'après [3]), à lire de haut en bas et de gauche à droite.

Tableau 2. Relations fondamentales entre les densités spectrales dans le domaine des fréquences.

	Phase	Facteur multiplicatif	Fréquence
Grandeur directe	$S_\varphi(f)$ [Hertz ⁻¹]	f^2	$S_{\Delta v}(f)$ [Hertz]
Facteur multiplicatif	$\frac{1}{4 \times \pi^2 \times v_0^2}$		$\frac{1}{v_0^2}$
Grandeur induite	$S_x(f)$ [Hertz ⁻³]	$4 \times \pi^2 \times f^2$	$S_y(f)$ [Hertz ⁻¹]

L'institut des ingénieurs en électricité et électromagnétisme (IEEE), organisation internationale, recommande depuis 1974 que l'instabilité de la partie aléatoire de la fréquence d'un oscillateur soit caractérisée par la densité spectrale $S_y(f)$ de l'écart de fréquence normé instantané $y(t)$. Or l'expérience montre que les bruits affectant un oscillateur peuvent être modélisés dans cette densité spectrale par une loi de puissance, qui s'écrit :

$$S_y(f) = \sum_{\alpha=-2}^{\alpha=+2} h_\alpha \times f^\alpha \quad (16)$$

où les h_α sont des coefficients indépendants de la fréquence.

A chaque terme correspond une modulation de bruit précise :

- $\alpha = -2$: bruit de marche aléatoire de fréquence (Random Walk Frequency Noise) ;
- $\alpha = -1$: bruit de scintillation de fréquence (Flicker Frequency Noise) ;
- $\alpha = 0$: bruit blanc de fréquence (White Frequency Noise), ou bruit de marche aléatoire de phase (Random Walk Phase Noise) ;
- $\alpha = +1$: bruit de scintillation de phase (Flicker Phase Noise) ;
- $\alpha = +2$: bruit blanc de phase (White Phase Noise).

A chaque bruit correspond une cause qui lui est propre. Ces relations de cause à effet, qui sont encore aujourd'hui des sujets de recherche, ne seront pas abordées ici.

3.2. Domaine temporel : variance.

Dans tout ce qui suit, on fait l'hypothèse que les bruits sont gaussiens. Une variable aléatoire gaussienne peut être définie par deux grandeurs : la tendance centrale, caractérisée par la moyenne ; et la dispersion, caractérisée par la variance. Si le nombre d'échantillons est infini, on aura accès aux grandeurs dites « vraies ». On note par « $\langle \rangle$ » la moyenne sur une infinité d'échantillons.

Une des expressions de la variance vraie de la variable $y(t)$ est donnée en fonction de la densité spectrale $S_y(f)$ par :

$$I^2(\tau) = \int_0^{\infty} S_y(f) \times |H_{\tau}(f)|^2 \times df \quad (17)$$

où $H_{\tau}(f)$ est ce que l'on appelle la « Fonction de transfert » de l'opérateur variance. Cette Fonction de transfert est la Transformée de Fourier de ce que l'on appelle la « Réponse impulsionnelle » de l'opérateur variance.

Pour déterminer cette Réponse impulsionnelle, on peut écrire la variance classique dans le domaine temporel sur une série infinie d'échantillons comme la moyenne infinie du carré des écarts à la moyenne :

$$\sigma^2(\tau) = \langle (\bar{y}_k - \bar{y})^2 \rangle \quad (18)$$

où \bar{y}_k est la moyenne sur un intervalle de durée τ entre les instants t_k et $t_k + \tau$, telle que décrite dans l'équation (9), et \bar{y} est la moyenne sur la totalité des échantillons \bar{y}_k considérés. Il est dans ce cas possible de soustraire la moyenne \bar{y} de chaque échantillon, de manière à avoir une série d'échantillons à moyenne nulle. Dans ces conditions, la variance $\sigma^2(\tau)$ s'écrit :

$$\sigma^2(\tau) = \langle (\bar{y}_k)^2 \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{\tau} \times \int_{t_k}^{t_k + \tau} y(u) \times du \right)^2 \right\rangle \quad (19)$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$\sigma^2(\tau) = \left\langle \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(u) \times h_{\tau}(\tau - u) \times du \right)^2 \right\rangle \quad (20)$$

avec $h_{\tau}(t)$ la Réponse impulsionnelle qui est recherchée. Cette fonction peut se décrire de la manière suivante : elle permet de sélectionner un intervalle normé à 1 entre deux dates consécutives séparées par une durée τ . On peut donc la représenter ainsi :

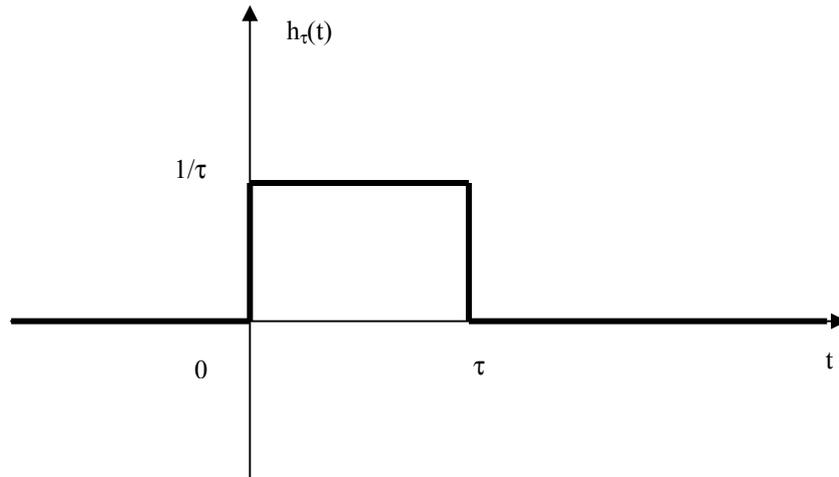


Figure 1. Réponse impulsionnelle de l'opérateur variance.

Il s'agit là d'une fonction « créneau » bien connue en traitement du signal, dont la Transformée de Fourier $H_\tau(f)$ est donnée par :

$$H_\tau(f) = \frac{\sin(\pi \times \tau \times f)}{\pi \times \tau \times f} \quad (21)$$

On peut alors représenter $(H_\tau(f))^2$ de la manière suivante entre 0 et l'infini :

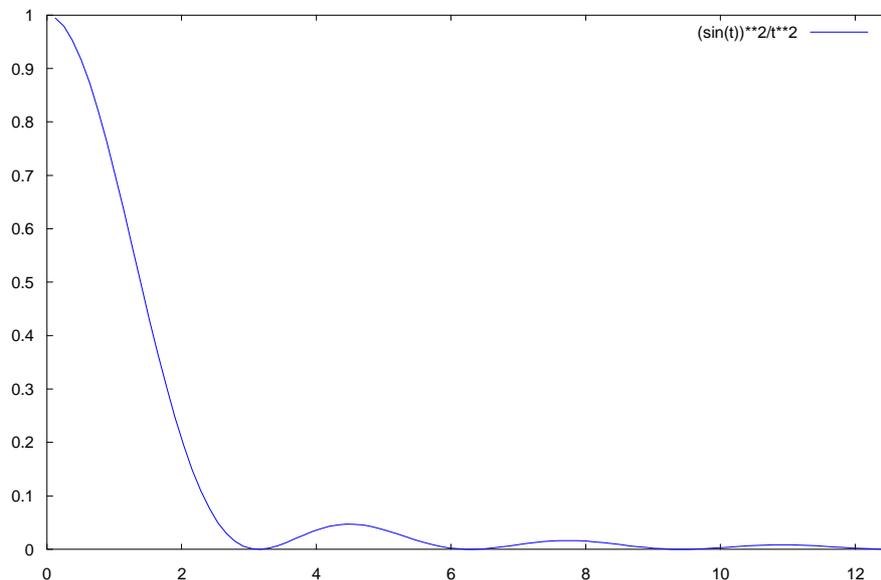


Figure 2. Fonction de transfert de l'opérateur variance.

Lorsque u tend vers l'infini, $\sin(u)$ reste borné par ± 1 , mais $1/u$ tend vers 0, et donc lorsque f tend vers l'infini, $(H_\tau(f))^2$ tend vers $1/f^2$, c'est à dire vers 0. Lorsque u tend vers 0, $\sin(u)$ tend vers u , et donc lorsque f tend vers 0, $(H_\tau(f))^2$ tend vers 1. C'est le point important de ce chapitre. Maintenant que la Fonction de transfert est connue, il faut en effet regarder la

convergence de l'intégrale de l'équation (17), en fonction de la puissance α de la fréquence f dans la densité spectrale $S_y(f)$. Cette équation (17) devient :

$$\sigma^2(\tau) = \int_0^{\infty} S_y(f) \times \frac{\sin^2(\pi \times \tau \times f)}{(\pi \times \tau \times f)^2} \times df = \sum_{\alpha=-2}^{\alpha=+2} h_{\alpha} \times \int_0^{\infty} f^{\alpha} \times \frac{\sin^2(\pi \times \tau \times f)}{(\pi \times \tau \times f)^2} \times df \quad (22)$$

- $\alpha = -2$: lorsque f tend vers 0, l'intégrale de (22) *ne converge pas* car la fonction de f tend vers l'infini, et la variance vraie n'est pas calculable ; lorsque f tend vers l'infini, l'intégrale de (22) converge car la fonction de f tend vers 0.

- $\alpha = -1$: lorsque f tend vers 0, l'intégrale de (22) *ne converge pas* car la fonction de f tend vers l'infini, et la variance vraie n'est pas calculable ; lorsque f tend vers l'infini, l'intégrale de (22) converge car la fonction de f tend vers 0.

- $\alpha = 0$: lorsque f tend vers 0, et lorsque f tend vers l'infini, l'intégrale de (22) converge.

- $\alpha = +1$: lorsque f tend vers 0, l'intégrale de (22) converge.

- $\alpha = +2$: lorsque f tend vers 0, l'intégrale de (22) converge.

La convergence lorsque f tend vers l'infini dans les cas $\alpha = +1$ et $\alpha = +2$ est assurée parce que dans les systèmes réels, on n'intègre pas jusqu'à l'infini. Dans tout système physique, il y a une fréquence de coupure haute f_h , qui peut par exemple se calculer simplement à partir de la période d'échantillonnage originale des mesures suivant $f_h = 1 / (2 \times \tau_0)$. Il peut cependant arriver que f_h soit très inférieure à cette valeur.

On constate donc qu'en présence des bruits de scintillation de fréquence (en f^1) et de marche aléatoire de fréquence (en f^2), la variance classique ne peut pas être calculée car l'intégrale de la variance vraie (17) ne converge pas. Autrement dit, puisque certains types de bruits sont présents dans les signaux des oscillateurs, il faut une autre variance que la variance classique pour étudier la dispersion de ces signaux. Une des solutions à ce problème est la variance à deux échantillons plus connue sous le nom de variance d'Allan.

4. Variance d'Allan AVAR.

Dans la réalité, on ne dispose jamais d'une infinité d'échantillons, et c'est pourquoi on évalue la variance à partir d'un nombre fini d'échantillons, en sélectionnant, dans la mesure du possible, un estimateur sans biais, c'est à dire dont l'espérance mathématique est la valeur vraie. Par ailleurs, on est le plus souvent en présence d'échantillons de phase prélevés (mesurés) suivant une période d'échantillonnage τ_0 . Dans ce qui suit, il faut penser la période d'analyse τ comme étant toujours un multiple entier de la période d'échantillonnage τ_0 .

4.1. Variance à deux échantillons.

La variance à N échantillons peut s'écrire de la manière suivante :

$$\sigma^2(N, T, \tau) = \frac{1}{N-1} \times \sum_{i=1}^N \left(\bar{y}_i - \frac{1}{N} \times \sum_{j=1}^N \bar{y}_j \right)^2 \quad (23)$$

où N est le nombre d'échantillons \bar{y}_k disponibles, T est la durée séparant deux échantillons \bar{y}_k successifs, et τ est la période d'analyse pour laquelle cette variance est calculée. T et τ ne sont pas nécessairement égaux, notamment s'il y a des temps morts entre les mesures.

Pour des échantillons adjacents (c'est à dire $T = \tau$) affectés d'un bruit blanc de fréquence ($\alpha = 0$), la valeur moyenne de $\sigma_y^2(N, T, \tau)$ est un estimateur sans biais de la variance vraie, même pour N fini. C'est une des raisons pour lesquelles l'IEEE recommande depuis 1986 d'utiliser la variance à deux échantillons (donc $N = 2$), ou variance dite « d'Allan », pour estimer la dispersion des écarts de fréquence normé instantanés autour de leur valeur moyenne. [David W. Allan était un physicien du National Institute of Standards and Technology (NIST, Etats-Unis d'Amérique) qui a pris sa retraite il y a une dizaine d'années, et qui a fait de très nombreuses publications sur le sujet.] On note cette variance $\sigma_y^2(\tau)$, et elle est donnée par :

$$\sigma_y^2(\tau) = \left\langle \sigma^2(2, \tau, \tau) \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^2 \left(\bar{y}_i - \frac{1}{2} \times \sum_{j=1}^2 \bar{y}_j \right)^2 \right\rangle \quad (24)$$

soit en simplifiant :

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2} \times \left\langle (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 \right\rangle \quad (25)$$

où \bar{y}_1 et \bar{y}_2 sont des échantillons adjacents de moyennes d'écarts de fréquence normés instantanés calculées sur des durées τ . On constate donc qu'au lieu de calculer l'écart à la moyenne \bar{y} comme pour la variance classique dans l'équation (18), on doit calculer ici l'écart entre deux échantillons successifs adjacents. Une façon plus générique de l'écrire est donc :

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2} \times \left\langle (\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2 \right\rangle \quad (26)$$

où \bar{y}_k et \bar{y}_{k+1} sont des moyennes successives et adjacentes d'écarts de fréquence normés instantanés calculés sur une durée τ .

En utilisant l'équation (10), on peut également exprimer la variance d'Allan en fonction des écarts de phase instantanés x_k :

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2 \times \tau^2} \times \left\langle (x_{k+1} - 2 \times x_k + x_{k-1})^2 \right\rangle \quad (27)$$

Pour le calcul de la variance d'Allan classique, les échantillons d'écarts de fréquence normés instantanés peuvent se représenter de la manière suivante (d'après [5]) :

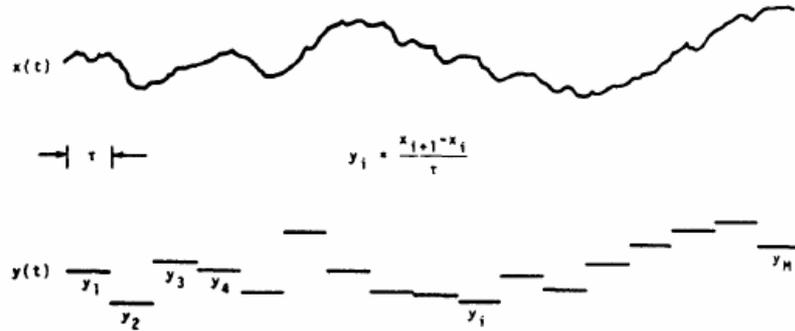


Figure 3. Echantillons de fréquence pour le calcul de la variance d'Allan classique [5].

On utilise donc pour le calcul de $\sigma_y^2(\tau)$ des échantillons \bar{y}_k adjacents par période τ . Cette procédure limite le nombre d'échantillons \bar{y}_k pour le calcul de la variance d'Allan, ce qui a une influence importante sur l'intervalle de confiance du résultat du calcul (voir chapitre 4.5). Il est cependant possible de calculer une variance d'Allan dite « avec recouvrement » développée au chapitre suivant.

Par ailleurs, on voit également que la période d'analyse τ la plus grande pour laquelle on pourra calculer une variance d'Allan $\sigma_y^2(\tau)$ ne peut dépasser la moitié de la durée totale des mesures, puisqu'il faut au moins deux échantillons \bar{y}_k pour faire le calcul. Dans ce cas extrême, on ne disposera donc que de deux échantillons \bar{y}_k pour calculer la variance d'Allan, et l'intervalle de confiance de la valeur calculée sera particulièrement mauvais, au point d'en rendre le résultat inexploitable.

4.2. Variance d'Allan avec recouvrement.

Cette fois-ci, on utilise pour le calcul de $\sigma_y^2(\tau = m \times \tau_0)$, où τ_0 est la période d'échantillonnage des $x(t)$, des échantillons \bar{y}_k adjacents par période τ_0 , et ce quel que soit la période d'analyse τ (ou quel que soit m). On peut alors représenter les échantillons d'écart de fréquence normés instantanés de la manière suivante, par exemple dans le cas où $m = 12$ [9] :

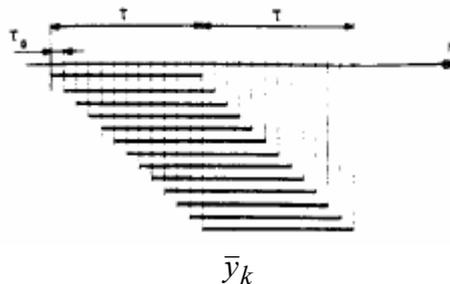


Figure 4. Echantillons de fréquence pour le calcul de la variance d'Allan avec recouvrement [9].

On voit sur cet exemple où $m = 12$ qu'au lieu de n'avoir que deux échantillons d'écart de fréquence normés instantanés \bar{y}_k dans la calcul classique pour une période d'analyse $\tau = m \times \tau_0$ donnée, on dispose de 13 échantillons \bar{y}_k pour le calcul de la variance avec recouvrement.

Evidemment, ces échantillons ne sont plus indépendants, mais il a été montré [6] que ce calcul n'introduisait pas de biais dans le résultat de la variance d'Allan par rapport à un calcul classique. L'avantage de cette méthode est de fournir des échantillons d'écart de fréquence normés instantanés en plus grand nombre, ce qui améliore les intervalles de confiance en les réduisant. La formule utilisée pour le calcul de la variance d'Allan avec recouvrement est donnée par :

$$\sigma_y^2(\tau = m \times \tau_0) = \frac{1}{2 \times (N - 2 \times m) \times \tau^2} \times \sum_{i=1}^{N-2 \times m} (x_{i+2 \times m} - 2 \times x_{i+m} + x_i)^2 \quad (28)$$

où N est le nombre total d'échantillons d'écart de phase instantanés $x(t)$, $x_i = x(t_i)$, et m est donné par la formule $\tau = m \times \tau_0$. C'est cette formule (28) qui est utilisée lorsqu'on dispose d'échantillons d'écart de phase instantanés $x(t)$ pour le calcul de la variance d'Allan, cette variance étant dénommée AVAR. On constate par ailleurs que la période d'analyse τ maximale pour laquelle on pourra calculer cette variance d'Allan avec recouvrement est donnée par $m = (N-1)/2$, soit pour τ égal à un peu moins de la moitié de la durée totale des mesures.

A partir de cette expression de la variance d'Allan en fonction des échantillons d'écart de phase $x(t)$ (28), on peut écrire la formule en fonction des échantillons d'écart de fréquence normés $y(t)$ en utilisant la définition des \bar{y}_k donnée en (10) :

$$\sigma_y^2(\tau = m \times \tau_0) = \frac{1}{2 \times (N - 2 \times m)} \times \sum_{i=1}^{N-2 \times m} (\bar{y}_{i+m} - \bar{y}_i)^2 \quad (29)$$

en notant que l'on ne dispose alors que de $N-1$ échantillons \bar{y}_k .

4.3. Relation densité spectrale et variance d'Allan : fonction de transfert

On a vu au chapitre 3.2. que la fonction de transfert de la variance classique ne permettait pas le calcul de la variance en fonction de la densité spectrale en loi de puissances : l'intégrale de l'équation (17) ne converge pas pour les bruits de scintillation de fréquence (en f^{-1}) et de marche aléatoire de fréquence (en f^{-2}). Qu'en est-il de la variance d'Allan ?

Puisque le calcul de la variance d'Allan nécessite la différence entre deux échantillons consécutifs (équation (26)), cette séquence de calcul peut être modélisée par la Réponse impulsionnelle $h_\tau(t)$ suivante :

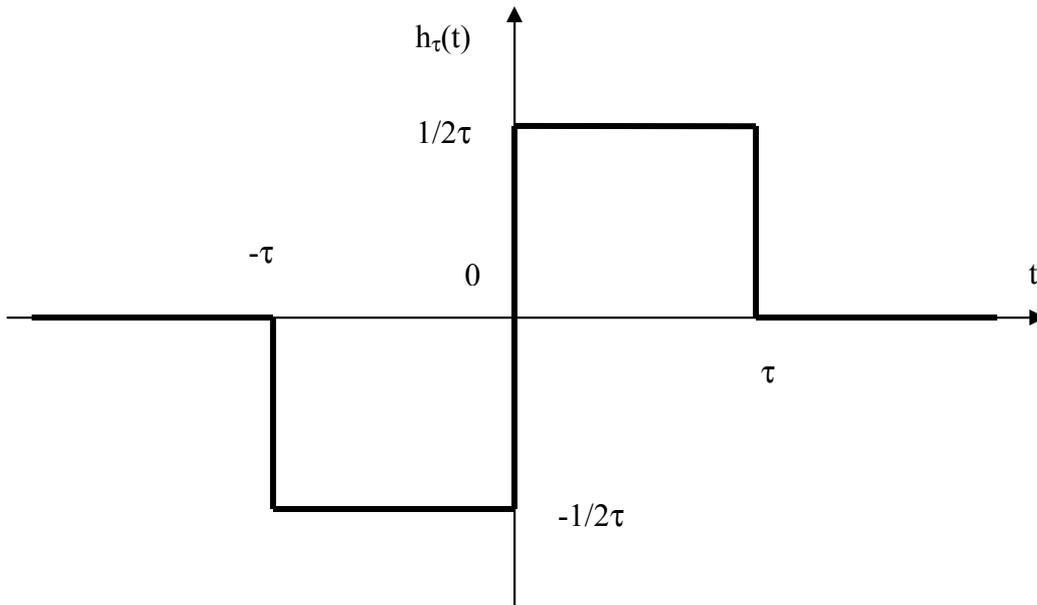


Figure 5. Réponse impulsionnelle de la variance d'Allan.

On peut alors calculer la Fonction de transfert $H_\tau(f)$ qui correspond à cette $h_\tau(t)$, et on obtient comme fonction $(H_\tau(f))^2$:

$$H_\tau^2(f) = 2 \times \frac{\sin^4(\pi \times \tau \times f)}{(\pi \times \tau \times f)^2} \quad (30)$$

Si on trace cette fonction, on obtient :

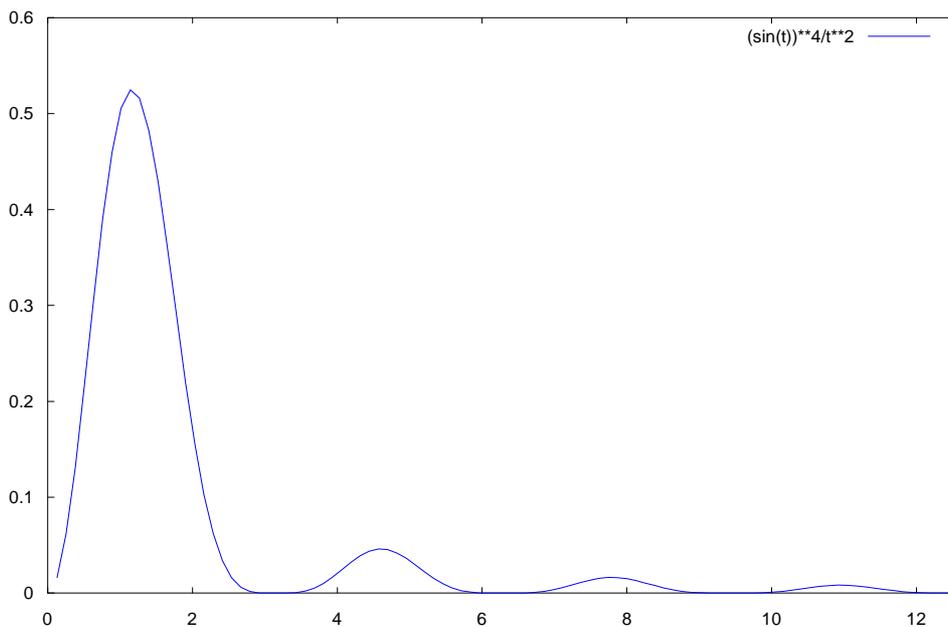


Figure 6. Fonction de transfert de la variance d'Allan.

On constate que cette fois-ci, la Fonction de transfert tend vers 0 lorsque f tend vers 0. Il faut donc vérifier si c'est suffisant pour la convergence de l'intégrale permettant le calcul de la variance d'Allan. Dans ce cas, l'équation (17) devient :

$$\begin{aligned}\sigma_y^2(\tau) &= 2 \times \int_0^{\infty} S_y(f) \times \frac{\sin^4(\pi \times \tau \times f)}{(\pi \times \tau \times f)^2} \times df \\ &= 2 \times \sum_{\alpha=-2}^{\alpha=+2} h_{\alpha} \times \int_0^{\infty} f^{\alpha} \times \frac{\sin^4(\pi \times \tau \times f)}{(\pi \times \tau \times f)^2} \times df\end{aligned}\quad (31)$$

On constate bien que pour toutes les puissances α , l'intégrale de l'équation (31) converge, lorsque f tend vers 0. La variance d'Allan est donc un outil bien adapté au calcul de la dispersion de mesures issues d'un oscillateur.

Par ailleurs, dans la réalité, on n'intègre pas jusqu'à une fréquence infinie. Il y a dans tout système physique une fréquence dite de « coupure haute », notée en général f_h , qui limite le spectre du système. Dans une séquence d'échantillons périodiques de période τ_0 , la fréquence de coupure haute du système est limitée par $f_h \leq 1 / (2 \times \tau_0)$.

Si on calcule l'intégrale de l'équation (31) pour chaque type de bruit en f^{α} , on constate que l'on peut aussi écrire $\sigma_y^2(\tau)$ comme une loi de puissance de τ à l'aide des mêmes coefficients h_{α} . On obtient [4] :

$$\begin{aligned}\sigma_y^2(\tau) &= h_{-2} \times \frac{(2 \times \pi)^2}{6} \times \tau + h_{-1} \times 2 \times \ln(2) + h_0 \times \frac{1}{2 \times \tau} \\ &+ h_1 \times \frac{1,038 + 3 \times \ln(2 \times \pi \times f_h \times \tau)}{(2 \times \pi)^2 \times \tau^2} + h_2 \times \frac{3 \times f_h}{(2 \times \pi)^2 \times \tau^2}\end{aligned}\quad (32)$$

Il est donc possible d'obtenir une correspondance entre les exposants α dans $S_y(f)$ et des exposants μ dans $\sigma_y^2(\tau)$ pour chaque type de bruit considéré. Cette correspondance est donnée dans le tableau suivant.

Tableau 3. Correspondance entre les exposants α dans $S_y(f)$ et les exposants μ dans $\sigma_y^2(\tau)$.

	$\alpha [S_y(f)]$	$\mu [\sigma_y^2(\tau)]$
Bruit de marche aléatoire de fréquence (Random Walk Frequency Noise)	-2	1
Bruit de scintillation de fréquence (Flicker Frequency Noise)	-1	0
Bruit blanc de fréquence (White Frequency Noise)	0	-1
Bruit de scintillation de phase (Flicker Phase Noise)	1	-2
Bruit blanc de phase (White Phase Noise)	2	-2

On constate que la variance d'Allan AVAR ne permet pas de discriminer le bruit blanc de phase du bruit de scintillation de phase, puisque les exposants μ sont les mêmes : c'est la raison pour laquelle on a introduit la variance d'Allan dite « modifiée », développée au chapitre 5.

4.4. Tracé bi-logarithmique de la densité spectrale $S_y(f)$ et de l'écart-type d'Allan.

Puisque la densité spectrale $S_y(f)$ s'exprime par une loi de puissance, son tracé sur un diagramme bi-logarithmique (on exprime le logarithme en base 10 de $S_y(f)$ en fonction du logarithme en base 10 de f) aboutit à un raccordement de différentes pentes consécutives, chaque pente correspondant à un exposant donné, donc à un bruit donné. Il devient alors aisé d'identifier les bruits prépondérants en fonction des fréquences de Fourier considérées : il suffit d'identifier la pente d'une droite.

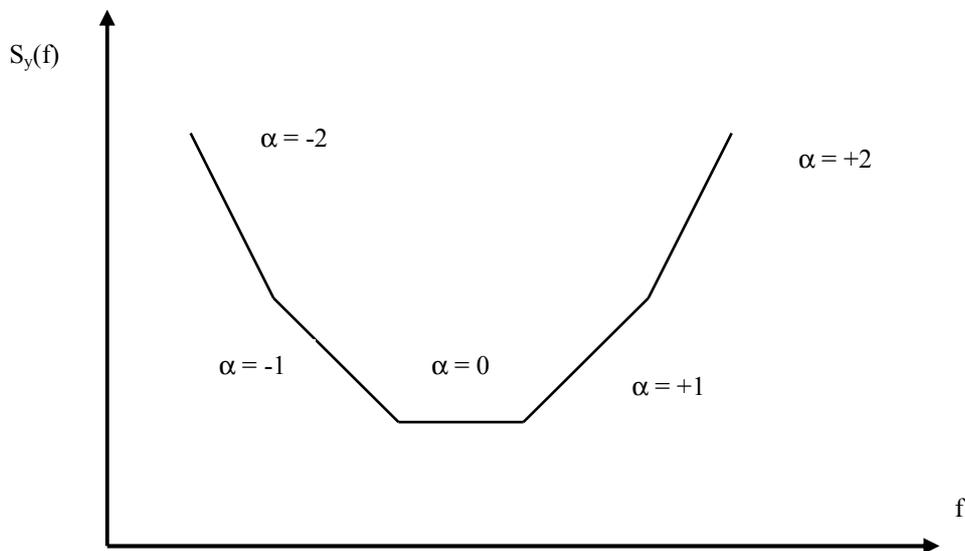


Figure 7. Tracé bi-logarithmique de la densité spectrale $S_y(f)$.

On rappelle que l'écart-type est la racine carrée de la variance, et c'est en général l'écart-type d'Allan $\sigma_y(\tau)$ qui est tracé (les exposants μ sont divisés par 2), dénommé ADEV dans la littérature. Comme dans le cas de la densité spectrale, sur un tracé bi-logarithmique (on trace le logarithme en base 10 de $\sigma_y(\tau)$ en fonction du logarithme en base 10 de τ), on identifie les différents types de bruits par des droites de pentes connues en fonction de la période d'analyse.

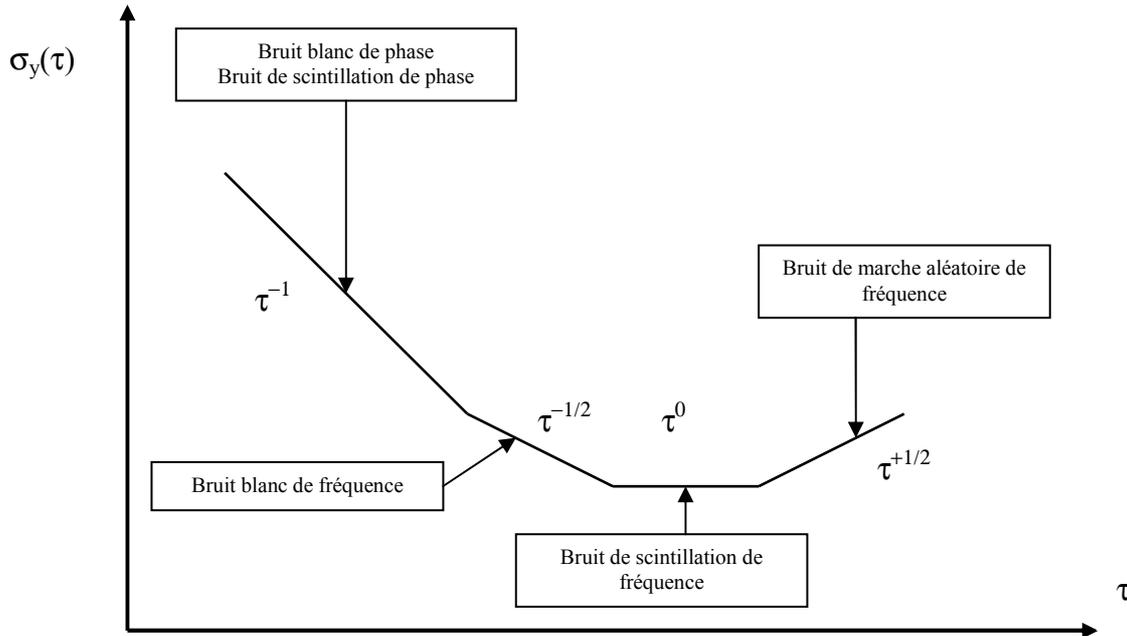


Figure 8. Tracé bi-logarithmique de l'écart-type d'Allan.

Cette facilité d'analyse pour l'identification des différents types de bruits présents dans les oscillateurs a largement contribué à la popularité de la variance d'Allan par rapport à d'autres variances. Par ailleurs, le fait qu'en présence d'un bruit blanc de fréquence (White Frequency Noise Modulation) la variance d'Allan AVAR est un estimateur direct de la variance vraie a aussi pesé lourd, étant donné que les physiciens sont justement intéressés par la fréquence moyenne dans le domaine de cette modulation de bruit. Enfin un tracé d'écart-type d'Allan met en évidence la stabilité en fonction du temps d'un système.

4.5. Incertitudes sur la variance d'Allan : loi du X^2 (« chi-deux ») et intervalles de confiance.

Dans le cadre de ce cours, il est impossible de détailler l'étude des intervalles de confiance permettant d'évaluer la précision des résultats des calculs de variance d'Allan par rapport à la variance vraie, et on n'en donnera qu'un rapide aperçu. L'essentiel de ce chapitre est inspiré de [6].

Une des hypothèses de départ est que les $y(t)$ sont des échantillons d'une variable aléatoire gaussienne. La variance, qui correspond à la moyenne du carré de ces échantillons (voir les équations (18) ou (26)), suit par conséquent une distribution suivant la loi du X^2 (loi du « chi deux » ou du « chi carré »). A l'aide d'une table donnant la probabilité de distribution du X^2 , on peut calculer un intervalle de confiance de l'estimateur $\sigma_y^2(\tau)$ d'une variance vraie $\sigma^2(\tau)$ inconnue. Pour ce faire, il faut introduire la notion de « degré de liberté » (d.l.).

En général, on choisit 90 % comme intervalle de confiance. Cela signifie que la probabilité de trouver la variance vraie $\sigma^2(\tau)$ en dehors de l'intervalle de confiance est de 10 %, réparti de 0 à 5 % d'un côté, et de 95 à 100 % à l'autre extrémité de la loi du X^2 . On doit alors calculer la

loi de probabilité du X^2 pour les valeurs $X^2(0,05)$ et $X^2(0,95)$, l'intervalle de confiance étant défini par la relation :

$$X^2(0,05) < (d.l.) \times \frac{\sigma_y^2(\tau)}{\sigma^2(\tau)} < X^2(0,95) \quad (33)$$

Ce qui permet de donner l'intervalle de confiance, la « fourchette » à l'intérieur de laquelle on a une probabilité de 90 % de trouver la variance vraie $\sigma^2(\tau)$:

$$\frac{(d.l.) \times \sigma_y^2(\tau)}{X^2(0,95)} < \sigma^2(\tau) < \frac{(d.l.) \times \sigma_y^2(\tau)}{X^2(0,05)} \quad (34)$$

La loi du X^2 peut se tracer comme sur les figures 9 et 10 (échelles arbitraires). On constate que cette loi n'est pas symétrique autour de son maximum (comme peut l'être une loi de Gauss par exemple), ce qui fait que les intervalles de confiance autour des valeurs de la variance d'Allan avec recouvrement AVAR ne seront pas non plus symétriques.

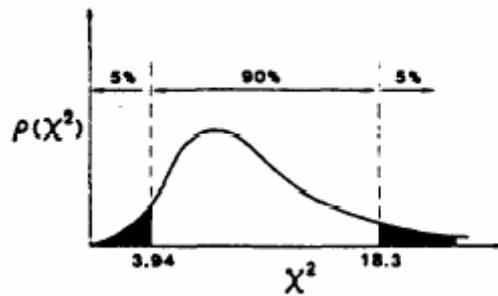


Figure 9. Loi de probabilité du X^2 pour 10 degrés de liberté [10].

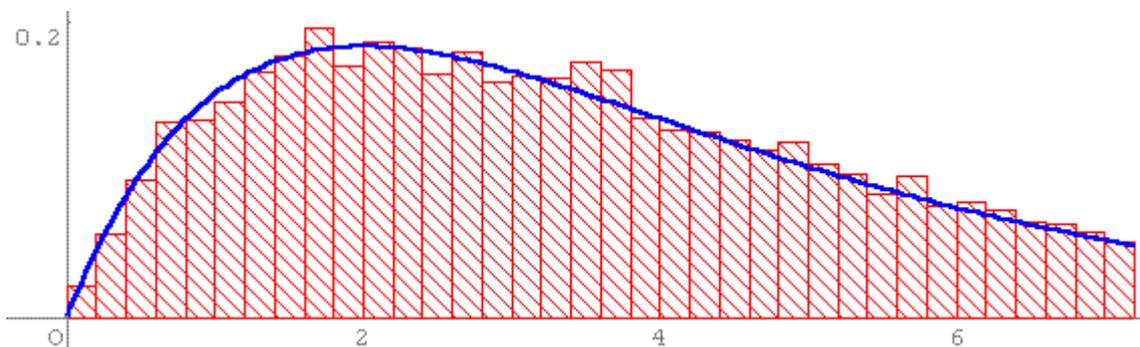


Figure10. Loi de probabilité du X^2 [12].

La principale difficulté est alors d'évaluer le degré de liberté (d.l.). Des travaux approfondis [6] ont permis la détermination de formules empiriques limites qui expriment des degrés de liberté « équivalents » (d.l.e.) , en anglais « equivalent degree of freedom » (edf), en fonction du nombre d'échantillons et du nombre de points utilisés dans le calcul de la variance d'Allan

avec recouvrement AVAR, mais aussi en fonction du type de bruit dominant. Ces formules sont données dans le tableau suivant, où N est le nombre d'échantillons de phase x(t) et m est donné par la relation $\tau = m \times \tau_0$.

Tableau 4. Degrés de liberté équivalents pour la variance d'Allan avec recouvrement AVAR.

Type de modulation de bruit	AVAR (d.l.e.)	
Bruit blanc de phase (White Phase Noise)	$\frac{(N+1) \times (N-2 \times m)}{2 \times (N-m)}$	
Bruit de scintillation de phase (Flicker Phase Noise)	$\exp\left(\ln\left(\frac{N-1}{2 \times m}\right) \times \ln\left(\frac{(2 \times m+1) \times (N-1)}{4}\right)\right)^{1/2}$	
Bruit blanc de fréquence (White Frequency Noise)	$\left(\frac{3 \times (N-1)}{2 \times m} - \frac{2 \times (N-2)}{N}\right) \times \frac{4 \times m^2}{4 \times m^2 + 5}$	
Bruit de scintillation de fréquence (Flicker Frequency Noise)	$\frac{2 \times (N-2)^2}{2,3 \times N - 4,9}$	m = 1 $\tau = \tau_0$
	$\frac{5 \times N^2}{4 \times m \times (N + 3 \times m)}$	m > 1
Marche aléatoire de fréquence (Random-Walk Frequency Noise)	$\left(\frac{N-2}{m}\right) \times \left(\frac{(N-1)^2 - 3 \times m \times (N-1) + 4 \times m^2}{(N-3)^2}\right)$	

Ce sont ces formules qui servent au calcul des intervalles de confiance dans le logiciel Stable32 disponible dans le commerce. Le tableau suivant donne une idée sur l'ordre de grandeur de ces degrés de liberté équivalents en fonction du nombre d'échantillons m utilisés pour le calcul de AVAR. On y constate bien que plus le nombre d'échantillons m est grand, plus le degré de liberté équivalent est petit, donc plus l'intervalle de confiance est petit.

Tableau 5. Degrés de liberté équivalents en fonction du nombre N de données disponibles et du paramètre m donné par $\tau = m \times \tau_0$ [10].

Number of Degrees of Freedom for Calculation of the Confidence of the Estimate of a Sample Allan Variance for the Major Noise Types*						
N	m	White phase	Flicker phase	White frequency	Flicker frequency	Random-walk frequency
9	1	3.665	4.835	4.900	6.202	7.000
	2	3.237	3.537	3.448	3.375	2.866
	4	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999
129	1	65.579	79.015	84.889	110.548	127.000
	2	64.819	66.284	71.642	77.041	62.524
	4	63.304	52.586	42.695	36.881	29.822
	8	60.310	37.306	21.608	16.994	13.567
	16	54.509	22.347	9.982	7.345	5.631
	32	44.761	9.986	4.026	2.889	2.047
	64	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
1025	1	526.373	625.071	682.222	889.675	1023.000
	2	525.615	543.863	583.622	636.896	510.502
	4	524.088	459.041	354.322	316.605	253.755
	8	521.038	366.113	186.363	156.492	125.398
	16	514.952	269.849	93.547	76.495	61.241
	32	502.839	179.680	45.947	36.610	29.210
	64	478.886	104.743	21.997	16.861	13.288
	128	432.509	50.487	10.003	7.281	5.516
	256	354.914	17.429	4.003	2.861	2.005
	512	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

* N is the number of equally spaced phase points that are taken m at a time to form the averaging time.

4.6. Détection d'une dérive linéaire de fréquence.

Jusqu'ici, on n'a considéré que des signaux aléatoires. Dans ce chapitre, on montre que la variance d'Allan AVAR permet de manière simple de détecter dans les données analysées un signal déterministe : une dérive linéaire de fréquence. Les oscillateurs exhibent en général ce genre de dérive à long terme. On peut modéliser l'écart de fréquence instantané $y(t)$ d'une dérive linéaire en fréquence par :

$$y(t) = y_0 + D \times t \quad (35)$$

où y_0 est l'écart de fréquence à l'origine et D est la dérive linéaire.

Si on reprend la formule (9), on peut calculer la valeur moyenne \bar{y}_k en fonction de τ :

$$\overline{y(t_k)} = \frac{1}{\tau} \times \int_{t_k}^{t_k + \tau} (y_0 + D \times u) \times du \quad (36)$$

Ce qui donne simplement :

$$\overline{y(t_k)} = y_0 + \frac{D \times \tau}{2} + D \times t_k \quad (37)$$

Selon la formule (26), on peut calculer la variance d'Allan par la moyenne infinie du carré de l'écart entre deux \bar{y}_k consécutifs :

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2} \times \left\langle (\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2 \right\rangle = \frac{D^2}{2} \times \tau^2 \quad (38)$$

On constate donc que la variance d'Allan d'écarts de fréquence instantanés affectés d'une dérive linéaire de fréquence s'exprime en loi de puissance de τ , suivant τ^2 . D'après la formule (32), aucun des types de bruits présents dans les oscillateurs ne s'exprime en fonction de cette puissance de τ . Par conséquent un comportement de la variance suivant τ^2 est la signature d'une dérive linéaire de fréquence. Sur un tracé bi-logarithmique de l'écart-type d'Allan, cela correspond à une pente +1.

4.7. Détection d'un signal périodique dans $y(t)$.

Autre signal déterministe souvent présent dans les données à analyser, un signal périodique a également une signature particulière lorsqu'on calcule une variance d'Allan. On considère un ensemble d'échantillons d'écarts de fréquence instantanés $y(t)$ affectés d'un signal périodique de période T_0 , donc de fréquence $f_0 = 1 / T_0$, suivant :

$$y(t) = a \times \sin(2 \times \pi \times f_0 \times t) \quad (39)$$

A partir de ce signal, la densité spectrale $S_y(f)$ s'écrit :

$$S_y(f) = \frac{a^2}{2} \times \delta(f - f_0) \quad (40)$$

où $\delta(f)$ est la fonction de distribution de Dirac dans le domaine des fréquences de Fourier. On peut alors calculer la variance d'Allan d'après (31) :

$$\sigma_y^2(\tau) = a^2 \times \int_0^\infty \delta(f - f_0) \times \frac{\sin^4(\pi \times \tau \times f)}{(\pi \times \tau \times f)^2} \times df \quad (41)$$

Les propriétés de la distribution de Dirac sont telles qu'on obtient directement :

$$\sigma_y^2(\tau) = a^2 \times \frac{\sin^4(\pi \times \tau \times f_0)}{(\pi \times \tau \times f_0)^2} \quad (42)$$

On obtient ainsi une courbe similaire à celle tracée sur la figure 6, c'est à dire une oscillation qui est nulle pour tout τ donné par :

$$\tau = \frac{k}{f_0} = k \times T_0 \quad (43)$$

Cette oscillation atteint ses maxima consécutifs pour une période d'analyse τ donnée par :

$$\tau = \frac{2 \times k + 1}{2 \times f_0} = \frac{2 \times k + 1}{2} \times T_0 \quad (44)$$

le premier maximum est atteint pour $k = 0$, soit pour $\tau = T_0/2$, et il vaut alors :

$$\sigma_y^2\left(\frac{T_0}{2}\right) = \left(\frac{2 \times a}{(2 \times k + 1) \times \pi}\right)^2 \quad (45)$$

Sur un tracé bi-logarithmique d'écart-type d'Allan, si l'amplitude a est suffisante pour que ce signal émerge du bruit, un terme périodique de période T_0 apparaîtra comme une succession de bosses dont le sommet est atteint pour chaque multiple impair de la demi-période $T_0/2$.

5. Variance d'Allan modifiée MVAR.

5.1. Limites de AVAR pour les modulations en bruits de phase.

On peut le voir dans l'équation (32), la variance d'Allan AVAR ne sait pas discriminer entre les modulations de bruit blanc de phase et de bruit de scintillation de phase, qui s'expriment toutes deux en fonction de τ^2 (τ^{-1} pour l'écart-type d'Allan, donc en pente -1 sur un tracé bi-logarithmique de l'écart-type d'Allan). Par ailleurs, AVAR est un estimateur sans biais par rapport à la variance vraie dans le cas d'une modulation en bruit blanc de fréquence, mais ce n'est plus vrai pour les modulations en bruit blanc de phase et en bruit de scintillation de

phase. C'est pourquoi d'autres développements ont été menés, qui ont abouti à la génération de la variance d'Allan modifiée, ou MVAR qui s'écrit $\text{Mod}\sigma_y^2(\tau)$.

5.2. Définition de MVAR.

Appliquée sur un ensemble d'échantillons $y(t)$ espacés d'une période d'échantillonnage τ_0 , MVAR est donnée par la formule suivante :

$$\text{Mod}\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2 \times m^2} \times \left\langle \left(\sum_{i=1}^m (\bar{y}_{i+m} - \bar{y}_i) \right)^2 \right\rangle \quad (46)$$

où m est donné par la formule $\tau = m \times \tau_0$, et les moyennes \bar{y}_i peuvent s'écrire :

$$\bar{y}_i = \frac{1}{m} \times \sum_i^{i+m-1} y_k = \frac{x_{i+m-1} - x_{i-1}}{m \times \tau_0} \quad (47)$$

Attention : il s'agit dans la formule (46) de calculer la moyenne infinie du carré d'une somme (et non de la somme des carrés). En utilisant (46) et (47), on peut écrire MVAR en fonction des écarts de phase $x(t)$:

$$\text{Mod}\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2 \times m^2 \times \tau^2 \times (N - 3 \times m + 1)} \times \sum_{j=1}^{N-3 \times m + 1} \left(\sum_{i=j}^{j+m-1} (x_{i+2 \times m} - 2 \times x_{i+m} + x_i) \right)^2 \quad (48)$$

que l'on peut aussi développer ainsi :

$$\text{Mod}\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2 \times m^2 \times \tau^2 \times (N - 3 \times m + 1)} \times \sum_{j=1}^{N-3 \times m + 1} \left(\sum_{i=j+2 \times m}^{j+3 \times m - 1} x_i - 2 \times \sum_{i=j+m}^{j+2 \times m - 1} x_i + \sum_{i=j}^{j+m-1} x_i \right)^2 \quad (49)$$

Par exemple, pour $m = 3$ et $j = 1$, il faudra prendre comme échantillons d'écarts de phase :

$$(x_9 + x_8 + x_7) - 2 \times (x_6 + x_5 + x_4) + (x_3 + x_2 + x_1) \quad (50)$$

Alors que AVAR était un estimateur sans biais de la variance sur $y(t)$ en présence d'une modulation de bruit blanc de fréquence, MVAR est un estimateur sans biais de la variance sur $y(t)$ en présence d'une modulation de bruit blanc de phase.

5.3. Relation densité spectrale et variance d'Allan modifiée MVAR.

Il est possible de mener le même type de raisonnement qu'aux chapitres 3.2 et 4.3, en décrivant la séquence de calcul de MVAR, pour déterminer la Fonction de transfert $H_{M,\tau}(f)$, qui est donnée par [1] :

$$H_{M,\tau}^2(f) = \frac{2 \times \sin^6(\pi \times \tau \times f)}{m^2 \times (\pi \times \tau \times f)^2 \times \sin^2(\pi \times \tau_0 \times f)} \quad (51)$$

avec $\tau = m \times \tau_0$.

Cette fonction peut être représentée par le tracé de la figure 11.

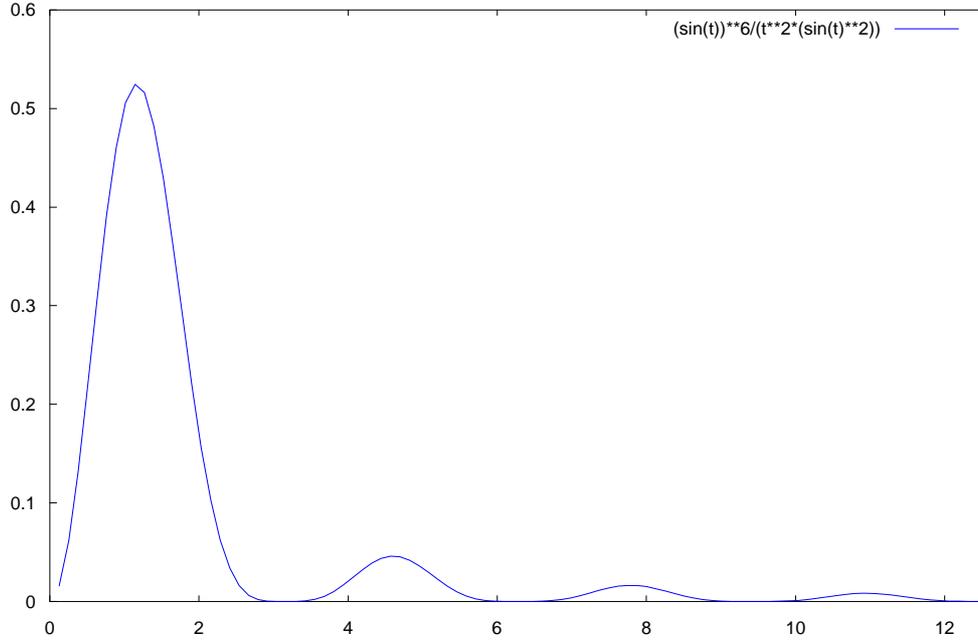


Figure 11. Fonction de transfert de la variance d'Allan modifiée MVAR.

On constate un comportement très proche de la variance d'Allan classique, mais il y a une répartition d'énergie différente dans les lobes secondaires, ce qui est la raison pour laquelle MVAR est capable de discriminer les bruits de phase, en général présents pour les petites périodes d'analyse, donc pour les grandes fréquences de Fourier.

En fonction de la densité spectrale $S_y(f)$, la variance d'Allan modifiée MVAR s'écrit [1] :

$$Mod\sigma_y^2(\tau) = \frac{2}{(\pi \times m \times \tau)^2} \times \int_0^{f_h} S_y(f) \times \frac{\sin^6(\pi \times \tau \times f)}{f^2 \times \sin^2(\pi \times \tau_0 \times f)} \times df \quad (52)$$

avec $\tau = m \times \tau_0$.

Comme avec la variance d'Allan, on peut vérifier que cette intégrale converge pour les puissances α de la loi de puissance de la densité spectrale $S_y(f)$ en fonction des limites de f .

5.4. Tracé bi-logarithmique de l'écart-type d'Allan modifié.

En fonction de τ , MVAR s'exprime en puissance μ' qui vaut -3 dans le cas d'une modulation en bruit blanc de phase et -2 en présence d'une modulation de bruit de scintillation de phase. Les correspondances entre exposants sont données dans le tableau 5.

Tableau 6. Correspondance entre les exposants α dans $S_y(f)$, les exposants μ dans $\sigma_y^2(\tau)$, et les exposants μ' dans $\text{Mod}\sigma_y^2(\tau)$.

	$\alpha [S_y(f)]$	$\mu [\sigma_y^2(\tau)]$	$\mu' [\text{Mod}\sigma_y^2(\tau)]$
Bruit de marche aléatoire de fréquence (Random Walk Frequency Noise)	-2	1	1
Bruit de scintillation de fréquence (Flicker Frequency Noise)	-1	0	0
Bruit blanc de fréquence (White Frequency Noise)	0	-1	-1
Bruit de scintillation de phase (Flicker Phase Noise)	1	-2	-2
Bruit blanc de phase (White Phase Noise)	2	-2	-3

Sur un tracé bi-logarithmique, l'écart-type d'Allan modifié, dénommé MDEV dans la littérature, exhibe une pente $-3/2$ pour le bruit blanc de phase, et -1 pour le bruit de scintillation de phase. La figure 12 montre ces pentes caractéristiques.

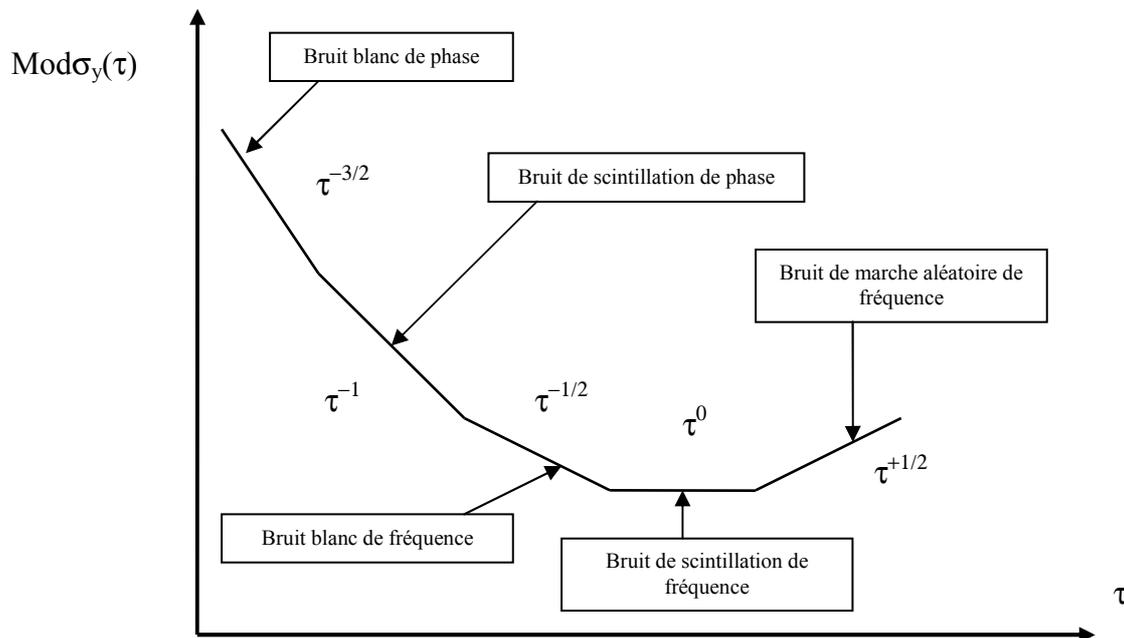


Figure 12. Tracé bi-logarithmique de l'écart-type d'Allan modifié.

5.5. Incertitudes sur MVAR.

A priori, comme pour AVAR, MVAR suit une loi du X^2 . Mais le calcul des degrés de liberté équivalents (edf) est plus complexe que dans le cas de AVAR. On trouvera des développements utiles dans les références [14] et [15].

5.6. Relation entre AVAR et MVAR.

Il est important de maîtriser le passage entre AVAR et MVAR, qui dépend évidemment du type de modulation de bruit prépondérante, mais aussi du nombre d'échantillons m sur lequel est calculée la variance. On utilise en général le diagramme suivant qui donne le rapport $R(m) = \text{MVAR}/\text{AVAR}$:

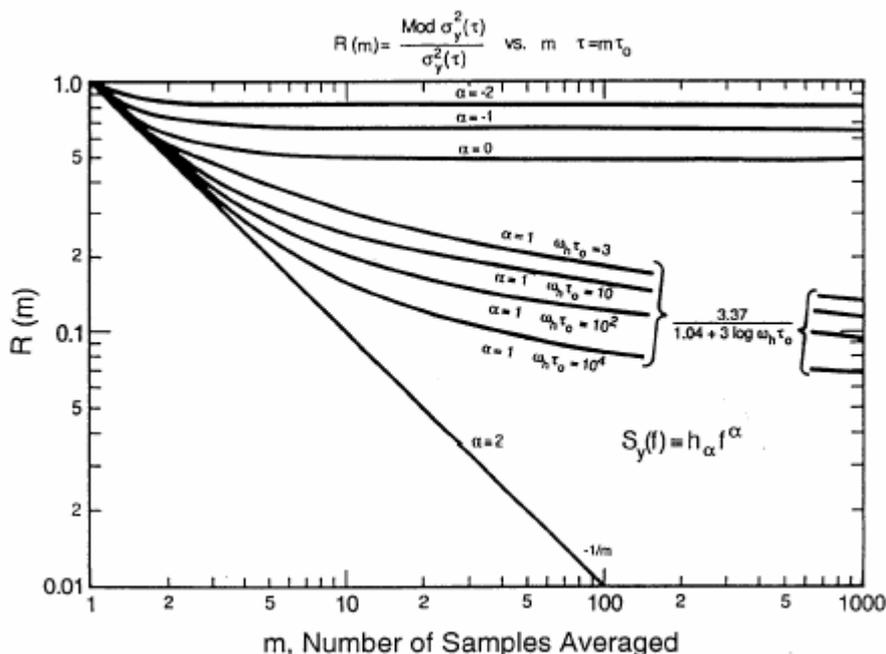


Figure 13. Correspondance entre AVAR et MVAR [1, 15].

Indiquée sur la figure, ω_h est une « pulsation » donnée par : $\omega_h = 2 \times \pi \times f_h$, où f_h est la fréquence de coupure haute du système. Pour $\alpha = 0$ (Bruit blanc de fréquence), la valeur limite de $R(m)$ pour m suffisamment grand est $R(m) = 0,5$. Pour $\alpha = -1$ (Bruit de scintillation de fréquence), la valeur limite de $R(m)$ pour m suffisamment grand est $R(m) = 0,675$. Et pour $\alpha = -2$ (Bruit de marche aléatoire de fréquence), la valeur limite de $R(m)$ pour m suffisamment grand est $R(m) = 0,825$. On peut noter que $R(m)$ est le plus complexe dans le cas $\alpha = 1$, c'est à dire une modulation de bruit de scintillation de phase.

6. Variance d'Allan temporelle TVAR.

Pour les applications temps ou phase dans le domaine métrologique, une variance temporelle d'Allan dénommée TVAR a été introduite. Elle s'écrit $\sigma_x^2(\tau)$, se rapportant ainsi bien à la variable $x(t)$. Elle permet de ne considérer MVAR que comme un intermédiaire de calcul entre AVAR et TVAR.

6.1. Définition de TVAR.

Par définition, TVAR se déduit de MVAR par la formule suivante :

$$\sigma_x^2(\tau) = \frac{\tau^2}{3} \times \text{Mod}\sigma_y^2(\tau) \quad (53)$$

Cela revient à transformer l'axe des ordonnées, de manière à basculer le tracé de MVAR.

A la différence de AVAR et MVAR qui portent sur des valeurs relatives de fréquence normées $y(t)$, donc sans unité, TVAR, qui porte sur des valeurs d'écart de temps $x(t)$, a une unité : s^2 . Par ailleurs, l'expression de TVAR en fonction de la densité spectrale $S_y(f)$ se déduit facilement de celle de MVAR en associant les formules (52) et (53).

6.2. Tracé bi-logarithmique de l'écart-type temporel d'Allan.

D'une manière analogue à ce qui est montré pour MVAR, on peut donner dans un tableau les équivalences de puissances de la loi de puissance de τ pour AVAR, MVAR et TVAR.

Tableau 7. *Correspondance entre les exposants α dans $S_y(f)$, les exposants μ dans $\sigma_y^2(\tau)$, les exposants μ' dans $\text{Mod}\sigma_y^2(\tau)$, et les exposants η dans $\sigma_x^2(\tau)$.*

	α [$S_y(f)$]	μ [$\sigma_y^2(\tau)$]	μ' [$\text{Mod}\sigma_y^2(\tau)$]	η [$\sigma_x^2(\tau)$]
Bruit de marche aléatoire de fréquence (Random Walk Frequency Noise)	-2	1	1	3
Bruit de scintillation de fréquence (Flicker Frequency Noise)	-1	0	0	2
Bruit blanc de fréquence (White Frequency Noise)	0	-1	-1	1
Bruit de scintillation de phase (Flicker Phase Noise)	1	-2	-2	0
Bruit blanc de phase (White Phase Noise)	2	-2	-3	-1

Sur un tracé bi-logarithmique d'écart-type temporel d'Allan, $\sigma_x(\tau)$, dénommé TDEV dans la littérature, on obtient pour chaque modulation de bruit les pentes caractéristiques suivantes :

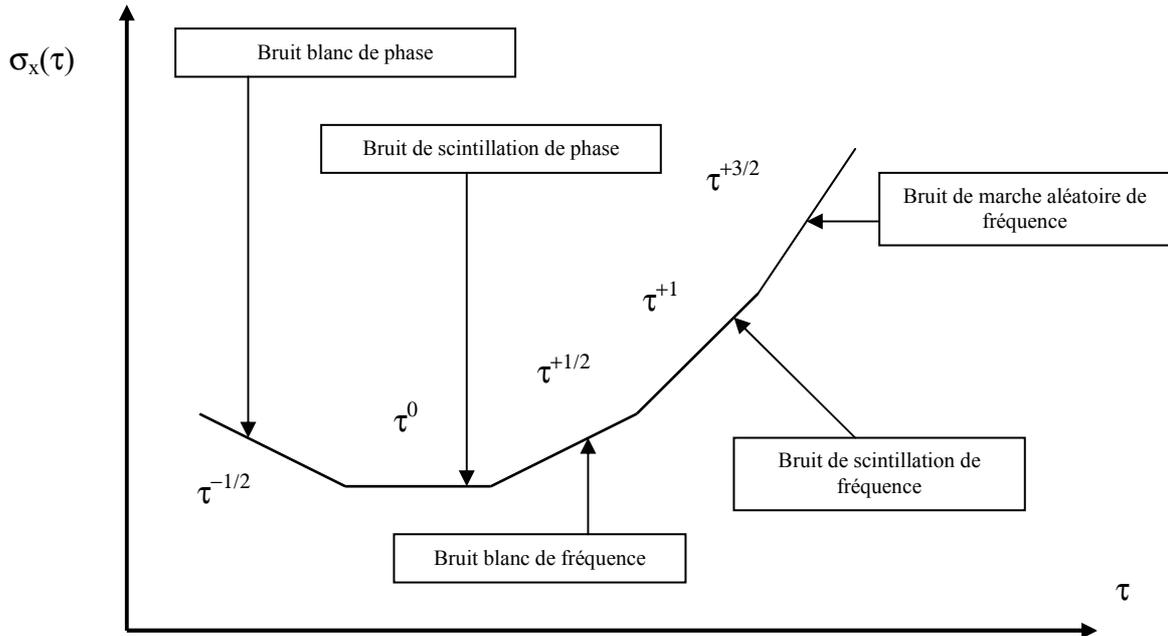


Figure 14. Tracé bi-logarithmique de l'écart-type temporel d'Allan.

On constate que l'identification des pentes dans le domaine des bruits de phase est facilitée par rapport à un tracé de l'écart-type d'Allan modifié (figure 12), car il y a rupture de pente explicite entre une modulation en bruit blanc de phase, une modulation en bruit de scintillation de phase, et une modulation en bruit de marche aléatoire de phase (qui équivaut à du bruit blanc de fréquence). Il est en effet plus facile de détecter un changement de la pente $-1/2$ à la pente 0 qu'entre les pentes $-3/2$ et -1 . Par ailleurs, de manière analogue à AVAR, TVAR donne accès à la valeur sans biais de la variance vraie de phase dans le domaine de la modulation en bruit blanc de phase. C'est aussi la raison pour laquelle cette variance temporelle d'Allan est très utilisée pour les applications faisant appel à la phase.

7. Questions non développées dans ce document.

Dans ce court chapitre, on propose de donner quelques éléments sur différents points qui ne sont pas développés dans ce document, mais que l'on peut rencontrer aux cours d'analyses sur des données réelles.

7.1. Mesures non périodiques.

On est toujours parti, dans ce document, d'échantillons prélevés périodiquement, la période d'échantillonnage de référence étant donnée par τ_0 . Dans la réalité, même si on prévoit un échantillonnage périodique des mesures, il peut se produire que des données manquent, ce qui génère un saut de plus ou moins longue durée dans les mesure par rapport à τ_0 . Il peut aussi se produire que l'échantillonnage prévu ne soit pas exactement périodique. Ces deux types de problèmes peuvent par exemple se poser dans le cas des observations simultanées de satellites du GPS, pour les comparaisons d'horloges éloignées, même en suivant le programme international de poursuites des satellites du GPS.

Il n'y a pas vraiment de solution simple à ce problème, et des études empiriques ont parfois été menées [16]. Mais si la période d'analyse τ pour laquelle on est intéressé de connaître la variance d'Allan est grande devant τ_0 , on admet de répartir les mesures suivant une périodicité moyenne τ_0' , calculée comme la moyenne des intervalles de temps entre deux mesures consécutives sur toute la série de données. Il est évident que cela introduit un biais dans le calcul de la variance d'Allan pour des périodes d'analyse proches de τ_0' .

Dans le cas des comparaisons d'horloges par observations simultanées de satellites du GPS, on obtient en général sur une longue durée une période d'échantillonnage moyenne τ_0' de l'ordre de 1000 s, même s'il peut y avoir parfois une heure entre deux mesures consécutives. On a pu vérifier que l'approximation proposée ci-dessus est parfaitement valable lorsque les périodes d'analyse τ pour lesquelles on veut calculer la variance d'Allan sont supérieures ou égales à 1 d, par comparaison aux résultats obtenus entre deux horloges à césium côte à côte sur des périodes d'analyse similaires.

7.2. Temps morts entre les mesures.

Autre problème : tous les développements effectués ici l'ont été en considérant des mesures continues sans interruption. Or dans la réalité, on peut être confronté à des temps morts entre les mesures, dont il faudrait tenir compte pour l'estimation de la variance. Dans le cas de modulation de bruit blanc de fréquence (ou respectivement de phase), en faisant l'hypothèse qu'il n'y a pas changement de modulation de bruit pendant le temps mort, ce temps mort n'introduit pas de biais dans le calcul de la variance AVAR (ou respectivement TVAR). Dans les autres types de modulation de bruit, les temps morts peuvent avoir une influence, sur la valeur de la variance ou sur l'intervalle de confiance de la valeur estimée. Cette influence a été étudiée en détail dans la référence [17].

7.3. Autres types de variances.

Beaucoup d'autres types de variances ont été développées, soit pour des études théoriques, soit pour des applications spécifiques. La difficulté peut parfois être de comparer ensuite des résultats de stabilité obtenus avec des variances différentes.

On se contentera ici de parler d'un développement récent qui concerne ce qui est appelé « TotalVar » à partir des variances d'Allan (tous les types). Le principe en est le suivant. Par suite du trop faible nombre d'échantillons utilisables pour le calcul de variances d'Allan sur de grandes périodes d'analyse, proches de la moitié de la durée totale des mesures, on obtient en général des intervalles de confiance très larges qui ne permettent pas toujours de déterminer la tendance de la pente autour de ces valeurs, donc le type de bruit prépondérant à long terme. Pour réduire cet intervalle de confiance, et uniquement pour cela (on ne recalcule pas l'estimée de la variance), D. Howe (NIST) a imaginé de rallonger la durée des mesures dans certaines conditions, comme si l'on plaçait des miroirs aux deux extrémités de la série de mesures originales. On trouvera des informations sur cette TotalVar dans les références [18], [19] et [20]. D'autres développements ont eu lieu depuis.

7.4. Bruits non gaussiens.

On a fait l'hypothèse que tous les bruits considérés étaient Gaussiens, réels et stationnaires. On se contentera ici de signaler que ces hypothèses ne sont pas toujours vraies, ce qui induit

des conséquences extrêmement complexes sur un calcul de variances, ainsi que sur l'évaluation des intervalles de confiance associés.

8. Quelques exemples.

8.1. Caractérisation des performances des horloges atomiques.

Les variances d'Allan sont évidemment utilisées pour la caractérisation des performances des horloges atomiques de différentes sortes, puisqu'elles ont été développées dans ce but. La figure 15 présente les stabilités de plusieurs types d'horloges atomiques, exprimées en écart-type d'Allan standard.

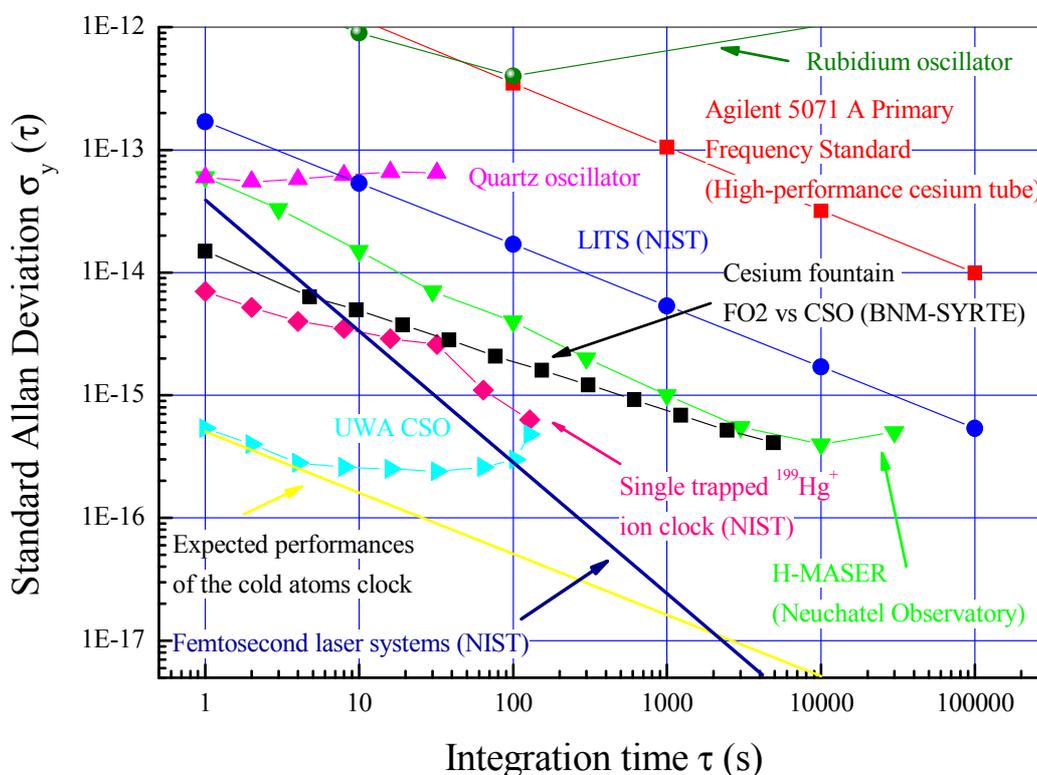


Figure 15. Stabilités comparées de différents types d'horloges atomiques (2003).

Ce type de diagramme permet soit de comparer les caractéristiques de différents oscillateurs entre eux, soit de faire une sélection d'un oscillateur en fonction de besoins spécifiques. On peut également y tracer des limites de stabilité données par la théorie.

8.2. Comparaisons d'horloges distantes par GPS.

Lorsqu'on veut comparer des horloges situées dans des organismes éloignés les uns des autres, on doit utiliser une méthode de comparaison à distance. Les méthodes modernes [13] font appel aux satellites de radionavigation, typiquement le Global Positioning System (GPS),

ou aux satellites de radio-communication, pour la méthode Two-Way Satellite Time and Frequency Transfer (TWSTFT).

La méthode des Vues communes de satellites du GPS est basée sur l'observation de mêmes satellites simultanément dans les deux stations où se trouvent les horloges à comparer. La mesure effectuée dans chaque station est l'écart entre l'horloge locale et le Temps du GPS (échelle de temps du système). Ces mesures sont échangées et on en déduit les écarts entre les horloges. La Section du temps du Bureau international des poids et mesures (BIPM) édite un programme de poursuites GPS qui permet à toutes les stations de mesurer les écarts aux horloges embarquées dans les mêmes satellites simultanément. L'analyse de la stabilité de ces comparaisons est effectuée par des variances d'Allan.

Ce qu'on observe en général, c'est que le bruit de phase du moyen de comparaisons (GPS ou TWSTFT) limite la stabilité pour les courtes périodes d'analyse. Mais comme, en variance d'Allan ou en variance d'Allan modifiée, la pente des bruits de phase ($-3/2$ ou -1) est plus petite que la pente des bruits de fréquence ($-1/2$ ou 0) des horloges que l'on cherche à comparer, on est censé atteindre les horloges au-delà d'une certaine période d'analyse. C'est ce qui est représenté dans la figure 16. Si on travaille en variance d'Allan temporelle, la pente des bruits de phase est $-1/2$ ou 0 , alors que la pente des bruits de fréquence est positive.

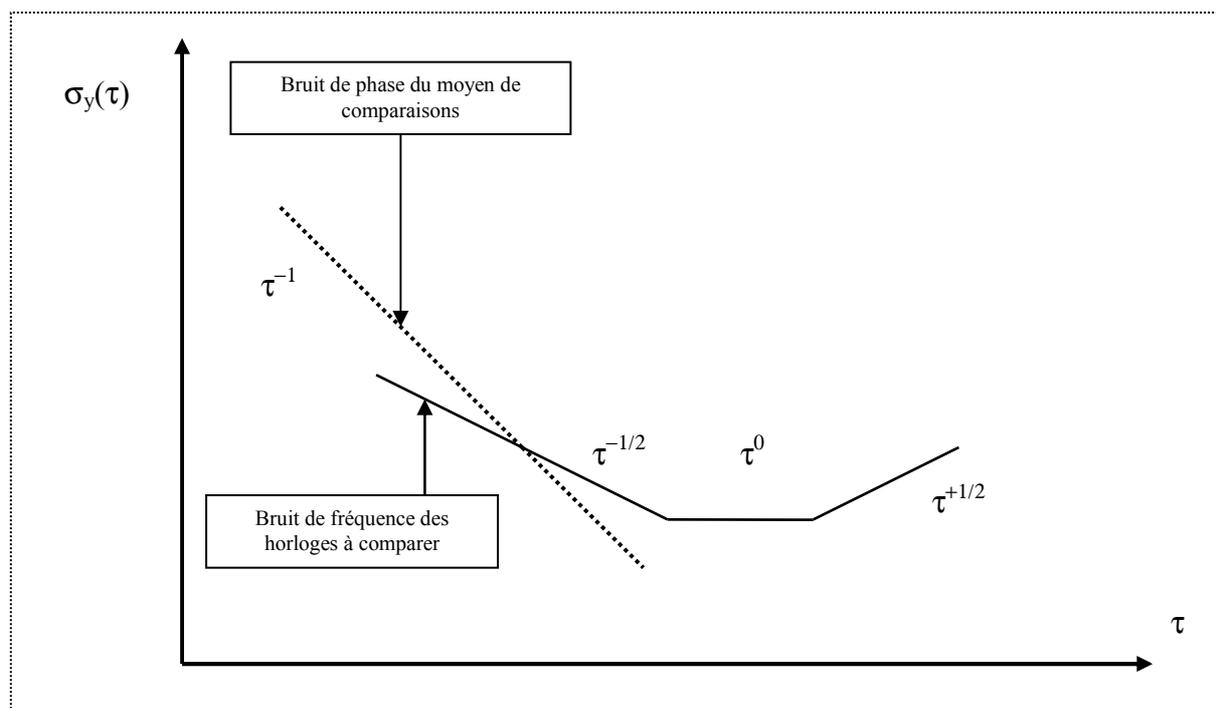


Figure 16. Stabilité d'une comparaison d'horloges distantes par un moyen satellite.

Dans ce qui suit, on montre les résultats obtenus en octobre/novembre 2004 sur des comparaisons par la méthode des Vues communes par GPS P3 entre l'Observatoire de Paris (OP) et l'institut de métrologie allemand PTB situé à Braunschweig. La méthode GPS P3 utilise le fait qu'un même code P est transporté par les deux porteuses des signaux du GPS, dénommées L1 et L2. En effectuant une combinaison linéaire entre ces deux signaux, il est possible d'éliminer en grande partie l'influence de l'ionosphère sur les mesures par GPS, qui est une des principales sources d'inexactitude sur ce type de mesures. Les récepteurs de

signaux du GPS utilisés étant multicanaux, on dispose de plusieurs Vues communes simultanées pour chaque époque du programme international de poursuites du BIPM. On peut ainsi effectuer une moyenne des Vues communes simultanées pour chaque époque, qui devient le résultat de mesure.

Sur la figure 17, on a tracé les résidus par rapport à une fonction linéaire de cette moyenne par époque de toutes les Vues communes par GPS P3 entre les deux masers à hydrogène situés respectivement au PTB et à OP suivant maser H4(PTB) – maser 816(OP) du 22 octobre au 16 novembre 2004. On disposait en moyenne sur toute la période de mesure d'environ 7,5 Vues communes simultanées par époque. On constate qu'il s'est produit quelque chose autour de la date en MJD 53306 vers 00:00 UTC. Une analyse de données entre plusieurs stations et plusieurs récepteurs a permis de démontrer que cet événement, pour lequel on ne peut qu'avancer des hypothèses, s'était produit à OP.

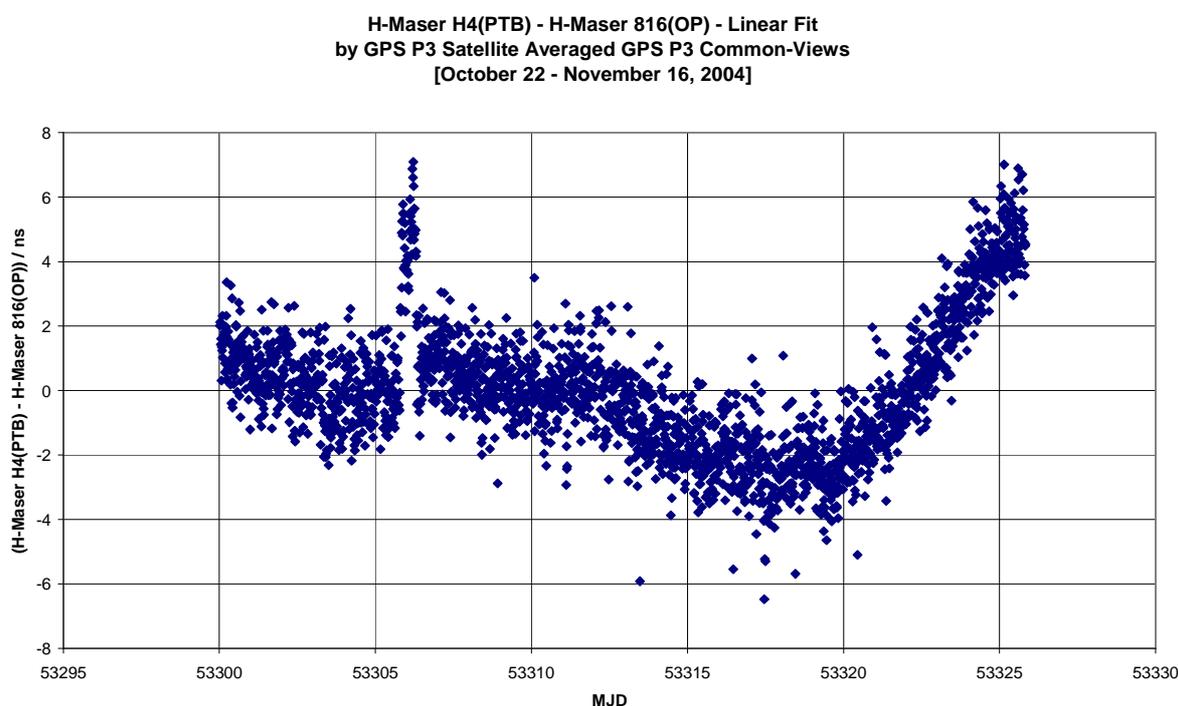


Figure 17. Résidus par rapport à une fonction linéaire des moyennes par époque de toutes les Vues communes par GPS P3 entre les deux masers à hydrogène situés respectivement au PTB et à OP suivant maser H4(PTB) – maser 816(OP) du 22 octobre au 16 novembre 2004.

A partir de ces données, on peut calculer un écart-type d'Allan temporel TDEV, qui est tracé sur la figure 18. On y voit une modulation de bruit blanc de phase (pente $-1/2$) de la période d'échantillonnage des mesures (environ 1000 s) jusqu'à une période de 10 000 s environ. Puis cela ressemble à une modulation de bruit de scintillation de phase (pente 0) d'environ 400 ps, perturbée par un terme périodique de demi période environ 40 000 s (donnée par le sommet de la bosse) : c'est le terme journalier qui est très souvent présent dans ce type de mesures. La suite de la courbe ressemble à une pente proche de $+1/2$, qui correspond à une modulation de bruit blanc de fréquence (ou de marche aléatoire de phase). Mais il faut se souvenir que les intervalles de confiance dans les écart-types d'Allan pour les hautes périodes d'analyse sont assez larges.

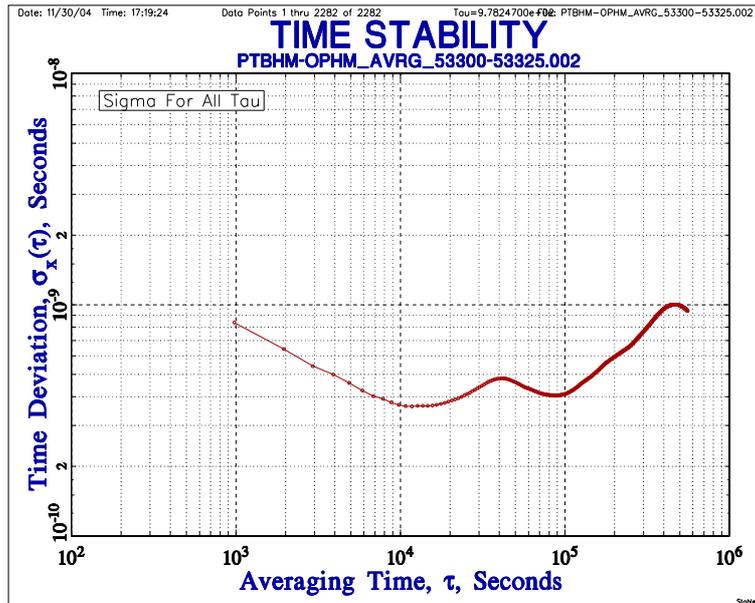


Figure 18. Ecart-type d'Allan temporel des résidus par rapport à une fonction linéaire des moyennes par époque de toutes les Vues communes par GPS P3 entre les deux masers à hydrogène situés respectivement au PTB et à OP suivant maser H4(PTB) – maser 816(OP) du 22 octobre au 16 novembre 2004.

L'écart-type d'Allan modifié correspondant aux mêmes données est tracé sur la figure 19. On y constate de manière similaire une modulation en bruit blanc de phase (pente $-3/2$), suivie d'une modulation de scintillation de phase (pente 0) perturbée par le terme périodique journalier. La suite de la courbe est proche d'une pente en $-1/2$, signature d'un bruit blanc de fréquence (ou d'une marche aléatoire de phase).

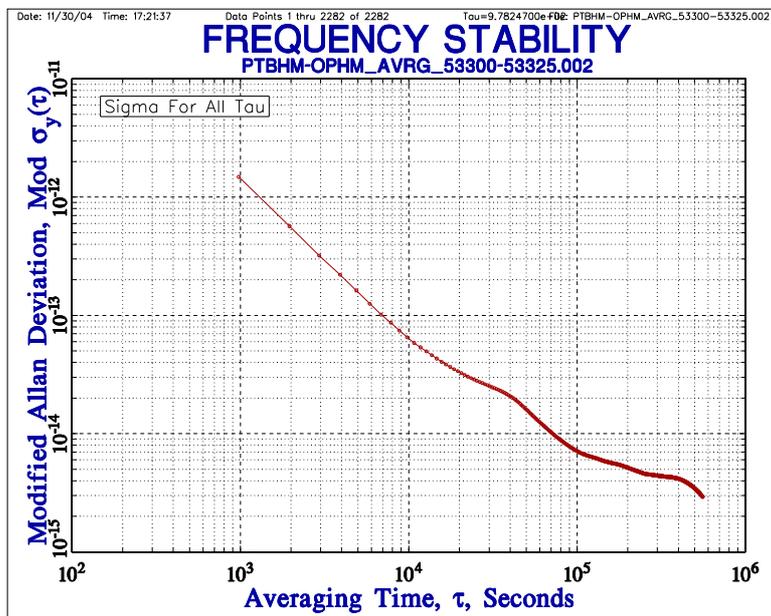


Figure 19. Ecart-type d'Allan modifié des résidus par rapport à une fonction linéaire des moyennes par époque de toutes les Vues communes par GPS P3 entre les deux masers à hydrogène situés respectivement au PTB et à OP suivant maser H4(PTB) – maser 816(OP) du 22 octobre au 16 novembre 2004.

En réalité, l'événement survenu autour de 00:00 UTC le MJD 53306 a une influence prépondérante sur ces écarts-type d'Allan à moyen terme. En effet, si l'on supprime de la figure 17 toutes les mesures antérieures à cet événement, et que l'on trace un écart-type d'Allan temporel, on obtient le tracé de la figure 20. On y constate que la modulation de bruit blanc de phase s'étend presque de la période d'échantillonnage des mesures jusqu'à une période d'analyse d'environ 60 000 s, bien que perturbée par des termes périodiques successifs, où on atteint un seuil de 200 ps. Au-delà de cette période d'analyse, on note un changement de pente bien marqué, mais qui n'est pas spécifiquement identifiable. On peut penser qu'il pourrait s'agir d'une asymptote entre une pente 0 (scintillation de phase masquée par les termes périodiques) et une pente +1/2 (bruit blanc de fréquence), vite remplacée par une pente +1, signature d'une modulation de bruit de scintillation de fréquence. L'idée sous-jacente est donc que l'on attendrait les masers à partir d'une période d'analyse d'environ 10^5 s, soit un peu plus de un jour.

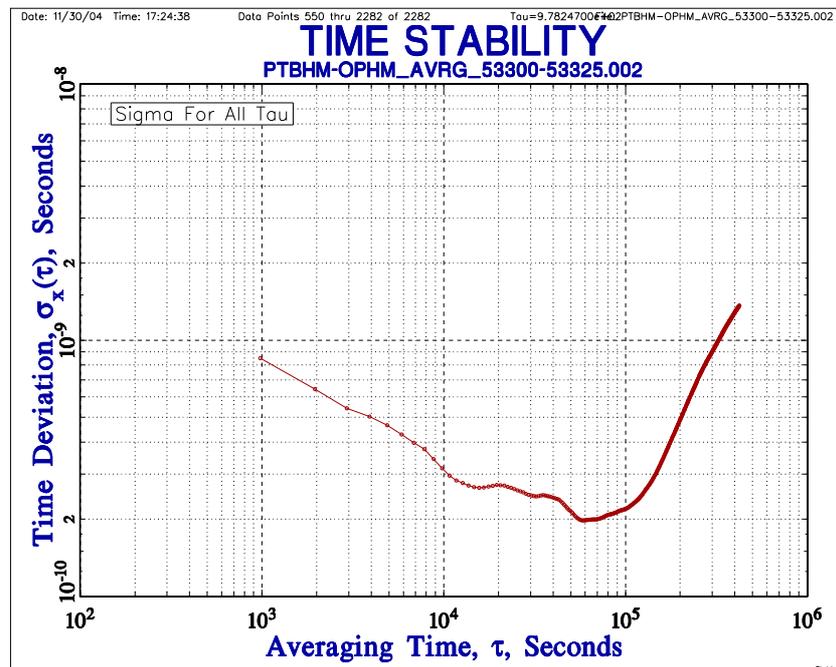


Figure 20. Ecart-type d'Allan temporel des résidus par rapport à une fonction linéaire des moyennes par époque de toutes les Vues communes par GPS P3 entre les deux masers à hydrogène situés respectivement au PTB et à OP suivant maser H4(PTB) – maser 816(OP) du 28 octobre (MJD 53306) au 16 novembre 2004.

L'écart-type d'Allan modifié confirme cette analyse. On constate simplement que le point le plus bas de la courbe, environ $3,5 \times 10^{-15}$, est atteint pour une période d'analyse de deux jours environ. De la part de masers à hydrogène, on attend justement le passage d'une modulation de bruit de scintillation de fréquence (pente 0) à une dérive linéaire de fréquence (pente +1) pour une telle période d'analyse. On voit bien sur cet exemple que l'écart-type d'Allan temporel est bien adapté pour analyser les bruits de phase, alors que l'écart-type d'Allan modifié (et ce serait vrai de l'écart-type d'Allan) permet de mieux visualiser ce qui se passe pour les bruits de fréquence.

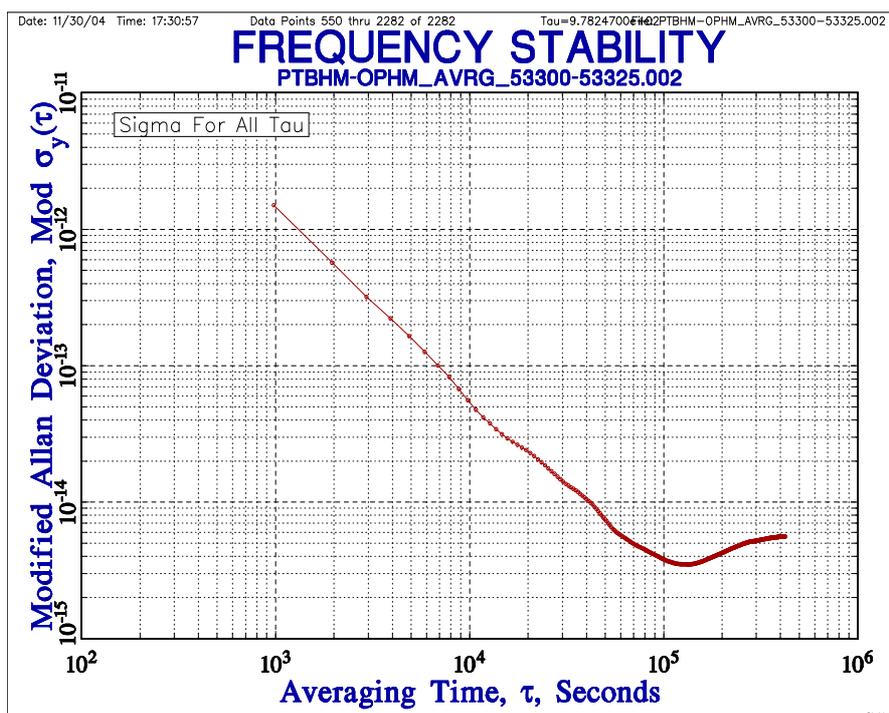


Figure 21. *Ecart-type d'Allan modifié des résidus par rapport à une fonction linéaire des moyennes par époque de toutes les Vues communes par GPS P3 entre les deux masers à hydrogène situés respectivement au PTB et à OP suivant maser H4(PTB) – maser 816(OP) du 28 octobre (MJD 53306) au 16 novembre 2004.*

Nous avons alors proposé de faire une sélection dans les Vues communes simultanées pour tenter d'améliorer la stabilité des moyennes par époque. Un calcul de moyenne, même sur un nombre réduit d'échantillons (ici 7,5 Vues communes simultanées par époque) peut en effet être accompagné d'un calcul d'écart-type que l'on appelle communément le « sigma ». En éliminant les Vues communes simultanées dont l'écart à la moyenne est supérieur à $\pm 3 \times$ sigma, on doit pouvoir réduire le bruit résultant. On diminue ainsi le nombre moyen de Vues communes simultanées à 6,8, ce qui reste acceptable. Une sélection à $\pm 2 \times$ sigma a également été tentée, mais le nombre moyen de Vues communes simultanées tombe à 4,6, et la stabilité obtenue (écart-type d'Allan) est moins bonne que sur les données d'origine.

Toujours en ne considérant que les données à partir du MJD 53306, au-delà de l'événement décrit plus haut, on obtient alors un écart-type d'Allan temporel suivant le tracé de la figure 22. On y voit un bruit inférieur à celui de la figure 20 pour la période d'échantillonnage, voisine de 1000 s, qui descend en $-1/2$ jusqu'à une période d'analyse de probablement 20 000 s. Car ensuite, l'expérience permet de penser que l'on a une modulation de bruit de scintillation de phase (pente 0) perturbée par des termes périodiques, jusqu'à une période d'analyse d'environ 1 d (= 86 400 s), à un seuil d'environ 170 ps. Puis on observe une asymptote vers une pente + 2, la fin de la courbe étant limitée par les intervalles de confiance de plus en plus grands.

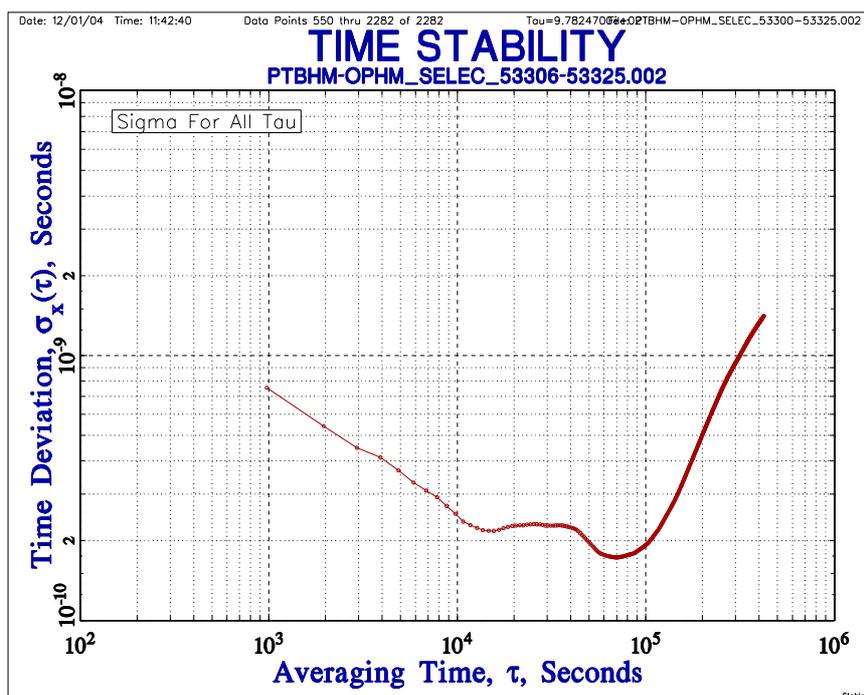


Figure 22. Ecart-type d'Allan temporel des résidus par rapport à une fonction linéaire des moyennes par époque des Vues communes par GPS P3 sélectionnées ($\pm 3 \times \text{sigma}$) entre les deux masers à hydrogène situés respectivement au PTB et à OP suivant maser H4(PTB) – maser 816(OP) du 28 octobre (MJD 53306) au 16 novembre 2004.

L'écart-type d'Allan modifié correspondant est tracé sur la figure 23. On voit qu'on atteint presque les 3×10^{-15} pour une période d'analyse un peu supérieure à 10^5 s.

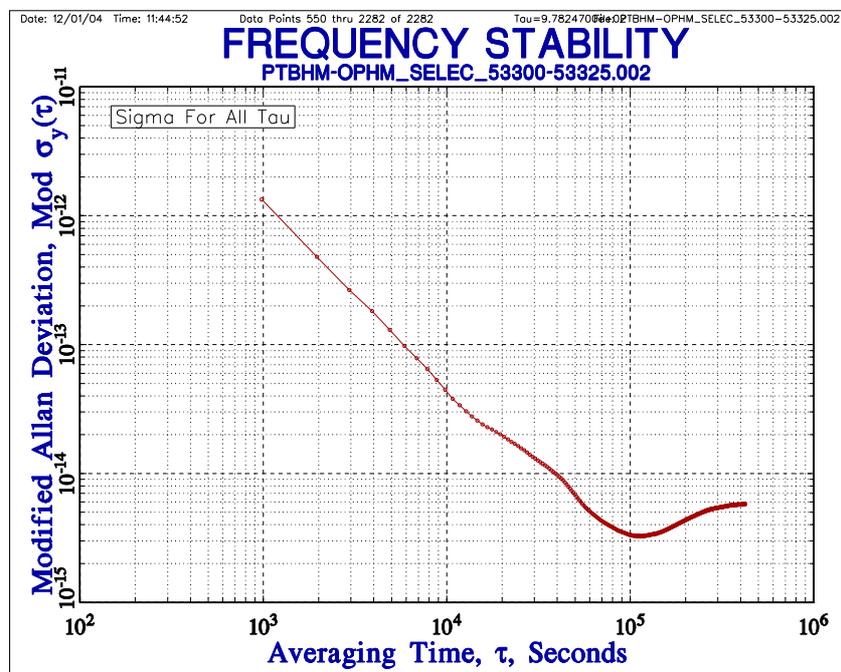


Figure 23. Ecart-type d'Allan modifié des résidus par rapport à une fonction linéaire des moyennes par époque des Vues communes par GPS P3 sélectionnées ($\pm 3 \times \text{sigma}$) entre les deux masers à hydrogène situés respectivement au PTB et à OP suivant maser H4(PTB) – maser 816(OP) du 28 octobre (MJD 53306) au 16 novembre 2004.

Afin de visualiser les intervalles de confiance, donnés sur les figures à un « sigma », on a tracé sur les figures 24 et 25 les mêmes écarts-type d'Allan temporel (correspondant à la figure 22) et modifié (correspondant à la figure 23), calculés par octave (c'est à dire pour des périodes d'analyses issues de τ_0 par les facteurs : 1, 2, 4, 8, 16, 32, ...). On voit bien qu'il est parfois difficile de conclure sur une tendance dominante pour les grandes périodes d'analyse : il y a par exemple recouvrement des intervalles de confiance entre les trois derniers points tracés sur la figure 25 pour une pente 0.

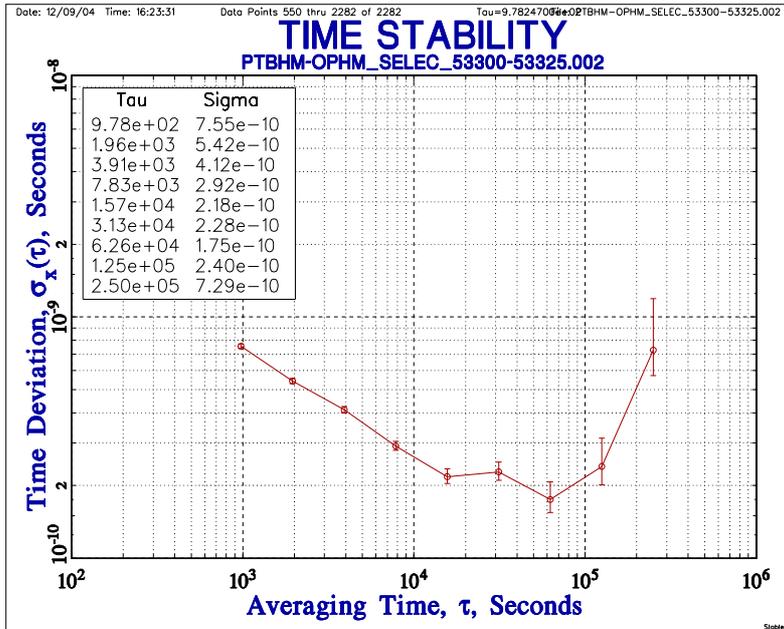


Figure 24. Visualisation des intervalles de confiance sur l'écart-type d'Allan temporel (figure 22).

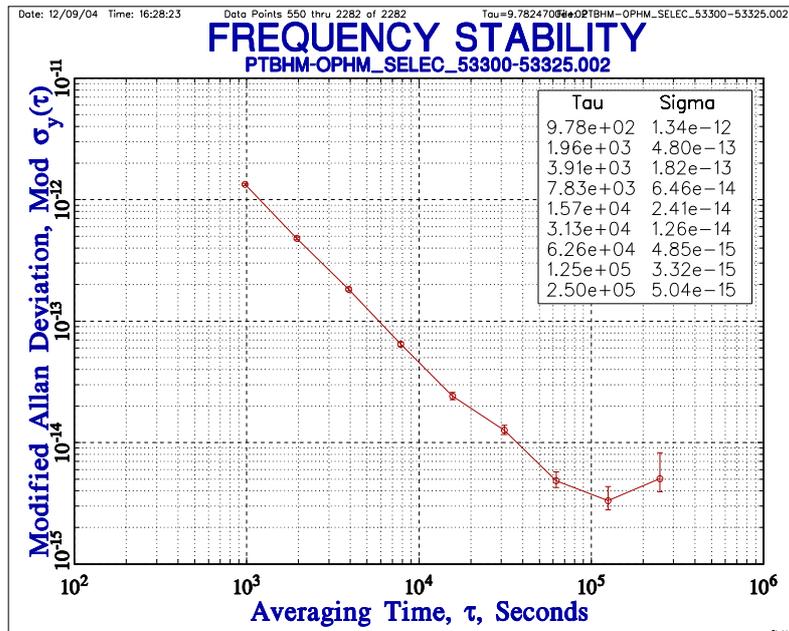


Figure 25. Visualisation des intervalles de confiance sur l'écart-type d'Allan modifié (figure 22).

Tout ces résultats ont été validés par des traitements indépendants effectués par le BIPM sur les mêmes données.

8.3. Spécifications de besoin du lien micro-ondes ACES.

La mission spatiales ACES (Atomic Clock Ensemble in Space) doit embarquer deux horloges atomiques à bord de la Station spatiale internationale (ISS) vers 2008. Il s'agit d'un maser à hydrogène spatial de l'Observatoire de Neuchâtel (Suisse), dénommé SHM, et d'une horloge à atomes froids de césium du CNES (Centre national d'études spatiales, France), élaborée avec la participation active du BNM-SYRTE à l'Observatoire de Paris et dénommée PHARAO. Les physiciens des différents laboratoires ont évalué les stabilités prévisionnelles de ces horloges en terme d'écart-type d'Allan standard, qui sont tracées sur la figure 26. Dans le cas de l'horloge PHARAO, la stabilité dépend de la qualité de l'oscillateur local de l'horloge, et c'est pourquoi deux courbes sont tracées. On a considéré par la suite uniquement la courbe correspondant à une pente en $7 \times 10^{-14} \times \tau^{-1/2}$.

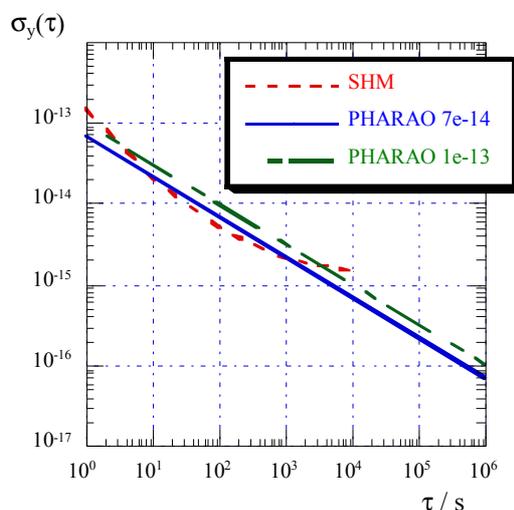


Figure 26. Stabilités prévisionnelles des horloges embarquées dans la mission ACES [21].

Le problème qui s'est posé était de définir les spécifications de besoin du lien micro-ondes entre le sol et l'espace pour atteindre ces horloges [21]. L'orbite basse de l'ISS implique que la durée d'un passage au-dessus d'une station terrestre est de l'ordre de 350 s, puis que l'ISS repasse plusieurs fois toutes les 90 min environ. Mais ce schéma ne se reproduit qu'une fois par jour environ. Il est donc apparu assez rapidement qu'il fallait définir une double spécification de besoin : d'une part sur une période d'analyse correspondant à un passage de l'ISS, soit environ 350 s ; d'autre part sur une période d'analyse de un jour et plus. Or on constate sur la figure 26 que l'horloge la plus stable de ACES sur 350 s est le SHM, alors que l'horloge la plus stable au-delà de un jour est PHARAO.

Comme on s'attend plutôt à rencontrer une modulation de bruits de phase sur les mesures du lien micro-ondes, on a établi ces spécifications en écart-type d'Allan temporel, comme tracé sur la figure 27. A court terme, la pente la plus forte à laquelle on peut s'attendre sera celle correspondant à une modulation de bruit blanc de phase, et ceci pour atteindre le SHM sur une période d'analyse de 350 s. A plus long terme, au-delà de un jour, on espère pouvoir suivre la stabilité de PHARAO qui devrait être une modulation de bruit blanc de fréquence. C'est ainsi que les spécifications de besoin de la liaison micro-ondes entre le sol et l'ISS ont été définies.

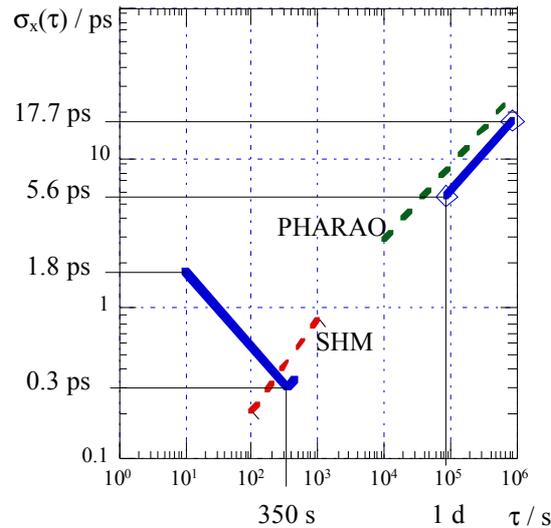


Figure 27. Spécifications de besoin de la liaison micro-ondes entre le sol et l’ISS dans le cadre de ACES [21].

Les stabilités requises sont dans une gamme picoseconde qui n’a encore jamais été atteinte par aucun système. Cette mission demande donc un développement technique qui doit dépasser l’état de l’art des techniques connues.

Références bibliographiques.

- [1] NIST Technical Note 1337, Edited by D. B. Sullivan, D. W. Allan, D. A. Howe, F. L. Walls, *Characterization of Clocks and Oscillators*, NIST, March 1990. [Recueil d’articles et de recommandations]
- [2] J. Vanier, C. Audouin, *The Quantum Physics of Atomic Frequency Standards*, Vol. 1, *Appendix 2F Characterisation of Frequency Stability*, Adam Hilger editors, 1989, pp 216-256.
- [3] F. Vernotte, *Stabilité temporelle des oscillateurs: nouvelles variances, leurs propriétés, leurs applications*, Thèse de Doctorat, Université de Franche-Comté, Observatoire de Besançon, 1990.
- [4] Report 580 of the International Radio Consultative Committee (CCIR), pp. 142-150, 1986. Reproduit dans NIST TN 1337 [1] pp. TN-162 – TN-170.
- [5] David W. Allan, *Time and Frequency (Time Domain) Characterization, Estimation, and Prediction of Precision Clocks and Oscillators*, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, Vol. UFFC-34, No. 6, November 1987, pp. 647-654. Reproduit dans NIST TN 1337 [1] pp. TN-121 – TN-128.
- [6] D. A. Howe, D. W. Allan and J. A. Barnes, *Properties of Signal Sources and Measurements*, Proc. of the 35th Annual Symposium on Frequency Control, May 1981, Philadelphia, PA, USA, pp. 669-717. Reproduit dans NIST TN 1337 [1] pp. TN-14 – TN-60.

- [7] P. Lesage and C. Audouin, *Characterization and Measurement of Time and Frequency Stability*, Radio Science, Vol. 14, no. 4, 1979, pp. 521-539. Reproduit dans NIST TN 1337 [1] pp. TN-171 – TN-189.
- [8] David W. Allan, Marc A. Weiss, and James L. Jespersen, *A Frequency-Domain View of Time-Domain Characterization of Clocks and Time and Frequency Distribution Systems*, Proc. of the 45th Annual Symposium on Frequency Control, May 1991, pp. 667 – 678.
- [9] Paul Lesage and Théophile Ayi, *Characterization of Frequency Stability: Analysis of the Modified Allan Variance and Properties of Its Estimate*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurements, December 1984, Vol. IM-33, No. 4, pp. 332-336. Reproduit dans NIST TN 1337 [1] pp. TN-259 – TN-263.
- [10] S. Stein, *Frequency and Time – Their Measurement and Characterization*, Precision Frequency Control, Vol. 2, edited by E.A. Gerber and A. Ballato (Academic Press, New-York, 1985), pp. 191-232 and pp. 399-416. Reproduit dans NIST TN 1337 [1] pp. TN-61 – TN-120.
- [11] <http://www.boulder.nist.gov/timefreq/general/glossary.htm#allandeviation>
- [12] <http://www.irem.univ-mrs.fr/activites/lycee/lyacc305.php>
- [13] Bertrand Juompan. *Métrie des comparaisons d'horloges par satellites. Contribution à l'étude d'un complément au système de radionavigation GPS et à la prédiction du Temps du GPS. Proposition pour une nouvelle méthode de synchronisation d'horloges en temps réel*. Thèse de Doctorat de l'Observatoire de Paris, novembre 1994.
- [14] Marc A. Weiss and Charles A. Greenhall, *A Simple Algorithm for Approximating Confidence on the Modified Allan Variance and on the Time Variance*, Proc. of the 28th Annual Precise Time and Time Interval Meeting, 1996, pp. 215-223.
- [15] Marc A. Weiss, Fred L. Walls, Charles A. Greenhall, and Tod Walter, *Confidence on the Modified Allan Variance and on the Time Variance*, Proc. of the European Frequency and Time Forum, Besançon, 1995, pp. 153-165.
- [16] C. Hackman and T. E. Parker, *Noise analysis of unevenly spaced time series data*, Metrologia, 1996, 33, pp. 457-466.
- [17] James A. Barnes and David W. Allan, *Variances Based on Data with Dead Time Between the Measurements*, NIST Technical Note 1318, 1990, pp. 1 - 40. Reproduit dans NIST TN 1337 [1] pp. TN-296 – TN-335.
- [18] D. A. Howe, *Total Variance Explained*, Proc. of the 13th European Frequency and Time Forum and 1999 IEEE International Frequency Control Symposium, pp. 1093-1099, April 1999.

- [19] D. A. Howe and T. Pepler, *Definitions of "Total" Estimators of Common Time-Domain Variances*, 2001 IEEE International Frequency Control Symposium, pp. 127-132, June 2001.
- [20] D. A. Howe, *Total Deviation Approach to Long-Term Characterization of Frequency Stability*, IEEE Trans. Ultrasonics, Ferroelectrics and Freq. Control, UFFC-47 n°5, pp. 1102-1110, Sept. 2000.
- [21] P. Uhrich, Ph. Guillemot, P. Aubry, F. Gonzalez, C. Salomon, *ACES Microwave link requirements*, IEEE Trans. Ultrasonics, Ferroelectrics and Freq. Control, UFFC-47 n°5, pp. 1134-1139, Sept. 2000.