Vectorisation dans le PSA

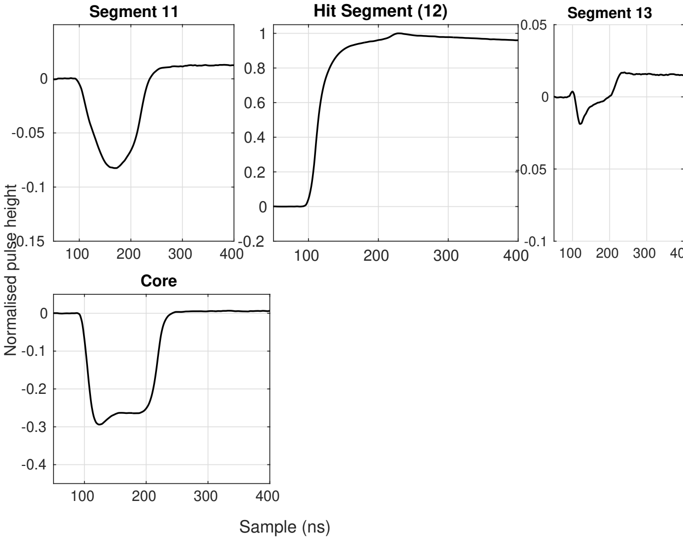
Comment se vider un chargeur dans le pied avec une racine cubique ?

Vincent Lafage

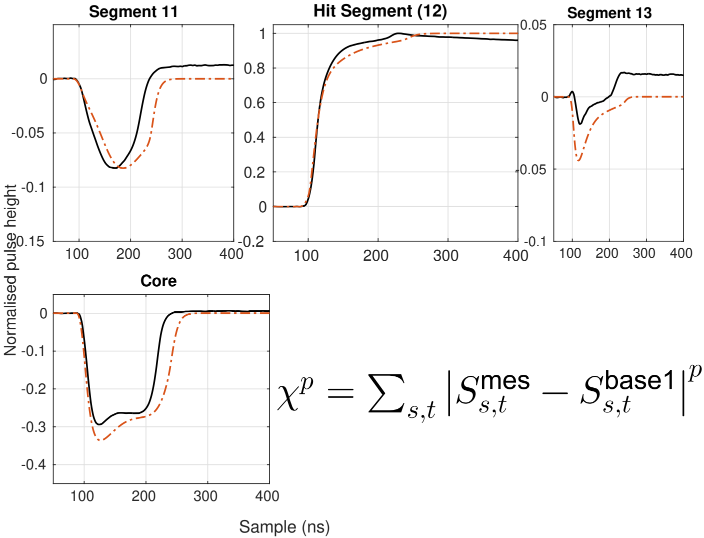
IJCLab, CNRS/IN2P3 & Université Paris-Saclay, Orsay, France

Réunion Reprises, lundi 20 novembre 2023

PSA *Pulse Shape Analysis*

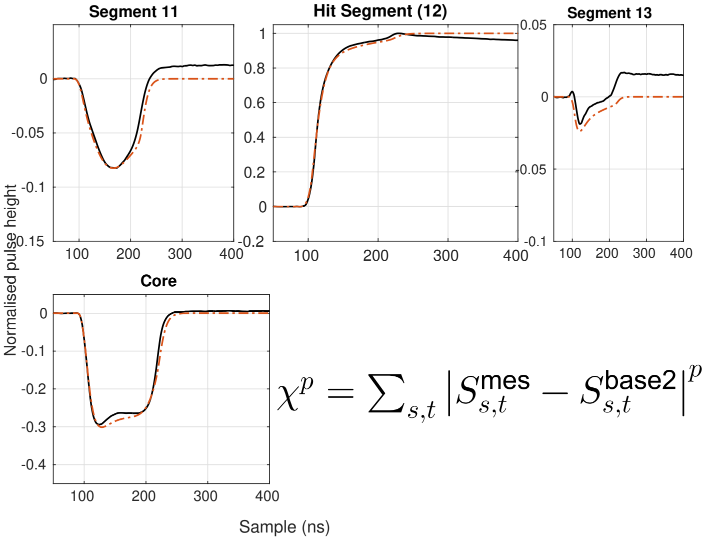


PSA *Pulse Shape Analysis*



$$\chi^p = \sum_{s,t} \left| S_{s,t}^{\text{mes}} - S_{s,t}^{\text{base1}} \right|^p$$

PSA *Pulse Shape Analysis*



$$\chi^p = \sum_{s,t} \left| S_{s,t}^{\text{mes}} - S_{s,t}^{\text{base2}} \right|^p$$

$p = 0.3$

$$x \mapsto x^p = x^{\frac{3}{10}} = \left(\sqrt[10]{x}\right)^3$$

$\Rightarrow$ fonction **algébrique** (racines de polynômes à coeff entiers)

- $x^{0.3} = \exp(0.3 \times \ln x)$ (on introduit une erreur sur 0.3)

  deux fonctions **transcendantes** élémentaires

  - ... coûteuses
  - ... dont l'**arrondi correct** n'est pas garanti
    The Table Maker's Dilemma
    pour avoir l'arrondi correct à n chiffres/bits... [1]

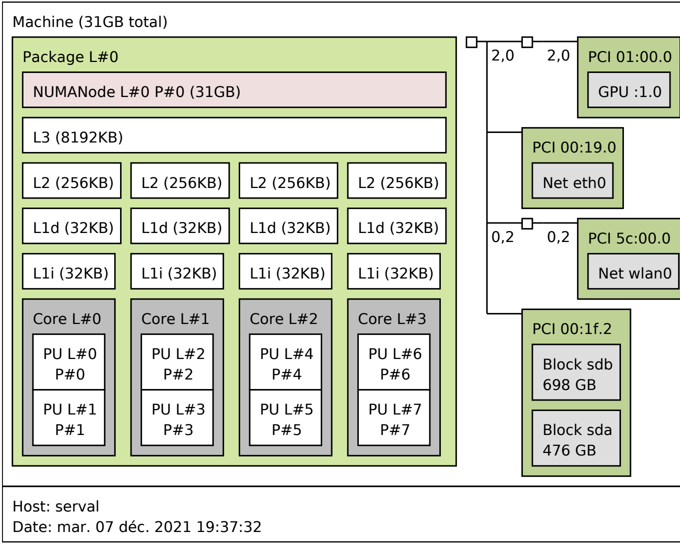
$$\exp(0.5091077534282133) = \underbrace{1.663806007261509}_{\text{16 digits}}\,\underbrace{5000000000000000}_{\text{16 digits}}\,49\ldots$$

$$\exp(0.7906867968553504) = \underbrace{2.204910231771509}_{\text{16 digits}}\,\underbrace{4999999999999999}_{\text{16 digits}}\,16\ldots$$

$p = 0.3$

- Lookup Table
  - converti l'argument x en entier : $\mathtt{i} = \lfloor \mathtt{x} \rfloor$
  - renvoie la valeur de la table `T` indexée par cet entier : $x^p \sim \mathtt{T}[\lfloor \mathtt{x} \rfloor]$
  - $\Rightarrow$ perte de "continuité"$\Rightarrow$ perte de précision (surtout pour x petit)
  - $\Rightarrow$ énorme empreinte mémoire : 2 Moctets
  - $\Rightarrow$ les valeurs pour un argument négatif sont stockées malgré la symétrie de la fonction : double l'empreinte mémoire !
  - $\Rightarrow$ indirection impossible à vectoriser (alors que le calcul pour $p = 2$ avait été vectorisé)

Know your tool `hwloc-ls`



Alternatives pour l'évaluation

- `powf (x, p)`
- `expf (logf (x) * p)`
- `exp2f (log2f (x) * p)`
- `cbrtf (x)`
- `cbrt` maison

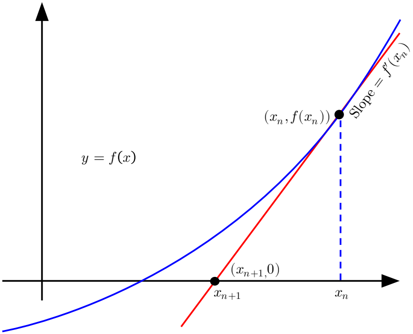
$p = 0.33333333\cdots$

$$a \mapsto z = a^p = a^{\frac{1}{3}} = (\sqrt[3]{a})$$

$\Rightarrow$ fonction **algébrique**

- `cbrt (a)` existe dans la `libm`
- ...mais au fait, comment extrait-on z=`cbrt` (a) ? $\Rightarrow$ zéro de $x \mapsto y = x^3 - a$

Extraire des racines



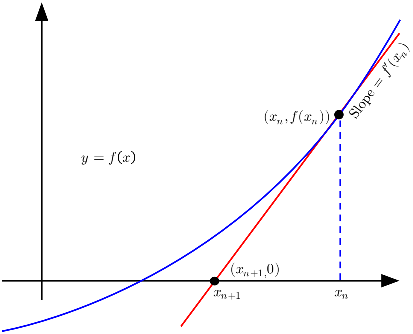
$p = 0.3333333\cdots$

$$a \mapsto z = a^p = a^{\frac{1}{3}} = (\sqrt[3]{a})$$

$\Rightarrow$ fonction **algébrique**

- `cbrt (a)` existe dans la `libm`
- …mais au fait, comment extrait-on z=`cbrt` (a) ? $\Rightarrow$ zéro de $x \mapsto y = x^3 - a$

Extraire des racines



NEWTON $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

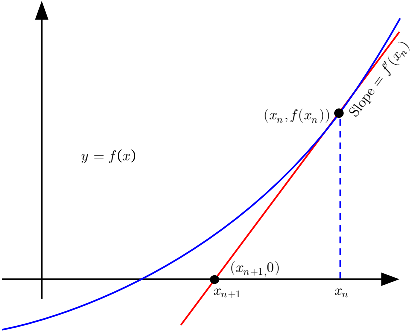
$p = 0.33333333\cdots$

$$a \mapsto z = a^p = a^{\frac{1}{3}} = (\sqrt[3]{a})$$

$\Rightarrow$ fonction **algébrique**

- `cbrt (a)` existe dans la `libm`
- …mais au fait, comment extrait-on z=`cbrt` (a) ? $\Rightarrow$ zéro de $x \mapsto y = x^3 - a$

Extraire des racines



NEWTON	$x_{n+1} =$	$x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
HALLEY	$x_{n+1} =$	$x_n - \dfrac{2f(x_n)f'(x_n)}{2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)}$

$p = 0.5$

- `sqrt (y)` existe dans la `libm` et dans le FPU
  garantie d'arrondi correct dans `IEEE-754`
- …mais au fait, comment extrait-on x `= sqrt (`y`)` ?

$p = 0.5$

- `sqrt (y)` existe dans la `libm` et dans le FPU
  garantie d'arrondi correct dans `IEEE-754`
- …mais au fait, comment extrait-on x `=` `sqrt` (y) ?
  HÉRON $\quad x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{y}{x_n}}{2}$
- …et d'ailleurs, comment divise-t-on ?

$p = 0.5$

- `sqrt (y)` existe dans la `libm` et dans le FPU
  garantie d'arrondi correct dans `IEEE-754`
- …mais au fait, comment extrait-on x `= sqrt` (y) ?
  HÉRON $\quad x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{y}{x_n}}{2}$
- …et d'ailleurs, comment divise-t-on ?

inverse $\quad x_{n+1} = \quad x_n \left[2 - y x_n\right]$

$p = 0.5$

- `sqrt (y)` existe dans la `libm` et dans le FPU
  garantie d'arrondi correct dans `IEEE-754`
- …mais au fait, comment extrait-on x `=` `sqrt (`y`)` ?
  HÉRON $\quad x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{y}{x_n}}{2}$
- …et d'ailleurs, comment divise-t-on ?

$$\text{inverse} \qquad x_{n+1} = x_n \left[2 - y x_n\right]$$

$$\text{inverse } \texttt{sqrt} \qquad x_{n+1} = \frac{x_n}{2} \left[3 - y x_n^2\right]$$

$p = 0.5$

- `sqrt (y)` existe dans la `libm` et dans le FPU
  garantie d'arrondi correct dans `IEEE-754`
- ...mais au fait, comment extrait-on x `= sqrt (`y`)` ?
  HÉRON $\quad x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{y}{x_n}}{2}$
- ...et d'ailleurs, comment divise-t-on ?

inverse	$x_{n+1} = x_n \left[2 - y x_n\right]$
inverse `sqrt`	$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} \left[3 - y x_n^2\right]$
`cbrt` NEWTON	$x_{n+1} = \frac{1}{3} \left[2x_n - \frac{y}{x_n^2}\right] = x_n \frac{2x_n^3 - y}{3x_n^3}$

$p = 0.5$

- `sqrt (y)` existe dans la `libm` et dans le FPU
  garantie d'arrondi correct dans `IEEE-754`
- …mais au fait, comment extrait-on x `= sqrt` (y) ?

  HÉRON $\quad x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{y}{x_n}}{2}$
- …et d'ailleurs, comment divise-t-on ?

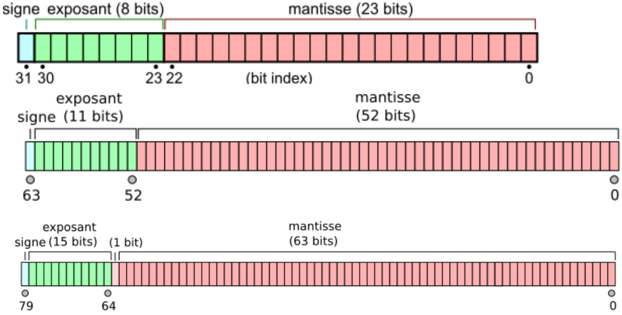
inverse	$x_{n+1} = x_n \left[2 - y x_n\right]$
inverse `sqrt`	$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} \left[3 - y x_n^2\right]$
`cbrt` NEWTON	$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left[2x_n - \frac{y}{x_n^2}\right] = x_n \frac{2x_n^3 - y}{3x_n^3}$
`cbrt` HALLEY	$x_{n+1} = x_n \frac{x_n^3 + 2y}{2x_n^3 + y}$

Flottants

Forme normalisée : mantisse, alias *normalized significand*

mantissa $\times$ base$^{\text{exponent}}$ mantissa $\in [1; \text{base}[$, exponent $\in \mathbb{Z}$

Astuce, en base 2 : le chiffre le plus significatif est forcément 1…



Racine maison *Donnez-moi un point d'appui...*

D'abord, on réduit l'intervalle d'étude :

$$
\begin{array}{rcl}
\forall x \in \mathbb{F}, \exists (s = \pm 1, m \in [1,2[, e \in \mathbb{Z}) / x & = & s \times m \times 2^e \\
\forall x \in \mathbb{F}, \exists (s = \pm 1, m' \in [1/2,1[, f \in \mathbb{Z}, g \in \{0,-1,-2\}) / \quad x & = & s \times m' \times 2^{(3f+g)} \\
\forall x \in \mathbb{F}, \exists (s = \pm 1, m' \in [1/2,1[, f \in \mathbb{Z}, g \in \{0,-1,-2\}) / \quad \sqrt[3]{x} & = & s \times \sqrt[3]{m' \times 2^g} \times 2^f \\
\mathbf{m''} = \mathbf{m'} \times \mathbf{2^g} & \in & [\mathbf{0.125}, \mathbf{1}[
\end{array}
$$

Meilleure approximation polynômiale d'ordre 3
(Tchebychev / algorithme de Remez)
Approximate cube root in $[0.125, 1)$ *with relative error 5.22e-3 i.e. 7.5 bits*

$$
\begin{array}{rcl}
b_0 & = & 0.3408415318 \\
b_1 & = & 1.458112717 \\
b_2 & = & -1.385927796 \\
b_3 & = & 0.5921840668 \\
b(x) & = & b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \\
 & = & ((b_3 x + b_2)\, x + b_1)\, x + b_0 \qquad \text{Horner -- Ruffini}
\end{array}
$$

Racine maison

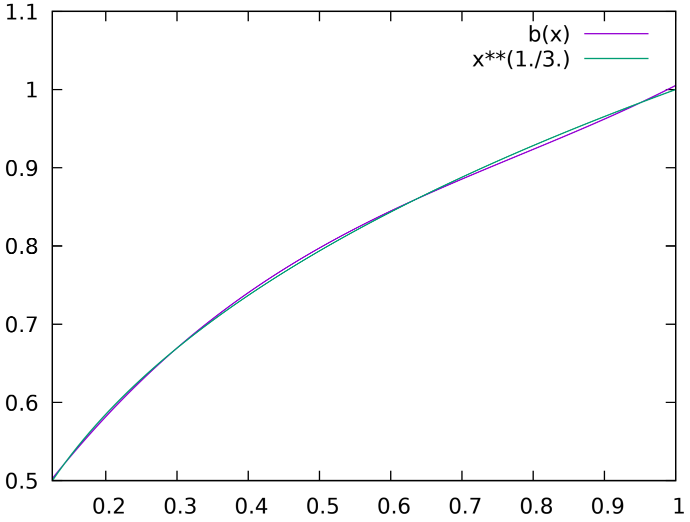


Figure – Comparaison interpolant *vs.* racine cubique $\forall x \in [1/8; 1[$.

Racine maison

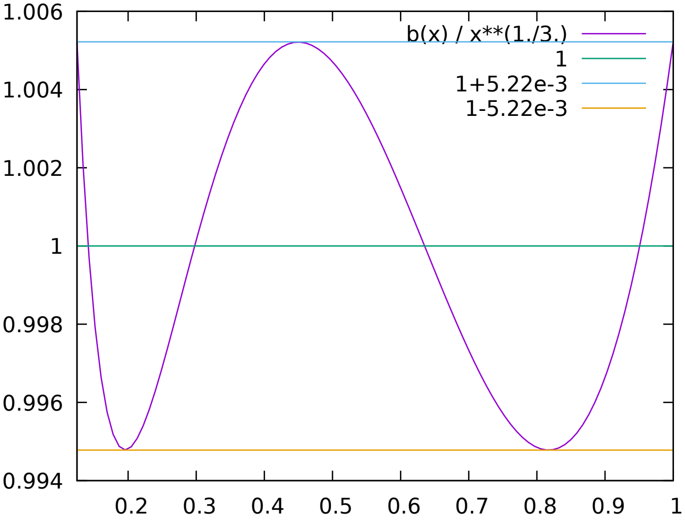


Figure – Ratio interpolant / racine cubique $\forall x \in [1/8; 1[$.

Code scalaire

```
inline double my_cbrt (double a)
{
    double r;
    if ((a == 0.0) || isinf(a) || isnan(a)) {
        /* handle special cases */
        r = a + a;
    } else {
        /* strip off sign-bit */
        double b = fabs (a);
        /* compute exponent adjustments */
        int e;
        b = frexp (b, &e);
        int s = e - 3*342;
        int f = s / 3;
        s = s - 3 * f;
        f = f + 342;
        /* map argument into the primary approximation interval [0.125,1) */
        b = ldexp (b, s);
        const float bb = (float)b;
        /* approximate cube root in [0.125,1) with relative error 5.22e-3 */
        float uu =                0x1.2f32c0p-1f;
        uu = fmaf (uu, bb, -0x1.62cc2ap+0f);
        uu = fmaf (uu, bb,  0x1.7546e0p+0f);
        uu = fmaf (uu, bb,  0x1.5d0590p-2f);
        /* refine cube root using two Halley iterations w/ cubic convergence */
        const float vv = uu * uu;
        uu = fmaf (fmaf (vv, uu, -bb) / fmaf (vv, 2.0f*uu, bb), -uu, uu);
        const double u = (double)uu;
        const double v = u * u; // this product is exact
        r = fma (fma (v, u, -b) / fma (v, 2.0*u, b), -u, u);
        /* map back from primary approximation interval by jamming exponent */
        r = ldexp (r, f);
        /* restore sign bit */
        r = copysign (r, a);
    }
    return r;
}
```

Code scalaire *vectorisable ?*

...

```
#pragma omp declare simd
inline float my_cbrtf (float a)
{    float r;
```

...

Code vectorisable ...

...

```
    delay  = stop-start;
    printf ("MCbrt:            %10lu\t%9.3f tick/iter\n", delay, ((float) delay)/((float) size));
    prepare (harvestcb, resultat_my, size, "MCbrt", my_cbrtf);

    start = __rdtsc();
    my_vec_cbrtf (harvestcb, resultat_myv, size);
    stop = __rdtsc();
    delay  = stop-start;

    printf ("VCbrt:            %10lu\t%9.3f tick/iter\n", delay, ((float) delay)/((float) size));
//    prepare (harvestcb, resultat_myv, size, "VCbrt", my_cbrtf);

    start = __rdtsc();
#pragma omp for simd aligned (harvestcb, resultat_pow) safelen(64)
    for (unsigned i = 0U; i < size; ++i)
    {
        resultat_pow[i] = powf (harvestcb[i], third);
```

...

```
gcc -Ofast -march=native -mtune=native -mavx2
    -fopenmp -fopenmp-simd -ftree-vectorize -fopt-info -ftree-vectorizer-verbose=1
    -mrecip --param=ssp-buffer-size=4
    -g -Wall -Wextra -Wshadow -Wconversion -Wpedantic
    speedcbrtf.c -o speedcbrtf -lm && taskset --cpu-list 0 ./speedcbrtf
```

Vectorisation

Est-ce que ça marche ?

```
objdump --disassemble=my_cbrtf speedcbrtf
```

```
0000000000401c30 <my_cbrtf>:
  401c30:       c5 f8 28 f0             vmovaps %xmm0,%xmm6
  401c34:       c5 fa 10 25 24 d5 00    vmovss 0xd524(%rip),%xmm4        # 40f160 <_IO_stdin_used+0x1e0>
  401c3b:       00
  401c3c:       c5 fa 10 15 1c d6 00    vmovss 0xd61c(%rip),%xmm2        # 40f260 <_IO_stdin_used+0x2e0>
  401c43:       00
  401c44:       c5 c8 54 fc             vandps %xmm4,%xmm6,%xmm7
  401c48:       c5 f9 7e f9             vmovd  %xmm7,%ecx
  401c4c:       c5 f9 7e f8             vmovd  %xmm7,%eax
  401c50:       c1 f9 17                sar    $0x17,%ecx
```

...

```
  401c92:       c4 e2 79 a9 15 c9 d5    vfmadd213ss 0xd5c9(%rip),%xmm0,%xmm2        # 40f264 <_IO_stdin_used+0x2e4>
  401c99:       00 00
  401c9b:       c4 e2 79 a9 15 c4 d5    vfmadd213ss 0xd5c4(%rip),%xmm0,%xmm2        # 40f268 <_IO_stdin_used+0x2e8>
  401ca2:       00 00
  401ca4:       c4 e2 79 a9 15 bf d5    vfmadd213ss 0xd5bf(%rip),%xmm0,%xmm2        # 40f26c <_IO_stdin_used+0x2ec>
  401cab:       00 00
  401cad:       c5 ea 59 ea             vmulss %xmm2,%xmm2,%xmm5
  401cb1:       c5 f8 28 ca             vmovaps %xmm2,%xmm1
  401cb5:       c4 e2 79 9d cd          vfnmadd132ss %xmm5,%xmm0,%xmm1
  401cba:       c5 f2 59 da             vmulss %xmm2,%xmm1,%xmm3
  401cbe:       c5 ea 58 ca             vaddss %xmm2,%xmm2,%xmm1
  401cc2:       c4 e2 79 99 e9          vfmadd132ss %xmm1,%xmm0,%xmm5
  401cc7:       c5 d2 53 cd             vrcpss %xmm5,%xmm5,%xmm1
  401ccb:       c5 f2 59 ed             vmulss %xmm5,%xmm1,%xmm5
  401ccf:       c5 f2 59 ed             vmulss %xmm5,%xmm1,%xmm5
  401cd3:       c5 f2 58 c9             vaddss %xmm1,%xmm1,%xmm1
  401cd7:       c5 f2 5c cd             vsubss %xmm5,%xmm1,%xmm1
  401cdb:       c5 e2 59 c9             vmulss %xmm1,%xmm3,%xmm1
  401cdf:       c5 f2 58 d2             vaddss %xmm2,%xmm1,%xmm2
  401ce3:       c5 ea 59 da             vmulss %xmm2,%xmm2,%xmm3
```

http://maqao.org/

MAQAO (Modular Assembly Quality Analyzer and Optimizer) is a performance analysis and optimization framework operating at binary level with a focus on core performance.

MAQAO mixes both dynamic and static analyses based on its ability to reconstruct high level structures such as functions and loops from an application binary. [2]

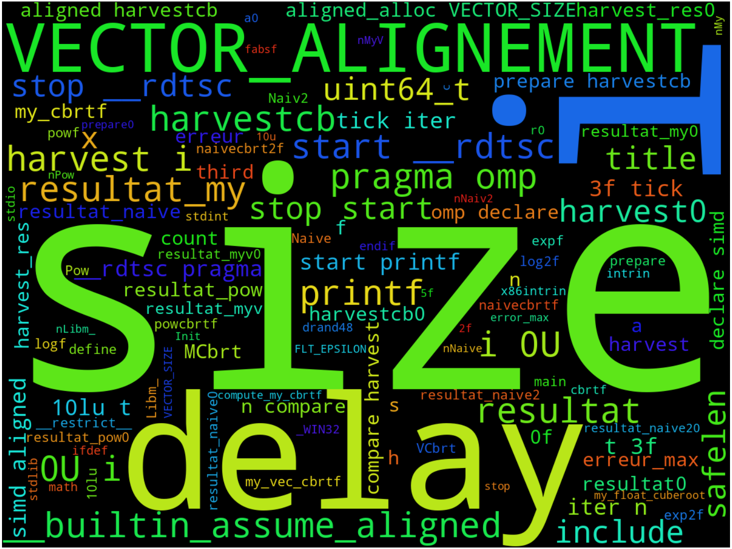
```
maqao.intel64 cqa fct-loops=my_cbrtf conf=hint,expert --output-format=html --follow-calls=inline s

Section 2.1.1: Binary loop #13
==============================

The loop is defined in:
 - /usr/local/lafage0/IJCLab/Reprises/my_float_cuberoot.c:52-70,93-121
 - /usr/local/lafage0/IJCLab/Reprises/speedcbrtf.c:64


The related source loop is multi-versionned.
43% of peak computational performance is used (13.95 out of 32.00 FLOP per cycle (GFLOPS @ 1GHz))

Vectorization
-------------
Your loop is fully vectorized, using full register length.

All SSE/AVX instructions are used in vector version (process two or more data elements in vector registers).


Execution units bottlenecks
---------------------------
Performance is limited by:
 - execution of FP add operations (the FP add unit is a bottleneck)
 - execution of FP multiply or FMA (fused multiply-add) operations (the FP multiply/FMA unit is a bottleneck)

By removing all these bottlenecks, you can lower the cost of an iteration from 19.50 to 17.00 cycles (1.15x speedup).

Workaround(s):
 - Reduce the number of FP add instructions
 - Reduce the number of FP multiply/FMA instructions


FMA
---
```

```
...
VFMADD213PS %YMM1,%YMM4,%YMM7
VBROADCASTSS 0x2a9ea(%RIP),%YMM1
VFMADD213PS %YMM1,%YMM4,%YMM7
VBROADCASTSS 0x2a9e0(%RIP),%YMM1
VFMADD213PS %YMM1,%YMM4,%YMM7
VMULPS %YMM7,%YMM7,%YMM1
VMULPS %YMM7,%YMM1,%YMM1
VBROADCASTSS 0x2a9ce(%RIP),%YMM5
VMOVAPS %YMM5,%YMM12
VFMADD213PS %YMM4,%YMM1,%YMM12
VRCPPS %YMM12,%YMM6
VPADDD %YMM15,%YMM9,%YMM13
VSUBPS %YMM1,%YMM4,%YMM1
VMOVUPS 0x42d3a0,%YMM11
VFMSUB213PS %YMM11,%YMM6,%YMM12
VMULPS %YMM6,%YMM1,%YMM1^^I1^^I0.50
VBROADCASTSS 0x2a98c(%RIP),%YMM6
VBROADCASTSS 0x2a987(%RIP),%YMM3
VFMADD213PS %YMM3,%YMM13,%YMM6
VBROADCASTSS 0x2a97d(%RIP),%YMM9
VFMADD213PS %YMM9,%YMM13,%YMM6
VBROADCASTSS 0x2a973(%RIP),%YMM9
VFMADD213PS %YMM9,%YMM13,%YMM6
VFMSUB213PS %YMM7,%YMM7,%YMM12
VFNMADD213PS %YMM7,%YMM1,%YMM12
VMULPS %YMM6,%YMM6,%YMM1
VMULPS %YMM6,%YMM1,%YMM1
...
```

- `V` Vector instruction...
- `SS` ...Scalar Single precision
- `PS` ...Packed Single precision

```
inline double my_cbrt (double a)
{
    double r;
    if ((a == 0.0) || isinf(a) || isnan(a)) {
        /* handle special cases */
        r = a + a;
    } else {
        /* strip off sign-bit */
        double b = fabs (a);
        /* compute exponent adjustments */
        int e;
        b = frexp (b, &e);
        int s = e - 3*342;
        int f = s / 3;
        s = s - 3 * f;
        f = f + 342;
        /* map argument into the primary approximation interval [0.125,1) */
        b = ldexp (b, s);
        const float bb = (float)b;
        /* approximate cube root in [0.125,1) with relative error 5.22e-3 */
        float uu =                0x1.2f32c0p-1f;
        uu = fmaf (uu, bb, -0x1.62cc2ap+0f);
        uu = fmaf (uu, bb,  0x1.7546e0p+0f);
        uu = fmaf (uu, bb,  0x1.5d0590p-2f);
...
```

Wordcloud



aligned harvestcb
a0
aligned_alloc VECTOR_SIZEharvest_res0
nMy
VECTOR_ALIGNEMENT
fabsf
nMyV
stop __rdtsc
uint64_t
prepare harvestcb
Naiv2
my_cbrtf
harvestcbtick iter
powf
prepare0
x
erreur
10u
r0
resultat_my0
naivecbrt2f
harvest i
start __rdtsc
title
nPow
third
pragma omp
resultat_my
3f tick
stdio
resultat_naive
stdint
stop startomp declareharvest0
nNaiv2
f
Naive
count
endif
expf
resultat_myv0
Pow_rdtsc pragma
start printf
log2f
prepare
intrin
resultat_pow
printf
5f
n
x86intrin
resultat_myv
harvestcb0
naivecbrtf
harvest_res
error_max
powcbrtf
nLibm_
drand48
2f
a
Init
logf
define
MCbrt
FLT_EPSILON
nNaive
i 0U
harvest
declare simd
size
VECTOR_SIZE
main
cbrtf
compute_my_cbrtf
resultat_naive2
10lu t
Libm_
n compare
s
resultat
__restrict__
resultat_naive0
harvest
_WIN32
resultat_naive20
resultat_pow0
0f
t 3f
ifdef
VCbrt
erreur_max
h
simd_aligned
0U i
stdlib
10lu
compare
my_vec_cbrtf
resultat0
math
stop
my_float_cuberoot
delay
iter n
exp2f
safelen
__builtin_assume_aligned
include

Interface

Table – *leaky abstraction* : standardiser l'interface

ieee_arithmetic	C / C++	Fortran'90	Ada
ieee_copy_sign (x, y)	copysign (d x, d y)	sign (x, y)	F'Copy_Sign (value, sign)
ieee_logb (x)	frexp (d x, i *exp)	exponent (x) fraction (x)	F'Exponent (x) F'Fraction (x)
ieee_scalb (x, i)	ldexp (d x, i exp) scalbn (d x, i exp)	set_exponent (x, i)	F'Scaling (x, adjustment)
ieee_next_after (x, y)	nextafter(d x, d y)	nearest (x, s)	F'Adjacent (x, towards)
		radix (x)	F'Machine_Radix
		epsilon (x)	F'Model_Epsilon
		precision (x)	
		digits (x)	
		range (x)	
			F'Machine_Mantissa
	std::numeric_limits	minexponent (x)	F'Machine_Emin
	std::numeric_limits	maxexponent (x)	F'Machine_Emax
		spacing (x)	
		rrspacing (x)	
ieee_rint (x)	nearbyint (d x) rint(d x)	nint (x)	F'Rounding (x)
	floor (d x)	floor (x)	F'Floor (x)
	ceil (d x)	ceiling (x)	F'Ceiling (x)
ieee_rem (x, y)			F'Remainder (x, y)

cycles CPU par itération	gcc	gcc vect	icc
`powf (x, p)`	49.67	52.26	4.56
`expf (logf (x) * p)`	26.90	8.27	2.80
`exp2f (log2f (x) * p)`	24.54	28.52	2.54
`cbrtf (x)`	47.27	48.48	5.68
`cbrt` maison	35.62	6.87	3.89

```
gcc -Ofast -march=native -mtune=native -mavx2
    -fopenmp -fopenmp-simd -ftree-vectorize -fopt-info -ftree-vectorizer-verbose=1
    -mrecip --param=ssp-buffer-size=4
    -g -Wall -Wextra -Wshadow -Wconversion -Wpedantic
    speedcbrtf.c -o speedcbrtf -lm && taskset --cpu-list 0 ./speedcbrtf
```

(avec des `double` et pas des `float`)

	`libm`	$\exp(\ln x/3)$	`new_cbrt`
`cbrt` $(x^3) \neq x$	57.45 %	22.87 %	0
`cbrt` $(x)^3 \neq x$	82.94 %	65.31 %	63.61%

D'abord, on réduit l'intervalle d'étude :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{F}, \exists (s=\pm 1, m \in [1,2[, e \in \mathbb{Z})/x &= s \times m \times 2^e \\
\forall x \in \mathbb{F}, \exists (s=\pm 1, m' \in [1/2,1[, f \in \mathbb{Z}, g \in \{0,-1,-2\})/\quad x &= s \times m' \times 2^{(5f+g)} \\
\forall x \in \mathbb{F}, \exists (s=\pm 1, m' \in [1/2,1[, f \in \mathbb{Z}, g \in \{0,-1,-2\})/\quad \sqrt[5]{x} &= s \times \sqrt[5]{m' \times 2^g} \times 2^f \\
\mathbf{m'' = m' \times 2^g} &\in \mathbf{[0.03125, 1[}
\end{aligned}$$

Meilleure approximation polynômiale minimax d'ordre 6
(Tchebychev / algorithme de Remez)
Approximate fitfh root in $[0.03125, 1)$ *with relative error 4.88e-3 i.e. 7.6 bits*

$$\begin{aligned}
b_0 &= 0.40884031080147931 \\
b_1 &= 0.34573722560336124e+1 \\
b_2 &= -0.16163221966851989e+2 \\
b_3 &= 0.46130545866787749e+2 \\
b_4 &= -0.71103421597307857e+2 \\
b_5 &= 0.54873671288291654e+2 \\
b_6 &= -0.16608666958306234e+2 \\
\epsilon = 0.48808005515867253e-2 & \\
b(x) &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots \\
&= (\cdots(b_6 x + b_5)x + \cdots + b_1)x + b_0 \qquad \text{Horner} - \text{Ruffini}
\end{aligned}$$

Racine 5e maison

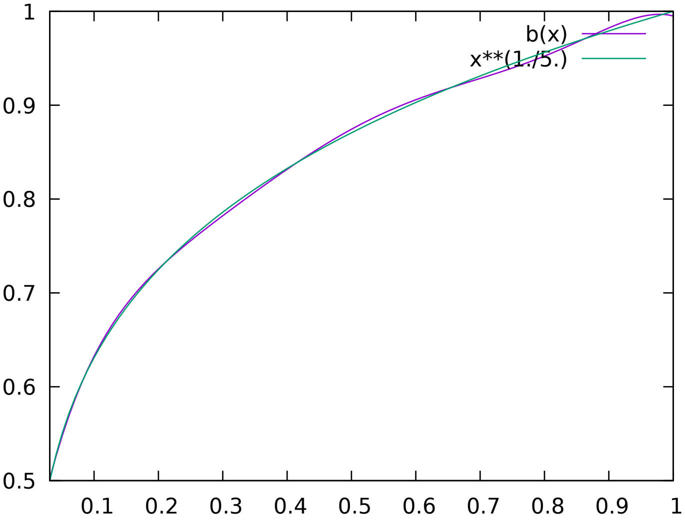


Figure – Comparaison interpolant *vs.* racine cinquième $\forall x \in [1/32; 1[$.

Racine 5e maison

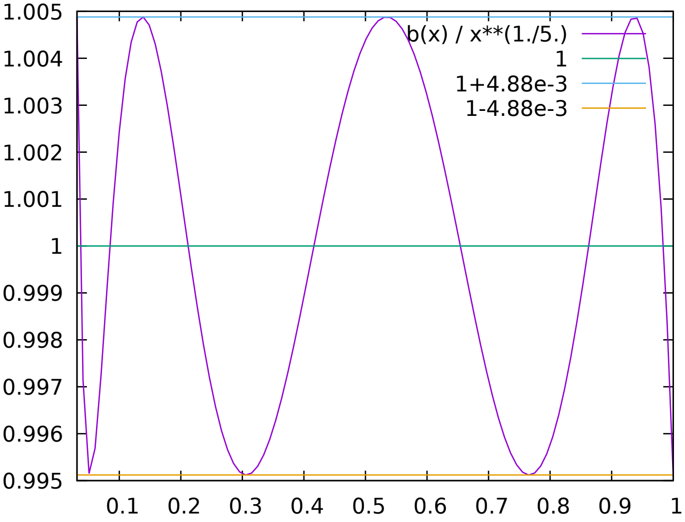


Figure – Ratio interpolant / racine cinquième $\forall x \in [1/32; 1[$.

Algorithme de Remez

1. Polynômes $T_n[X]$ de Čebyšëv (Tchebychev)
   - ont tous leurs extrema à ± 1
   - situés en $X_k = \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right), \quad k = 0, \cdots, n$
2. Identifier la fonction f (ici la racine cinquième) avec un polynôme $T_n[X]$ par solution d'un système linéaire d'ordre $n+2$, à base de matrice de Vandermonde :

   $n+1$ coefficients du polynome et la valeur de ϵ
   - rapporté à l'intervalle $[1/32, 1]$
   - aux positions des extrema $\cos\left(\frac{k}{n}\pi\right)$
   - en alternant le décalage $\pm\epsilon$
3. Mais en cherchant à avoir un écart relatif identique plutôt qu'un écart absolu identique
4. Puis on corrige les valeurs des X_k afin qu'ils correspondent aux extrema de T/f (en cherchant les 0 de la dérivée de T/f avec une méthode de Newton)
5. Et on reprend à l'étape 2

Amélioration itérative de l'estimateur

Itération de HALLEY pour $\sqrt[m]{y}$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n \frac{(m-1)x_n^m + (m+1)y}{(m+1)x_n^m + (m-1)y} \\ &= x_n \frac{2x_n^5 + 3y}{3x_n^5 + 2y} \qquad m = 5 \end{aligned}$$

au numérateur : 1 addition (opérandes de même signe) et 4 multiplications (et un décalage inoffensif correspondant à la multiplication par 2)
idem au dénominateur
et une division et une multiplication de plus
soit un total de 12 opérations avec arrondi, mais sans *catastrophic cancelation*
$\Rightarrow 6\epsilon$ machine d'erreur dans le pire des cas
Exercice : évaluer le nombre de conditions κ

$$\kappa = \left| \frac{\mathrm{d}\,(\ln|f(x)|)}{\mathrm{d}\ln|x|} \right|$$

Amélioration itérative de l'estimateur

Pour mémoire

$$x_{n+1} \quad = \quad x_n \frac{x_n^3 + 2y}{2x_n^3 + y} \qquad m = 3$$

au numérateur : 1 addition (opérandes de même signe) et 2 multiplications (et un décalage inoffensif correspondant à la multiplication par 2)
idem au dénominateur
et une division et une multiplication de plus
soit un total de 8 opérations avec arrondi, mais sans *catastrophic cancelation*

$\Rightarrow 4\epsilon$ machine d'erreur dans le pire des cas

Amélioration itérative de l'estimateur

$$x_{n+1} = x_n \frac{9x_n^{10} + 11y}{11x_n^{10} + 9y} \qquad m = 10$$

au numérateur : 1 addition (opérandes de même signe) et 6 multiplications :
$x^{10} = \left(\left(x^2\right)^2\right)^2 \cdot (x^2)$
idem au dénominateur
et une division et une multiplication de plus
soit un total de 16 opérations avec arrondi, mais sans *catastrophic cancelation*
$\Rightarrow 8\epsilon$ machine d'erreur dans le pire des cas

Perspectives

- Version `Fortran`
- Vectorisation de
  - Fonction W Lambert (`LogProduct`)
  - Équation de Kepler
  - Fonction Γ et B incomplète

Conclusion

- optimisez vos fonctions ! ...dans le chemin critique...à fond de boucle
- testez la vitesse et la précision ! `perf`... `CADNA`...
- tentez la vectorisation contemporaine ! `OpenMP SIMD`...
- testez que vos compilateurs vectorisent bien ! `MAQAO`...
- les types flottants sont mieux utilisés en tant qu'objets
  que les objets que l'on construit :
  personne n'utilise les accesseurs, sauf à construire de nouvelles méthodes.
- appelez vos développeurs préférés
  quand il y a une question de calcul,
  mais aussi quand il y a une question d'outils.
- *« Attention, ces calculs ont été réalisés par des professionnels, ESSAYEZ de les reproduire chez vous ! »*