

Plan

Introduction à la relativité générale

Principes et formalisme

Tests expérimentaux

Richard Taillet
Juillet 2023

Université Savoie Mont Blanc
LAPTh (Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique Théorique)

Principes

Nécessité d'une théorie relativiste de la gravitation

L'interaction gravitationnelle ne peut pas être instantanée

Elle doit prendre en compte la relativité restreinte

Programme mené à bien par Albert Einstein en 1915

(avec la participation de Marcel Grossman et David Hilbert)

Principes

Quelques rappels de mécanique
newtonienne

Principes

Universalité de la chute libre :

« Les objets lancés ou lâchés de la même façon et soumis à la gravitation tombent de la même façon, indépendamment de leur masse »

$$m_i \vec{a} = m_g \vec{g}$$

égalité de la masse grave et de la masse inertielle

Principes



$$\vec{a} = \vec{g}$$

égalité de la masse grave et de la masse inertielle

Principes

Dans le référentiel en chute libre (non galiléen)

$$m \vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_i$$

$$m \vec{a} = m\vec{g} - m\vec{a}_e = \vec{0}$$

Principe d'équivalence :

*« Les lois de la physique,
pour un observateur en chute libre dans un champ gravitationnel,
sont localement identiques à celles en l'absence de gravitation »*



Principes

une autre façon de raconter l'histoire



Principes

Dans un référentiel en chute libre (inertiel) $m_i \vec{a} = \vec{0}$

Dans le référentiel qui nous intéresse (le laboratoire)

$$m_i \vec{a} = -m_i \vec{a}_e$$

Principes

Dans un référentiel en chute libre (inertiel) ~~$m_i \vec{a}$~~ = $\vec{0}$

Dans le référentiel qui nous intéresse (le laboratoire)

$$\del{m_i \vec{a}} = -\del{m_i \vec{a}_e}$$

Principes

Dans un référentiel en chute libre (inertiel) ~~$m_i \vec{a} = \vec{0}$~~

Dans le référentiel qui nous intéresse (le laboratoire)

$$\del{m_i \vec{a}} = -\del{m_i \vec{a}_e} = \del{m_i \vec{g}}$$

Principes

Qu'est-ce que ça donne en relativité restreinte ?

Principes

Dans un référentiel en chute libre (inertiel) $\vec{a} = \vec{0}$

Dans le référentiel qui nous intéresse (le laboratoire)

$$\vec{a} = -\vec{a}_e = \vec{g}$$

Principes

Dans un référentiel en chute libre (inertiel) $\vec{a} = \vec{0}$

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} = 0$$

Dans le référentiel qui nous intéresse (le laboratoire)

$$\xi^\mu \rightarrow x^\mu (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$$

$$\vec{a} = -\vec{a}_e = \vec{g}$$

$$\sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^3 \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \frac{dx^{\alpha}}{d\tau} \frac{dx^{\beta}}{d\tau} \quad \frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} = - \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \frac{dx^{\alpha}}{d\tau} \frac{dx^{\beta}}{d\tau}$$

Principes

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

Principes

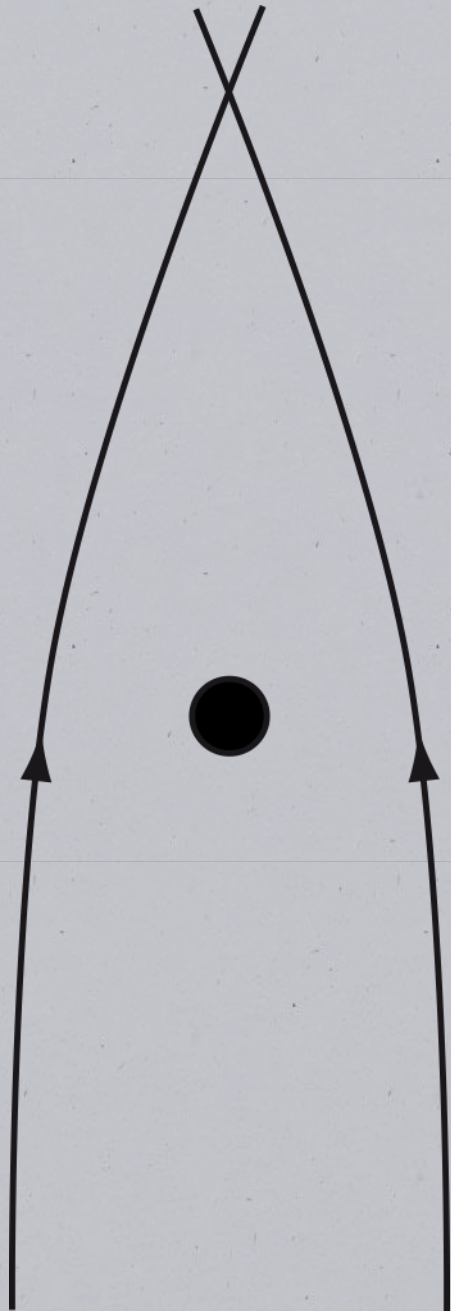
$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

c'est l'équation des géodésiques

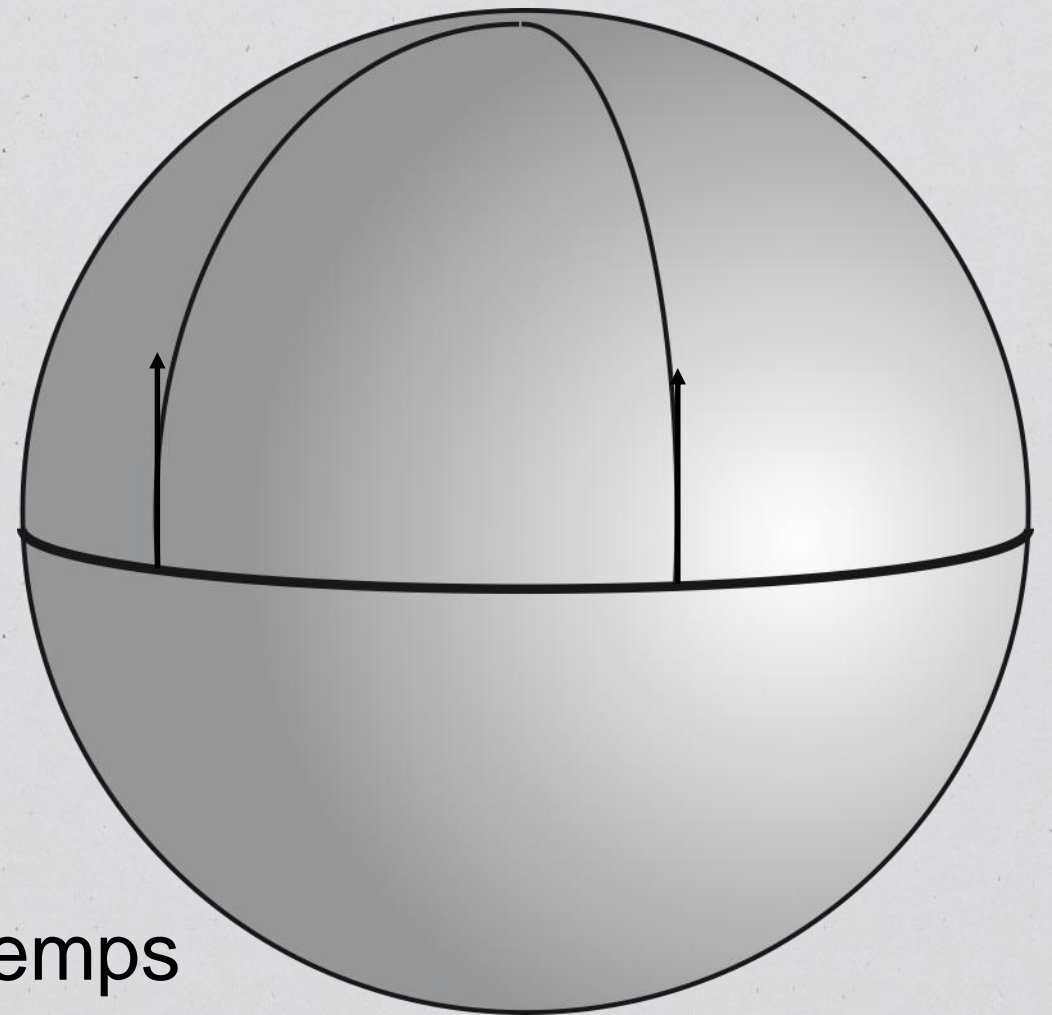
Elle donne l'équation des lignes droites dans n'importe quel système de coordonnées

Elle donne l'équation des chemins les plus courts dans des espaces courbes

Principes



$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$



la gravitation est une
manifestation de la
courbure de l'espace-temps

Principes

La courbure de l'espace-temps : géométrie

Principes

Dans l'espace-temps usuel (plat) de la RR, l'**intervalle** est défini par

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

cette relation définit la géométrie de l'espace-temps

Trajectoires des particules sans masse : $ds^2 = 0$

Principes

Dans l'espace-temps usuel (plat) de la RR, l'**intervalle** est défini par

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

réécriture
compacte

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

tenseur métrique

$g_{\mu\nu}$

Principes

Dans un référentiel accéléré ou dans un espace-temps courbe

détermine la relation entre coordonnées et « distances » (géométrie)

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu$$



$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$g_{\mu\nu}$

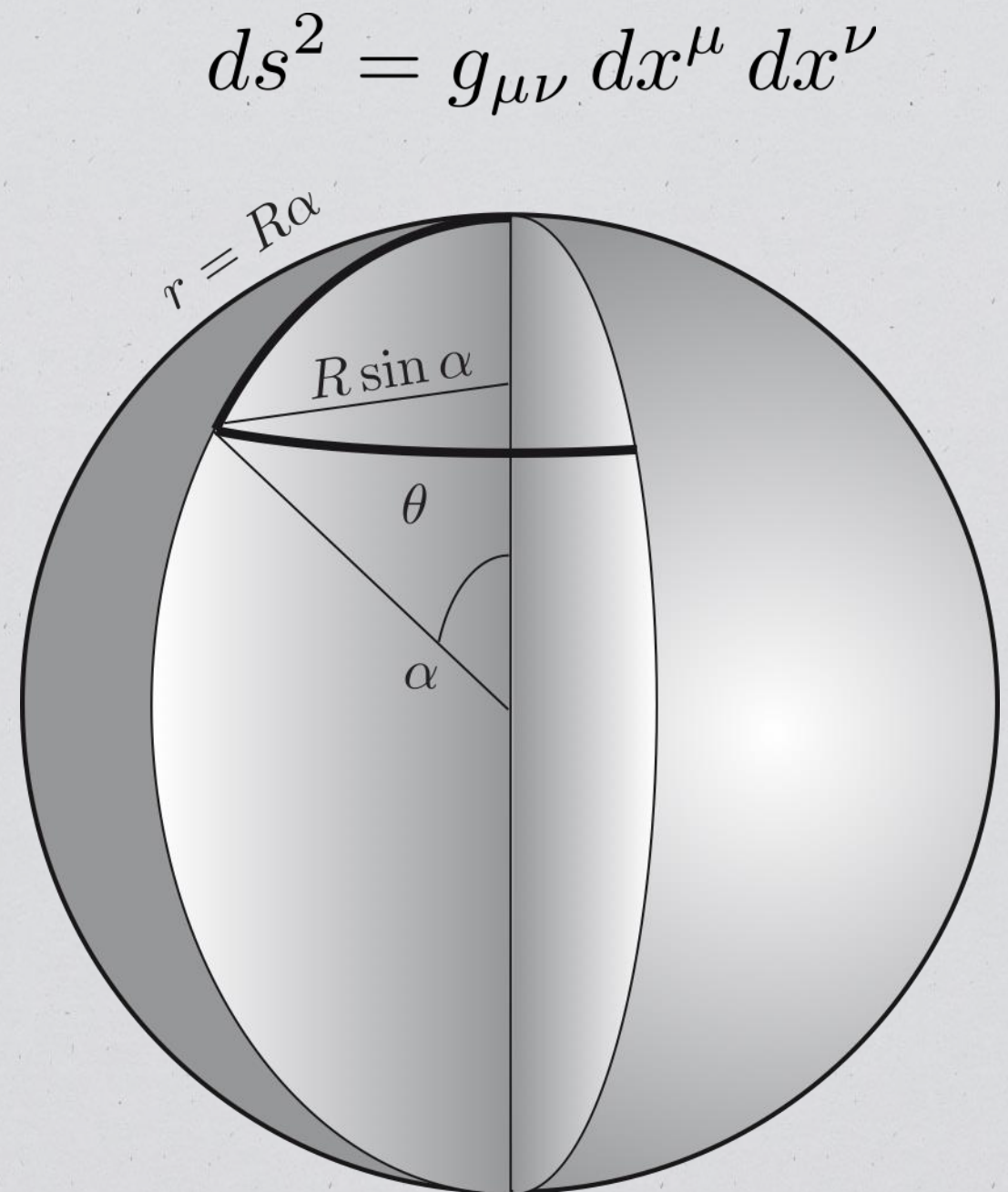
Principes

Dans un référentiel accéléré ou dans un espace-temps courbe

détermine la relation entre coordonnées et « distances » (géométrie)

$$d\ell^2 = R^2 d\alpha^2 + R^2 \sin^2 \alpha d\theta^2$$

$$d\ell^2 = dr^2 + R^2 \sin^2 \left(\frac{r}{R} \right) d\theta^2$$



$g_{\mu\nu}$

Principes

Dans un référentiel accéléré ou dans un espace-temps courbe

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

c'est aussi un potentiel gravitationnel

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\sigma\mu} \left(\frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} \right)$$

Γμν

Γμν

La gémunustique, sport de l'extrême !

Principes

Remarques

Principes

Remarque #1 sur le potentiel gravitationnel

La présence d'un champ gravitationnel affecte les distances et les durées

$$ds^2 = g_{00} dt^2 + 2 g_{10} dt dx + 2 g_{20} dt dy + 2 g_{30} dt dz \\ + g_{11} dx^2 + 2 g_{12} dx dy + 2 g_{13} dx dz + 2 g_{23} dy dz + g_{33} dz^2$$

MATTHEW
McCONAUGHEY

ANNE
HATHAWAY

JESSICA
CHASTAIN

MICHAEL
AND CAINE



A FILM BY CHRISTOPHER NOLAN

INTERSTELLAR

THE END OF EARTH WILL NOT BE THE END OF US.

WARNER BROS. PICTURES AND PARAMOUNT PICTURES PRESENT

IN ASSOCIATION WITH LEGENDARY PICTURES A SYNCOPY/LYNDA OBST PRODUCTIONS PRODUCTION A FILM BY CHRISTOPHER NOLAN "INTERSTELLAR"
MATTHEW McCONAUGHEY ANNE HATHAWAY JESSICA CHASTAIN BILL IRWIN ELLEN BURSTYN AND MICHAEL CAINE COSTUMES DESIGNED BY MARY ZOPHRES

MUSIC BY HANS ZIMMER EDITOR LEE SMITH, A.C.E. PRODUCTION DESIGNER NATHAN CROWLEY DIRECTOR OF PHOTOGRAPHY HOYTE VAN HOYTEMA, F.S.F., N.S.C.
EXECUTIVE PRODUCERS JORDAN GOLDBERG JAKE MYERS KIP THORNE THOMAS TULL WRITTEN BY JONATHAN NOLAN AND CHRISTOPHER NOLAN
PRODUCED BY EMMA THOMAS CHRISTOPHER NOLAN LYNDA OBST DIRECTED BY CHRISTOPHER NOLAN



LEGENDARY



twitter.com/InterstellarUK

NOVEMBER 7

facebook.com/Interstellarmovie



Principes

Remarque #2 sur le potentiel gravitationnel

$$\frac{GM}{r} \quad \text{a la dimension physique de } v^2$$

La gravitation n'introduit pas de nouvelle grandeur physique

$$\frac{GM}{c^2} \quad \text{a la dimension physique d'une longueur}$$

Principes

Rayon de Schwarzschild

$$r_s \equiv \frac{2GM}{c^2} \approx \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \times 2,97 \text{ km}$$

environ 3 km pour le Soleil,

environ 1 cm pour la Terre,

quelques millions de km pour un trou noir supermassif

Principes

La courbure détermine le mouvement

La courbure (la métrique) est déterminée par le contenu de l'univers

Métrie de Schwarzschild

dans le vide

pas de charge électrique

distribution de masse à symétrie
sphérique

isotropie

conditions aux limites plates

coordonnées sphériques

constante cosmologique nulle

Principes

Métrie de Schwarzschild

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{r_s}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

$$\frac{r_s}{r} = \frac{2GM}{rc^2} = \frac{2\phi}{c^2}$$

$$\frac{r_s}{r} \approx 10^{-9}$$

à la surface de la Terre

$$\frac{r_s}{r} \approx 10^{-6}$$

à la surface du Soleil

Principes

Remarque sur la
géométrie

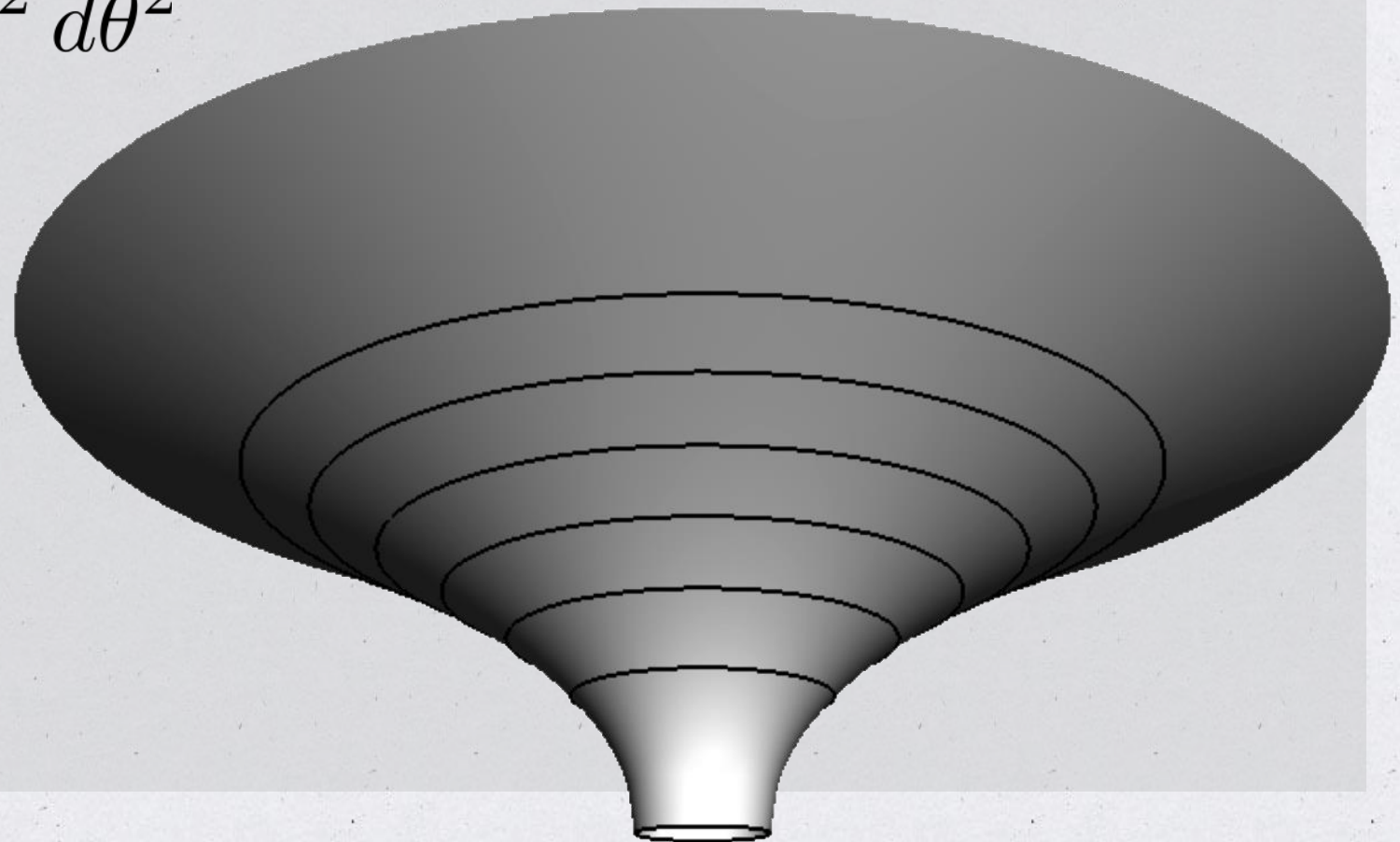
$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

temps fixé

plan
équatorial

$$d\ell^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2$$

paraboloïde
de Flamm



Principes

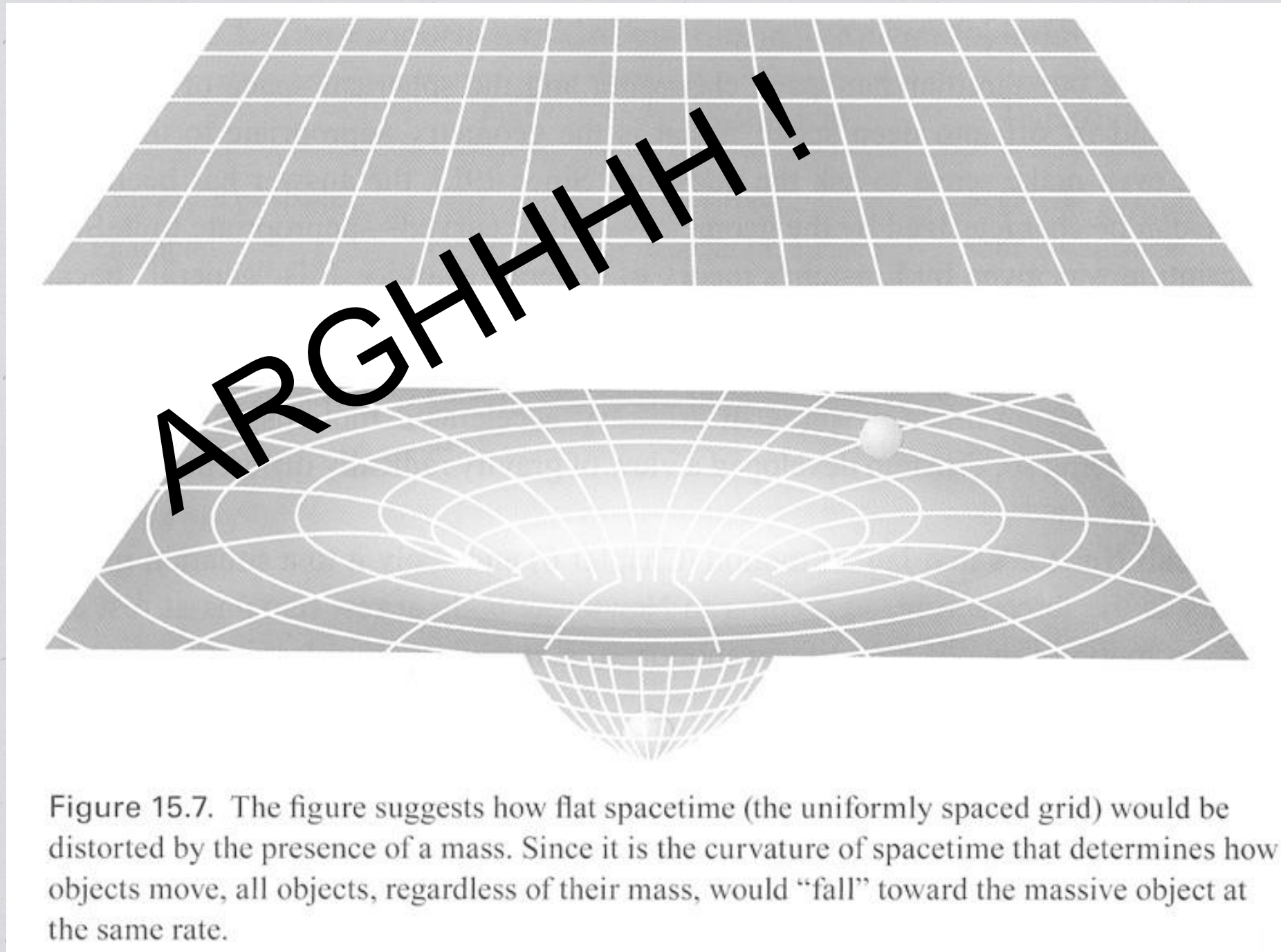


Figure 15.7. The figure suggests how flat spacetime (the uniformly spaced grid) would be distorted by the presence of a mass. Since it is the curvature of spacetime that determines how objects move, all objects, regardless of their mass, would “fall” toward the massive object at the same rate.

Accueil

Cerveau

Maths - Physique

Passé

Vivant

Science et société

Pour la Science

Cerveau & Psycho

Dessine-moi un trou noir !

08.12.2013 | par [Richard Taillet](#) | [Regards](#)



Dans de nombreuses présentations de la relativité générale au grand public (et parfois à des étudiants), au moment d'expliquer que la gravitation est due à la courbure de l'espace-temps, on voit très souvent présenté le schéma suivant.

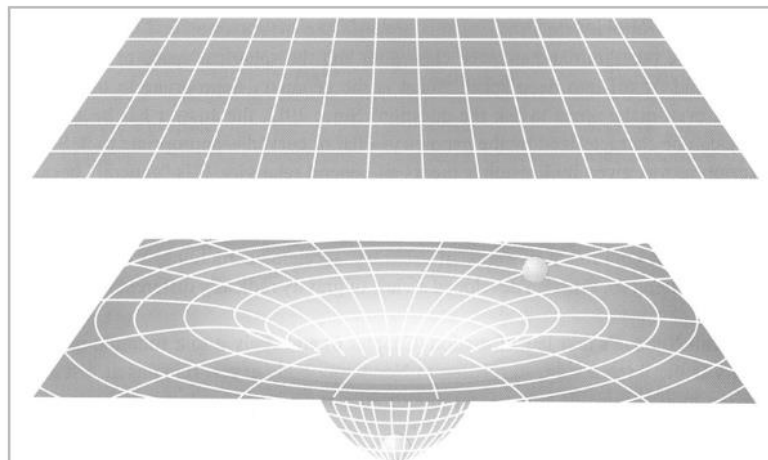


Figure 15.7. The figure suggests how flat spacetime (the uniformly spaced grid) would be distorted by the presence of a mass. Since it is the curvature of spacetime that determines how objects move, all objects, regardless of their mass, would "fall" toward the massive object at the same rate.



| **Richard Taillet**

| À propos de ce blog

| Page d'accueil du blog

Chercher dans Signal sur

Chercher

POUR LA SCIENCE



Abonnez-vous
au magazine
de référence
de l'actualité
scientifique
internationale.



À partir de
4,90€
par mois.

Articles récents

- Parcours sup, et après ? Épisode 2 : l'accueil des « oui si » à l'université

Principes

Bref...

La métrique de Schwarzschild permet de calculer les mouvements autour d'une masse à symétrie sphérique

Tests expérimentaux

#0

Tests expérimentaux

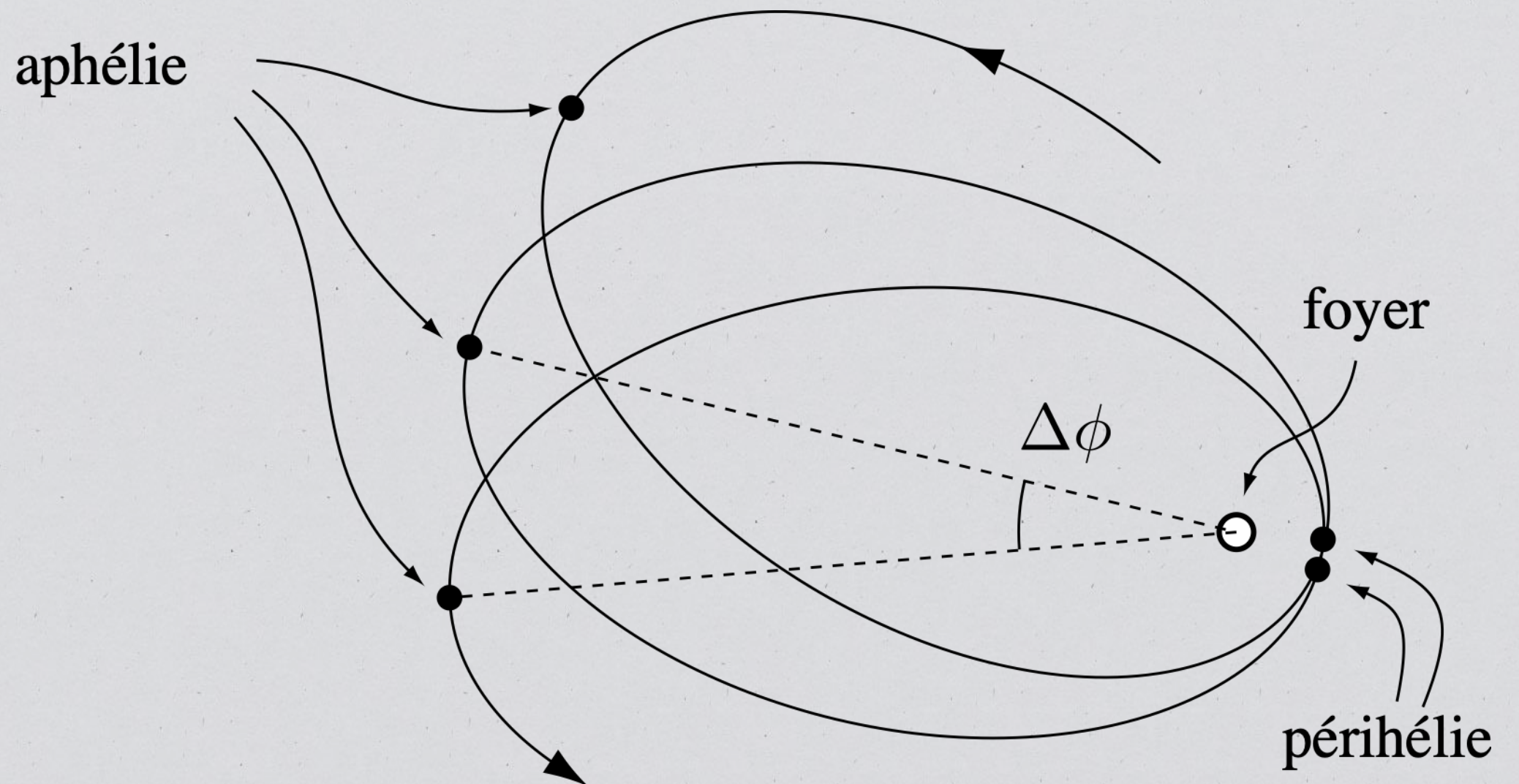
Succès théorique :

on peut formuler une théorie relativiste de la gravitation !

#1

Tests expérimentaux

Avance du périhélie de Mercure (1915)



#1

Tests expérimentaux

Avance du périhélie de Mercure (1915)

$$\Delta\phi = \frac{3\pi r_s}{a(1 - e^2)}$$

Perturbations gravitationnelles : 531"/siècle

Anomalie : 43"/siècle

Remarque : mesuré pour d'autres corps (3,8"/siècle pour la Terre)

#2

Tests expérimentaux

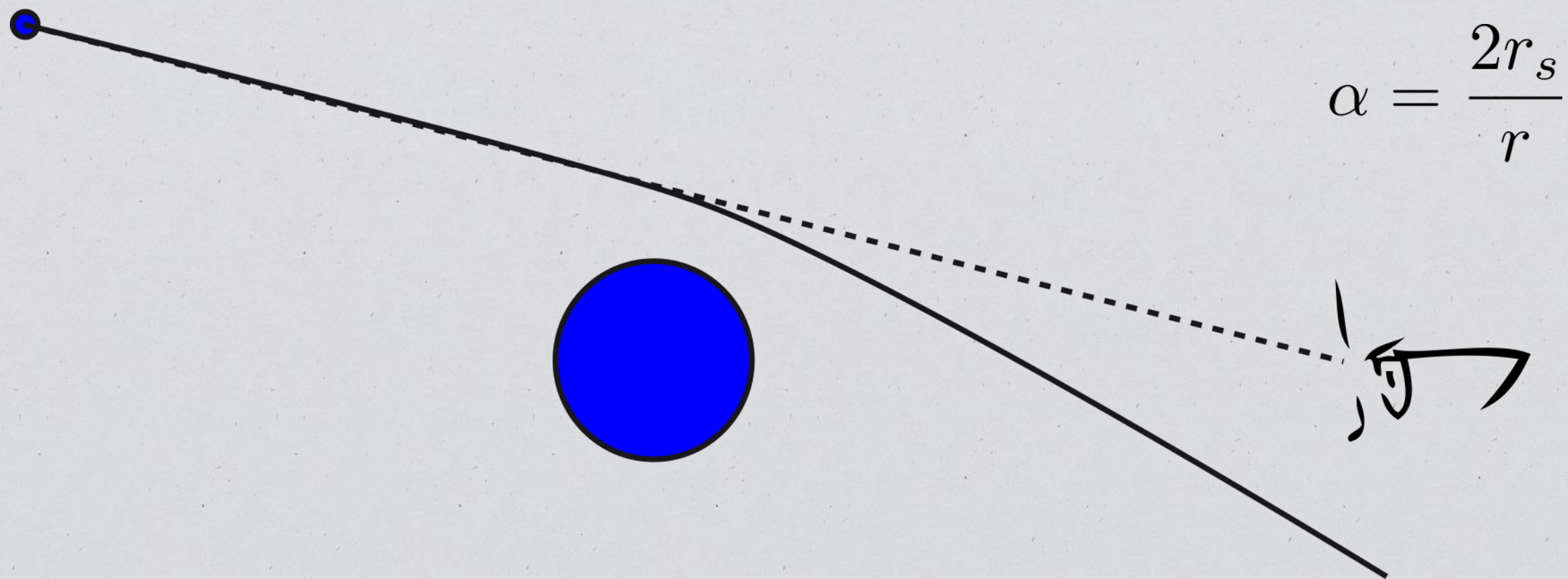
Déviatation gravitationnelle des rayons lumineux (1919)



#2

Tests expérimentaux

Déviatation gravitationnelle des rayons lumineux (1919)

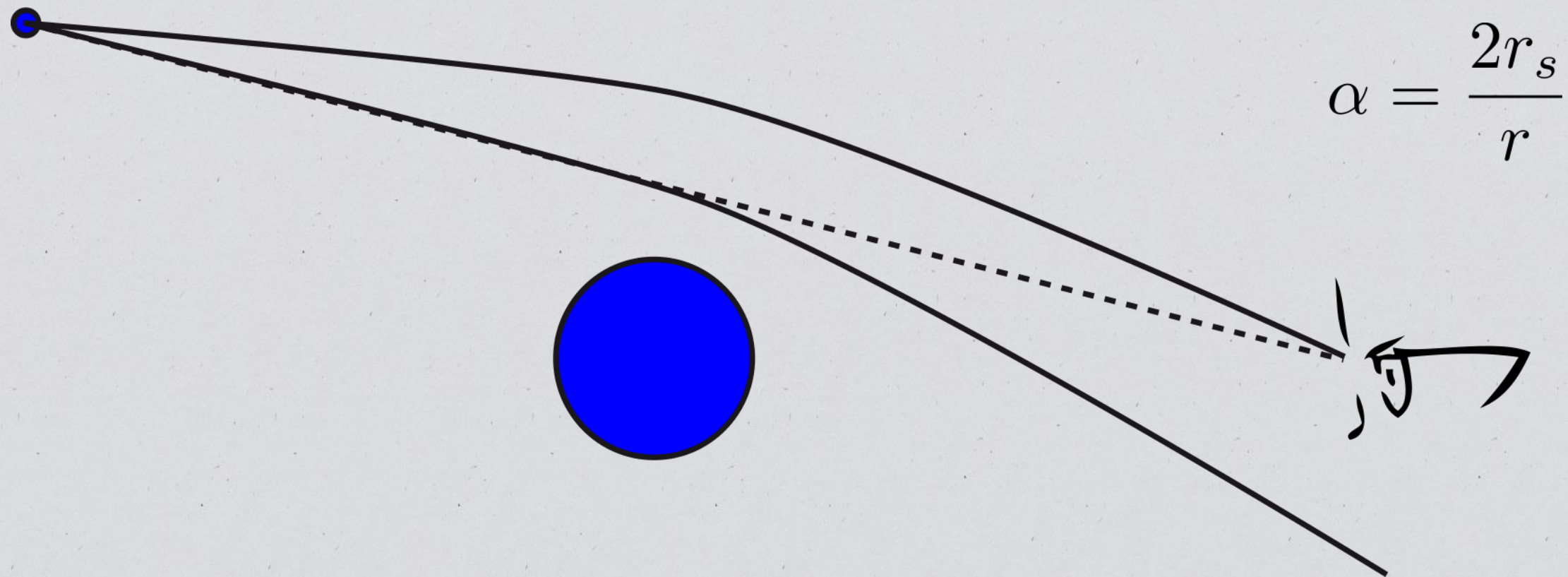


1,75 seconde d'arc pour le bord du Soleil

#2

Tests expérimentaux

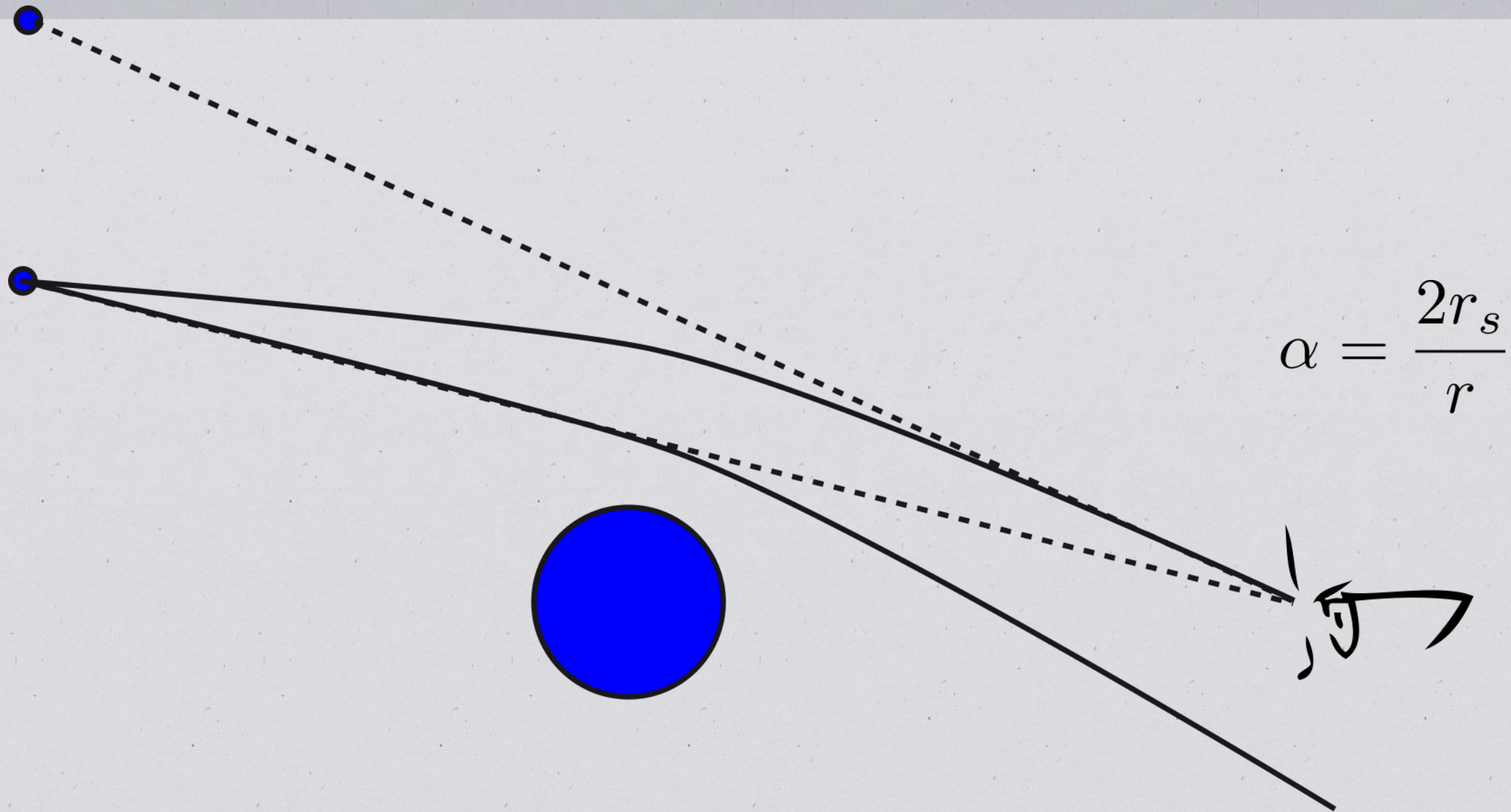
Déviatation gravitationnelle des rayons lumineux (1919)



1,75 seconde d'arc pour le bord du Soleil

Tests expérimentaux

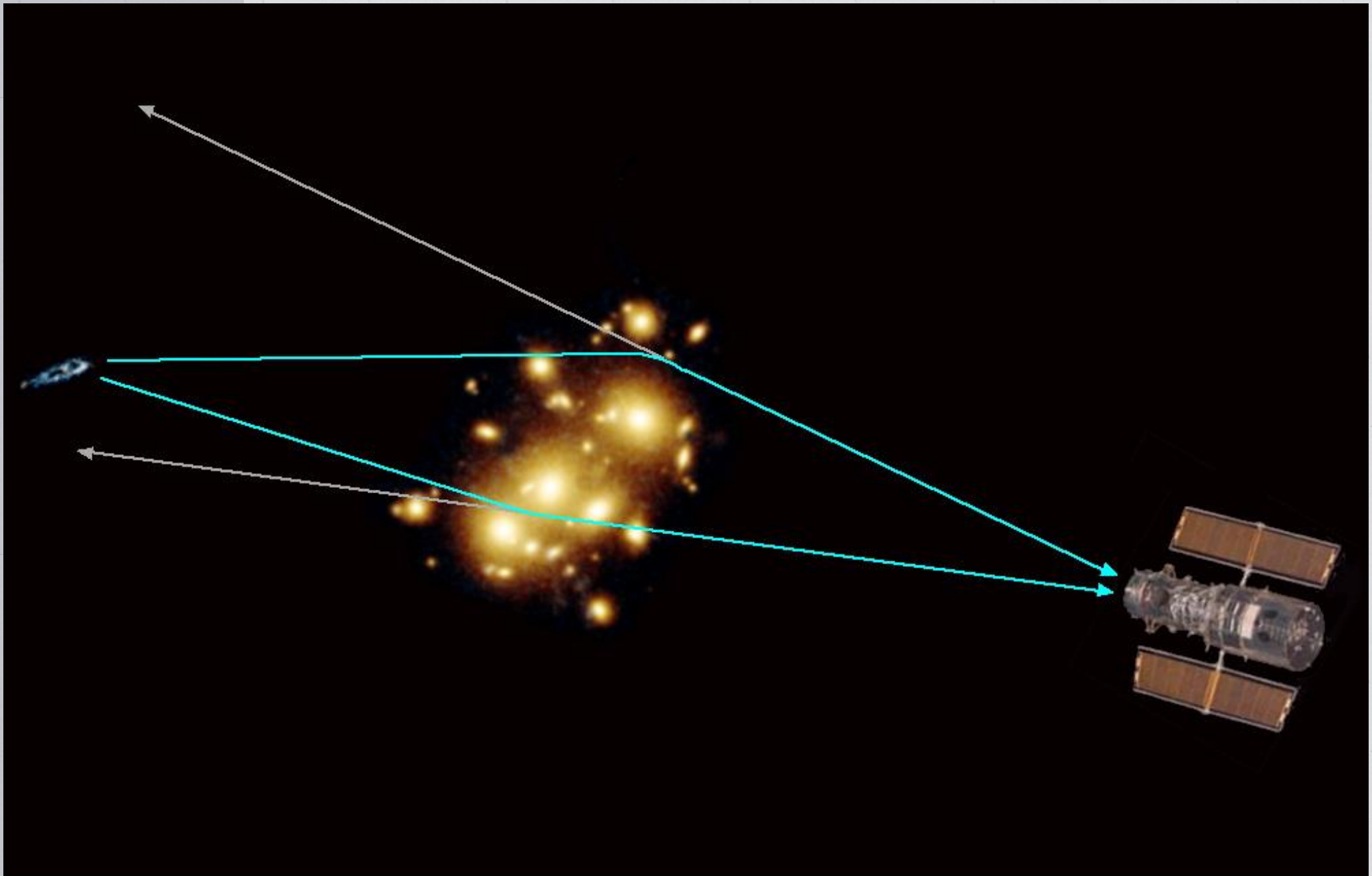
#2



1,75 seconde d'arc pour le bord du Soleil

#2

Tests expérimentaux

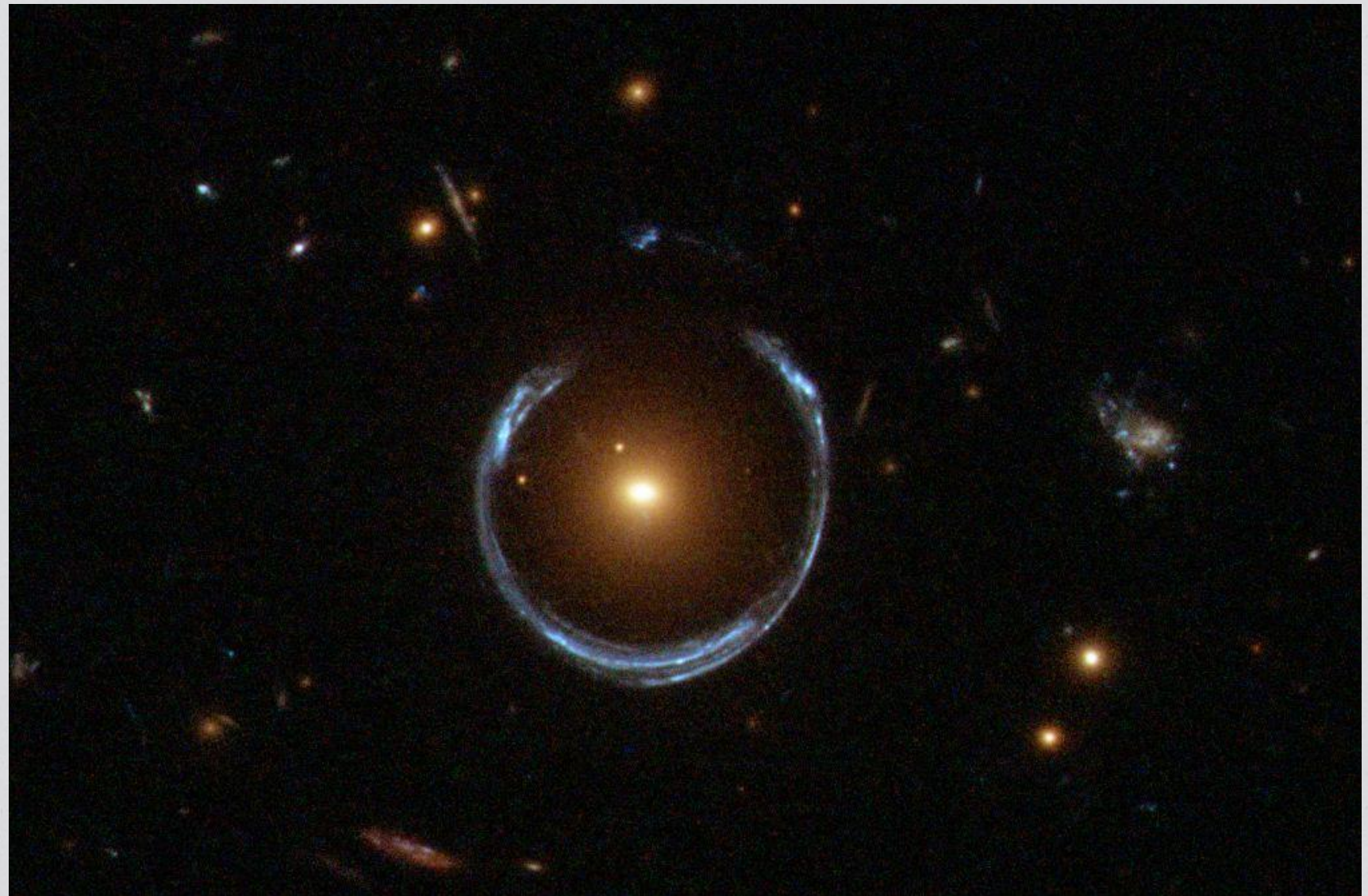




#2

Tests expérimentaux

Lentilles gravitationnelles



#3

Tests expérimentaux

Expérience de Pound et Rebka (1959)



$$\frac{\Delta f}{f} \approx \frac{1}{2} \frac{r_s}{r} \frac{\Delta r}{r} \approx 2,5 \times 10^{-15}$$

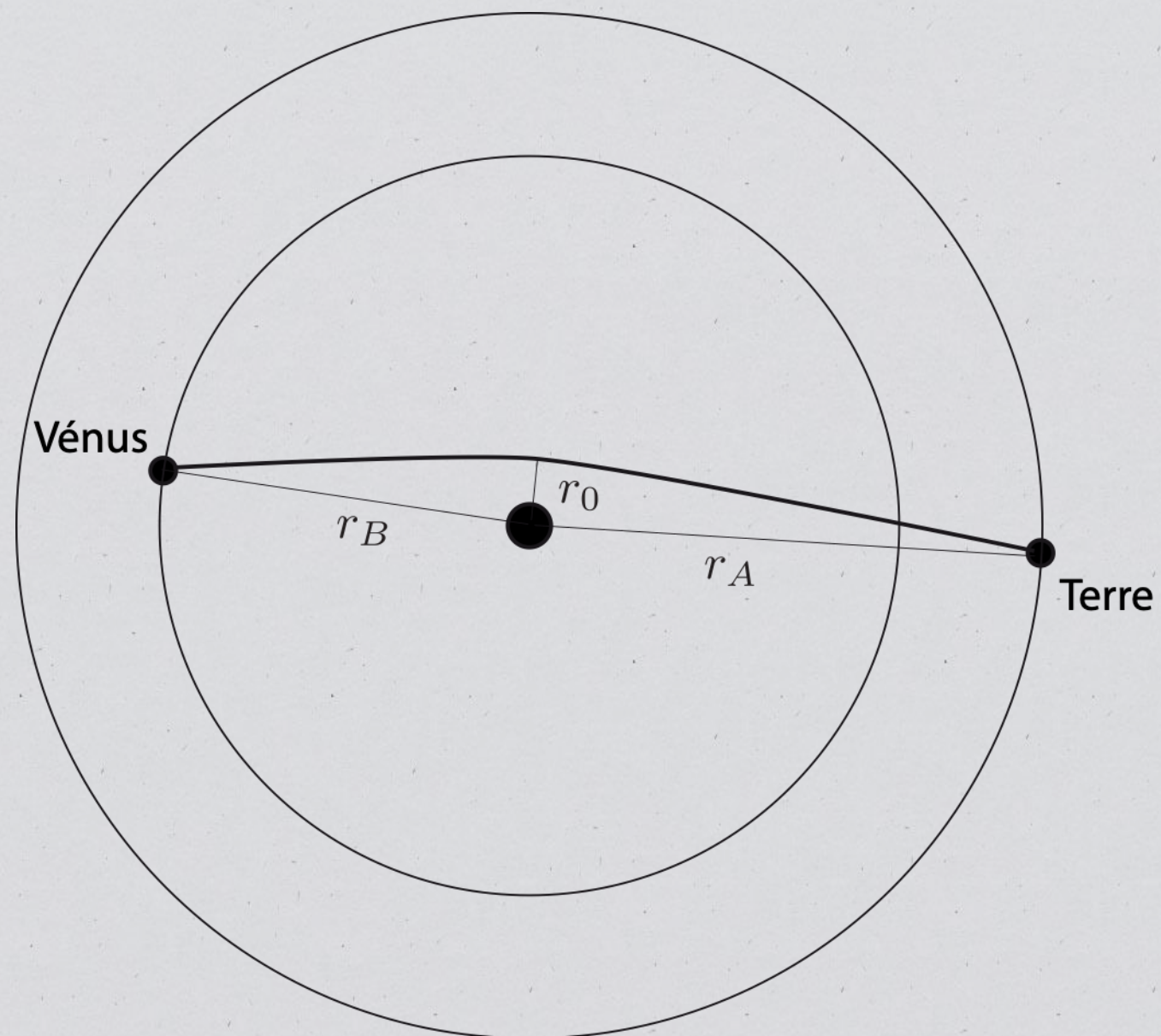
Expérience de Hafele & Keating (1971)

GPS (Global Positioning System)

#4

Tests expérimentaux

Retard de l'écho radar : effet Shapiro (prédit 1964 - mesuré 1968)



#4

Tests expérimentaux



#4

Tests expérimentaux

Retard de l'écho radar : effet Shapiro (prédit 1964 - mesuré 1968)

$$\Delta t = \frac{r_s}{c} \left[1 + \ln \left(\frac{4r_1 r_2}{r_0^2} \right) \right]$$

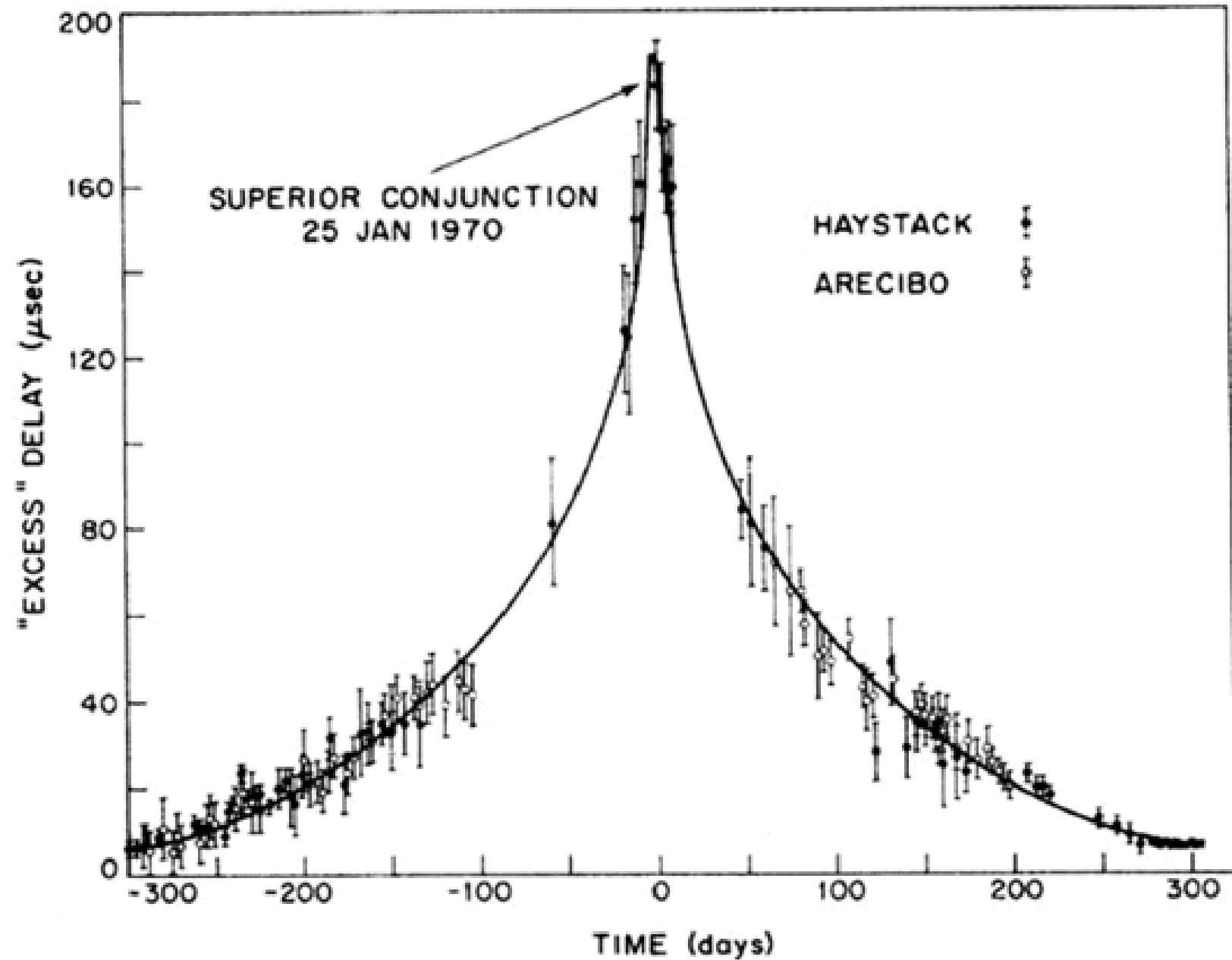
$$r_s/c \approx 10 \mu s$$

Quelques centaines de microsecondes pour Vénus et Mercure.

On utilise aussi les sondes du Système solaire.

#4

Tests expérimentaux



#5

Tests expérimentaux

Effet Einstein-de Sitter ou précession géodétique (1916/1988)

$$\Omega \approx \frac{3c}{2r} \left(\frac{r_s}{2r} \right)^{3/2}$$

quelques
arcsec/siècle

vérifié en 1988 (système Terre-Lune)
puis en 2011 par Gravity Probe B



#6

Tests expérimentaux

Entraînement des référentiels : effet Lense-Thirring (1918/2004)

gravitomagnétisme

e

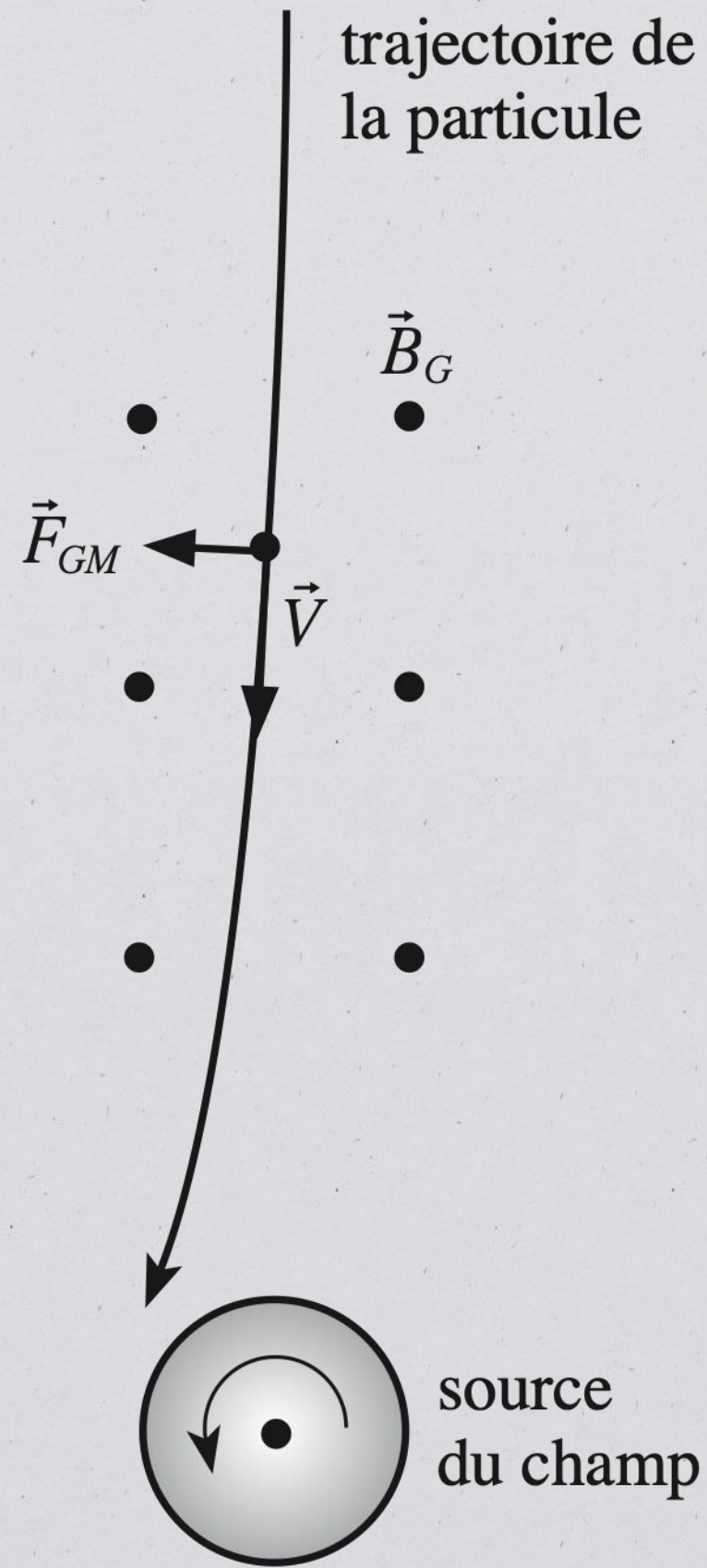
$$\vec{F} = m(\vec{E}_G + \vec{v} \wedge 4\vec{B}_G)$$

$$\vec{E}_G \equiv -\vec{\nabla}\Phi_G - \frac{\partial\vec{A}_G}{\partial t}$$

$$\Phi_G = -\iiint \frac{G\rho_0}{r} d^3V$$

$$\vec{B}_G \equiv \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_G$$

$$A_G^i = -\iiint \frac{GJ_i}{r} d^3V$$



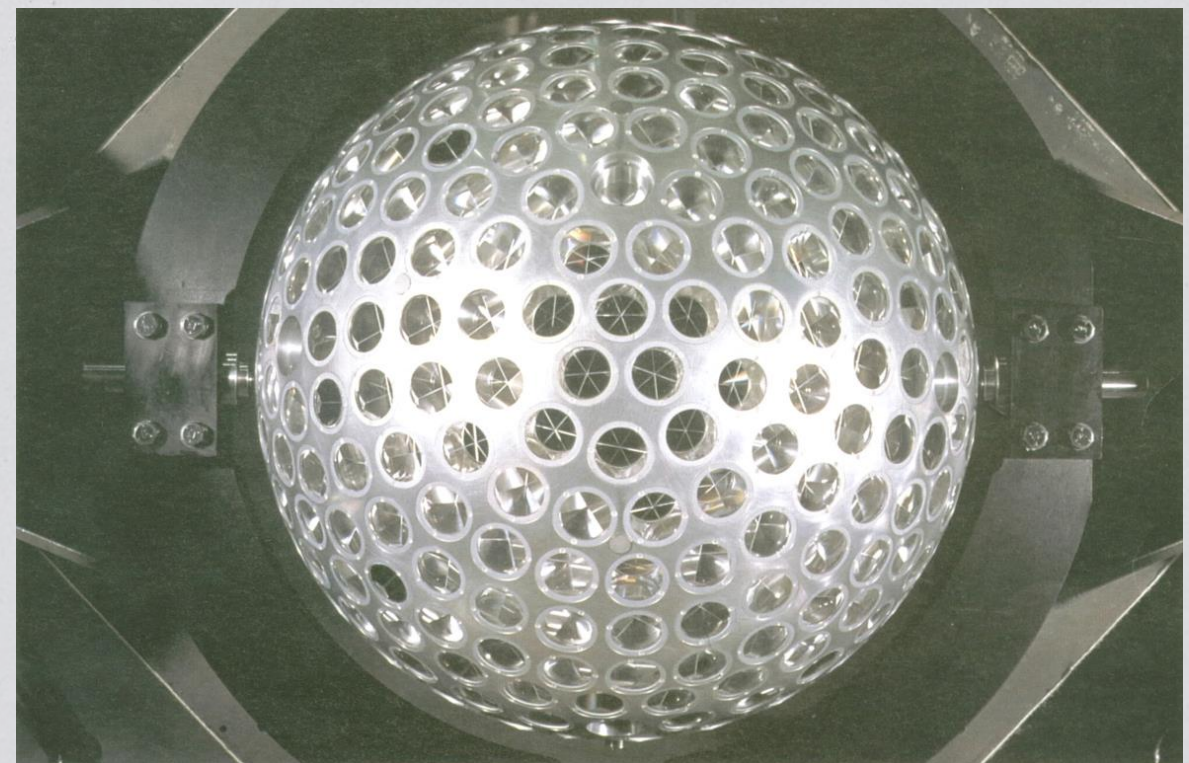
#6

Tests expérimentaux

Entraînement des référentiels : effet Lense-Thirring (1918/2004)

$$\vec{\Omega} \approx \frac{r_s}{2r^3} \frac{3(\vec{J} \cdot \vec{u}_r) - J}{M}$$

vérifié par LAGEOS en 2004



#7

Tests expérimentaux

Ondes gravitationnelles

dit rapidement : ondes dans la structure de l'espace-temps

En fait, c'est subtil. La notion d'énergie gravitationnelle est très délicate à définir en relativité générale.

Longue controverse historique sur la réalité physique de ces ondes

#7

ondes gravitationnelles



Virgo, Ligo, e-Lisa

#7

ondes gravitationnelles

Détection directe en 2016 par LIGO/Virgo

#8

Cosmologie

#8

Cosmologie

Principe cosmologique

« À grande échelle, l'Univers est homogène et isotrope »

Métrique de Robertson-Walker

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right)$$

#8

Cosmologie

Expansion de l'Univers

Histoire thermique

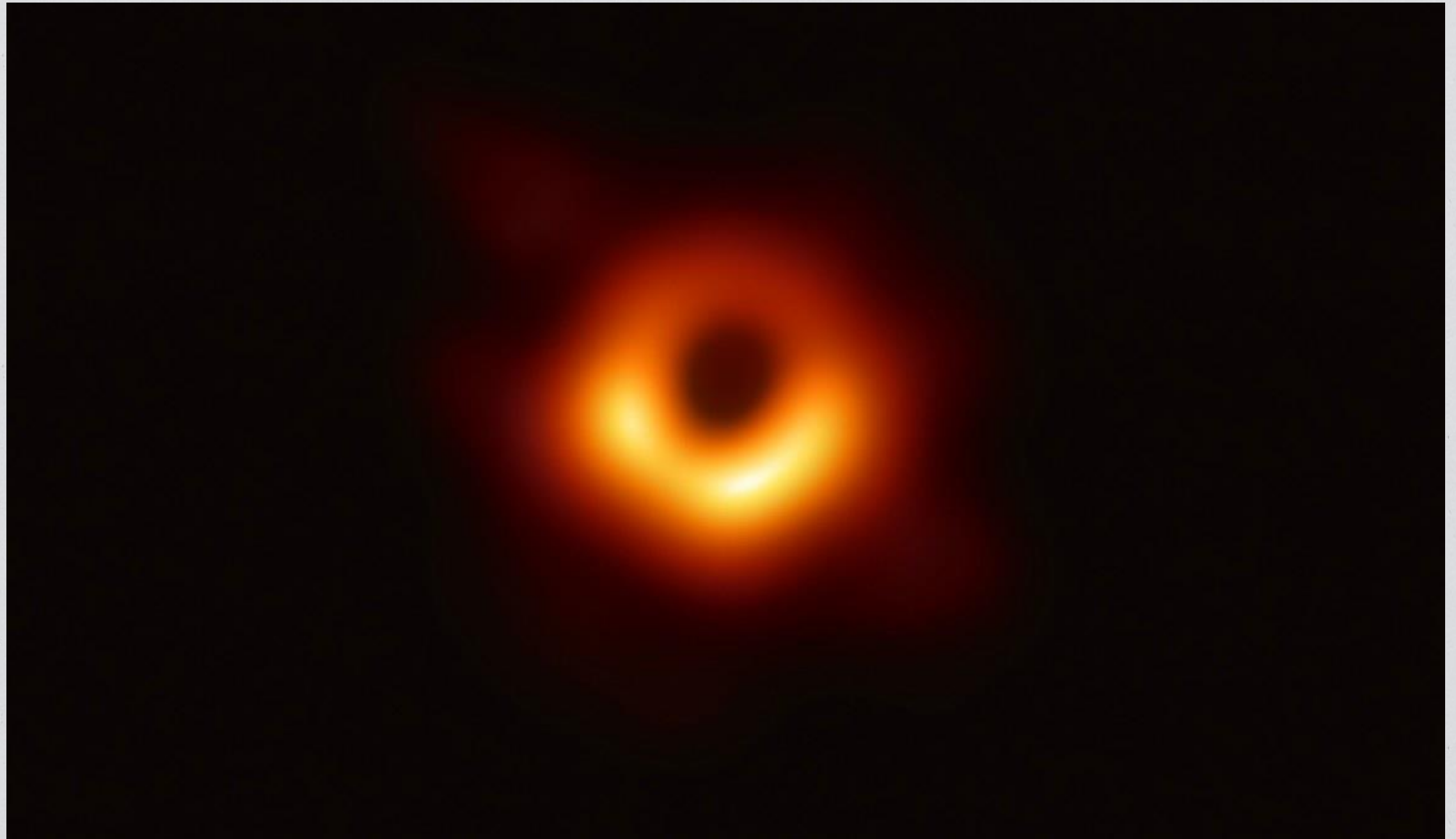
Nucléosynthèse primordiale

Formation des grandes structures

Rayonnement de fond cosmologique

#9

Trous noirs

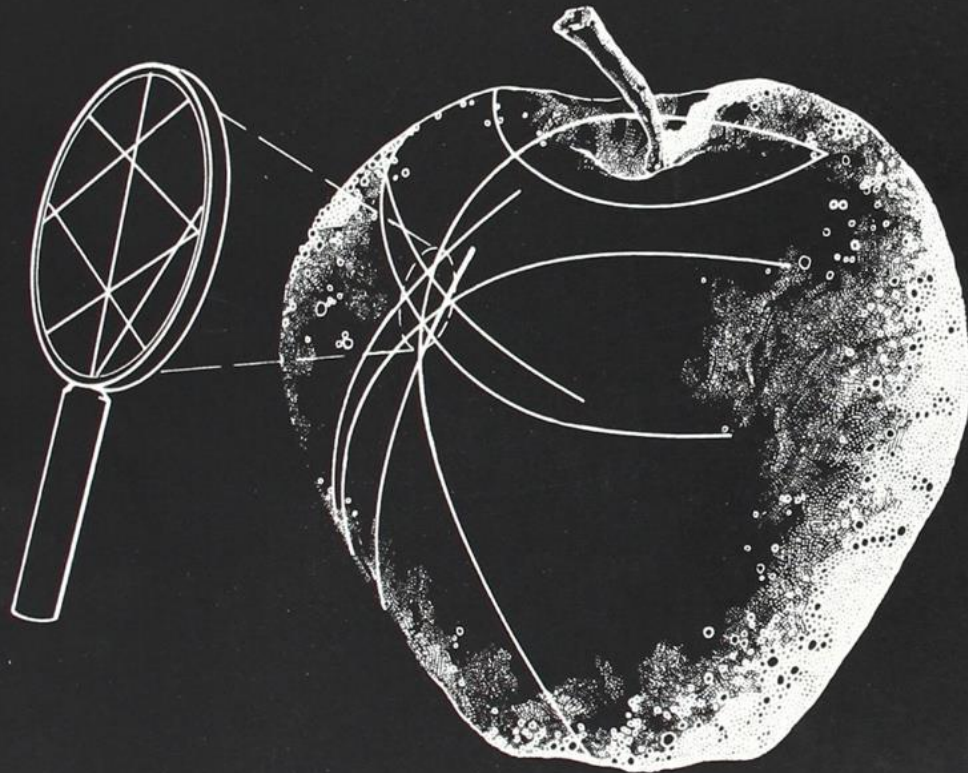


Références

Références

GRAVITATION

Charles W. MISNER Kip S. THORNE John Archibald WHEELER



GRAVITATION AND COSMOLOGY

PRINCIPLES AND APPLICATIONS OF
THE GENERAL THEORY OF
RELATIVITY

STEVEN WEINBERG

Références



Références

26 épisodes de 25 à 45 minutes (HD 720)



<https://videos.univ-grenoble-alpes.fr/>

Contact

taillet@lapth.cnrs.fr

Richard.Taillet@univ-savoie.fr