

Gravitation einsteinienne, une centenaire dynamique

Marc Henneaux
(Université Libre de Bruxelles et Collège de France)

Journée SFP 2023:
Champs et particules, la crise de la cinquantaine ?
10 juillet 2023

Introduction

Gravitation einsteinienne, une centenaire dynamique

Marc Henneaux
(Université Libre
de Bruxelles et
Collège de
France)

Introduction

Systèmes isolés et
symétries
asymptotiques

Le groupe BMS_4

Mémoire et
supertranslations

Définition du
moment cinétique

Conclusions

Until the beginning of the 1960's,

Einstein's theory of gravity was mostly regarded as a
mathematical subject

somewhat disconnected from physics

since it relied only on 3 “classical tests”

(frequency shift to the red, advance of the perihelion of the
planets, deviation of light by sun).

Introduction

Gravitation
einsteinienne,
une centenaire
dynamique

Marc Henneaux
(Université Libre
de Bruxelles et
Collège de
France)

Introduction

Systèmes isolés et
symétries
asymptotiques

Le groupe BMS₄

Mémoire et
supertranslations

Définition du
moment cinétique

Conclusions

This situation has changed dramatically since then

both on the experimental side

(endpoint of stellar evolution and black holes, precision tests, cosmology, gravitational waves...)

and on the theoretical side

(black hole entropy, quantum gravity, unification of fundamental interactions, precision computations...).

And this is not finished !

Introduction

Gravitation
einsteinienne,
une centenaire
dynamique

Marc Henneaux
(Université Libre
de Bruxelles et
Collège de
France)

Introduction

Systèmes isolés et
symétries
asymptotiques

Le groupe BMS_4

Mémoire et
supertranslations

Définition du
moment cinétique

Conclusions

I will discuss here one specific example illustrating how vivid is the current research in Einstein's theory of gravity.

This example has been the focus of a great interest in recent years and emerges from the study of the asymptotic symmetries characterizing isolated systems.

It is furthermore connected with an observable physical effect called the “memory effect”.

Isolated systems

Gravitation
einsteinienne,
une centenaire
dynamique

Marc Henneaux
(Université Libre
de Bruxelles et
Collège de
France)

Introduction

Systèmes isolés et
symétries
asymptotiques

Le groupe BMS_4

Mémoire et
supertranslations

Définition du
moment cinétique

Conclusions

The solution of the Einstein equation characterizing empty space is Minkowski space,

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \equiv \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

(zero cosmological constant). Its curvature vanishes (flat space).

It is a maximally symmetric space.

Its isometry group is the ten-dimensional Poincaré group.

Isolated systems

Gravitation
einsteinienne,
une centenaire
dynamique

Marc Henneaux
(Université Libre
de Bruxelles et
Collège de
France)

Introduction

Systèmes isolés et
symétries
asymptotiques

Le groupe BMS_4

Mémoire et
supertranslations

Définition du
moment cinétique

Conclusions

The geometry of isolated systems tends to the Minkowski metric at large distances from the source,

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu} \quad (r \rightarrow \infty).$$

Since the metric is asymptotically flat, one would expect the asymptotic symmetry group to be the symmetry group of flat space, i.e., the Poincaré group.

Isolated systems

Gravitation
einsteinienne,
une centenaire
dynamique

Marc Henneaux
(Université Libre
de Bruxelles et
Collège de
France)

Introduction

Systèmes isolés et
symétries
asymptotiques

Le groupe BMS_4

Mémoire et
supertranslations

Définition du
moment cinétique

Conclusions

This expectation turns out to be incorrect!

The asymptotic symmetry group is an **infinite-dimensional** extension of the Poincaré group,

called the BMS_4 group

(Bondi-Metzner-Sachs).

When this group was discovered, its physical significance was not clear.

Recently, it has been given “physics life” through its connection with soft graviton theorems and the memory effect.

Isolated systems

Gravitation
einsteinienne,
une centenaire
dynamique

Marc Henneaux
(Université Libre
de Bruxelles et
Collège de
France)

Introduction

Systèmes isolés et
symétries
asymptotiques

Le groupe BMS_4

Mémoire et
supertranslations

Définition du
moment cinétique

Conclusions

I will discuss here the structure of the BMS_4 group,
the memory effect,
and the so-called “angular momentum ambiguity”
**(difficulty in defining the angular momentum due to the
“supertranslations”).**

The BMS_4 group

Gravitation
einsteinienne,
une centenaire
dynamique

Marc Henneaux
(Université Libre
de Bruxelles et
Collège de
France)

Introduction

Systèmes isolés et
symétries
asymptotiques

Le groupe BMS_4

Mémoire et
supertranslations

Définition du
moment cinétique

Conclusions

The BMS_4 group is the group of asymptotic symmetries, i.e.,
the group of diffeomorphisms (coordinate transformations)
which

(i) leave the boundary conditions expressing asymptotic flatness
invariant; and

(ii) leave the action invariant (a question of boundary terms).

The BMS_4 group

Gravitation
einsteinienne,
une centenaire
dynamique

Marc Henneaux
(Université Libre
de Bruxelles et
Collège de
France)

Introduction

Systèmes isolés et
symétries
asymptotiques

Le groupe BMS_4

Mémoire et
supertranslations

Définition du
moment cinétique

Conclusions

The structure of this group was understood by Sachs.
In addition to the homogeneous Lorentz group,
there are the familiar translations
and the “pure supertranslations”,
which commute among themselves
and transform in an infinite-dimensional non-trivial
representation of the Lorentz group.

Supertranslations

Gravitation
einsteinienne,
une centenaire
dynamique

Marc Henneaux
(Université Libre
de Bruxelles et
Collège de
France)

Introduction

Systèmes isolés et
symétries
asymptotiques

Le groupe BMS_4

Mémoire et
supertranslations

Définition du
moment cinétique

Conclusions

Translations and pure supertranslations are parametrized by one function $\alpha(\theta, \varphi)$ on the sphere,

which corresponds to shifts in the null (retarded) coordinate u ,
 $u \rightarrow u + \alpha(\theta, \varphi)$.

The function $\alpha(\theta, \varphi)$ can be expanded in spherical harmonics.

The $\ell = 0$ and $\ell = 1$ harmonics correspond to the ordinary translations ;

the higher harmonics are the pure supertranslations.

In (asymptotically) cartesian coordinates (t, x^i) , one gets
 $t \rightarrow t + T(\theta, \varphi)$, $x^k \rightarrow x^k + \partial^k(rW(\theta, \varphi))$, where $T(\theta, \varphi)$ and $W(\theta, \varphi)$
are respectively even (odd) functions of the angles, directly
connected with α (“ $\alpha = T + W$ ”).

The BMS_4 algebra

Gravitation
einsteinienne,
une centenaire
dynamique

Marc Henneaux
(Université Libre
de Bruxelles et
Collège de
France)

Introduction

Systèmes isolés et
symétries
asymptotiques

Le groupe BMS_4

Mémoire et
supertranslations

Définition du
moment cinétique

Conclusions

The BMS_4 algebra is the semi-direct sum of the Lorentz algebra \mathcal{L} and the infinite-dimensional algebra \mathcal{A} spanned by the supertranslations,

$$BMS_4 = \mathcal{L} \oplus_{\sigma} \mathcal{A}$$

The BMS₄ algebra

Gravitation
einsteinienne,
une centenaire
dynamique

Marc Henneaux
(Université Libre
de Bruxelles et
Collège de
France)

Introduction

Systèmes isolés et
symétries
asymptotiques

Le groupe BMS₄

Mémoire et
supertranslations

Définition du
moment cinétique

Conclusions

Schematically, if we denote the 6 generators of the homogeneous Lorentz group by M_a ($\equiv J_{\alpha\beta}$),

one finds

$$\{M_a, M_b\} = f_{ab}^c M_c,$$

$$\{M_a, T_i\} = R_{ai}^j T_j,$$

$$\{M_a, S_\alpha\} = G_{a\alpha}^i T_i + G_{a\alpha}^{\beta} S_\beta,$$

$$\{T_i, T_j\} = 0 = \{T_i, S_\alpha\} = \{S_\alpha, S_\beta\}$$

where T_i ($\equiv P_\alpha \equiv T_{\ell m}$, $\ell < 2$) and S_α ($\equiv T_{\ell m}$, $\ell \geq 2$) are respectively the generators of the standard translations (4) and of the pure supertranslations (in infinite number).

The BMS₄ algebra

Gravitation
einsteinienne,
une centenaire
dynamique

Marc Henneaux
(Université Libre
de Bruxelles et
Collège de
France)

Introduction

Systèmes isolés et
symétries
asymptotiques

Le groupe BMS₄

Mémoire et
supertranslations

Définition du
moment cinétique

Conclusions

The structure constants R_{ai}^j , $G_{a\alpha}^i$ and $G_{a\alpha}^\beta$ are non zero.

The ordinary translations transform in the 4-dimensional vector representation of the Lorentz group (R_{ai}^j).

Modulo the ordinary translations, the pure supertranslations transform in an infinite-dimensional representation of the Lorentz group ($G_{a\alpha}^\beta$).

The translations form a finite-dimensional ideal.

Translations and supertranslations form an infinite-dimensional ideal.

The Poincaré subalgebra does not form an ideal and thus is not invariant under conjugation (because $G_{a\alpha}^\beta \neq 0$).

Effet de mémoire gravitationnel

Gravitation
einsteinienne,
une centenaire
dynamique

Marc Henneaux
(Université Libre
de Bruxelles et
Collège de
France)

Introduction

Systèmes isolés et
symétries
asymptotiques

Le groupe BMS_4

Mémoire et
supertranslations

Définition du
moment cinétique

Conclusions

Imaginons un système isolé initialement stationnaire et un observateur à très grande distance que l'on peut supposer dans la zone asymptotique,

où le champ de gravitation diffère de la métrique plate de Minkowski par des termes qui tendent vers zéro comme $1/r$.

On suppose que le système observé émet pendant un laps de temps fini des ondes gravitationnelles.

Celles-ci vont atteindre l'observateur après un temps fini, et vont laisser une empreinte qui restera après leur passage.

Cette empreinte se traduit par un déplacement relatif des masses dû au passage de l'onde.

C'est l'effet de mémoire gravitationnel (Zel'dovich, Christodoulou).

Mémoire et supertranslations

Gravitation
einsteinienne,
une centenaire
dynamique

Marc Henneaux
(Université Libre
de Bruxelles et
Collège de
France)

Introduction

Systèmes isolés et
symétries
asymptotiques

Le groupe BMS_4

Mémoire et
supertranslations

Définition du
moment cinétique

Conclusions

Dans l'article “Gravitational Memory, BMS Supertranslations and Soft Theorems,” JHEP **01** (2016), 086 [arXiv :1411.5745 [hep-th]],

Strominger et Zhiboedov ont montré que cet effet était précisément décrit par une supertranslation,

dont le paramètre $\alpha(\theta, \varphi)$ peut être calculé en terme des caractéristiques de l’onde.

C’est un effet en $1/r$ (et pas $1/r^2$).

Les supertranslations ont donc une signification physique directe.

Angular momentum ambiguity

Gravitation
einsteinienne,
une centenaire
dynamique

Marc Henneaux
(Université Libre
de Bruxelles et
Collège de
France)

Introduction

Systèmes isolés et
symétries
asymptotiques

Le groupe BMS_4

Mémoire et
supertranslations

Définition du
moment cinétique

Conclusions

There are intriguing physical features resulting from the structure of the BMS_4 algebra

which are somewhat uncomfortable.

These features were first pointed out at null infinity but are equally present at spatial infinity.

It follows from the non-vanishing of the bracket of the pure supertranslations with the homogeneous Lorentz transformations that the angular momentum transforms under pure supertranslations.

This non-invariance comes on top of the familiar non-invariance of the angular momentum under ordinary translations, but there one knows how to define an intrinsic angular momentum in terms of Casimirs of the Poincaré algebra, which amounts to compute the angular momentum with respect to the center of mass worldline.

A similar construction for supertranslations appears to be more intricate for the full BMS algebra.

No invariant Poincaré subalgebra

Gravitation
einsteinienne,
une centenaire
dynamique

Marc Henneaux
(Université Libre
de Bruxelles et
Collège de
France)

Introduction

Systèmes isolés et
symétries
asymptotiques

Le groupe BMS_4

Mémoire et
supertranslations

Définition du
moment cinétique

Conclusions

The fact that the Poisson brackets of the homogeneous Lorentz generators with the pure supertranslations involve the pure supertranslations implies that the Poincaré subalgebra is not an ideal.

At the same time, because the pure supertranslations do not form an ideal on account of the preceding point, they cannot be meaningfully quotientized out to get the Poincaré algebra as a quotient algebra.

Solution

Gravitation einsteinienne, une centenaire dynamique

Marc Henneaux
(Université Libre
de Bruxelles et
Collège de
France)

Introduction

Systèmes isolés et
symétries
asymptotiques

Le groupe BMS_4

Mémoire et
supertranslations

Définition du
moment cinétique

Conclusions

La résolution de ce “problème” a été proposée par plusieurs groupes indépendamment :

– à l’infini de genre lumière : Yau et al, Porrati et al, Compère et al

– à l’infini de genre espace : O. Fuentealba, M. Henneaux and C. Troessaert, “Logarithmic supertranslations and supertranslation-invariant Lorentz charges,” JHEP **02** (2023), 248 [arXiv :2211.10941 [hep-th]].

Ces différentes propositions sont équivalentes, O. Fuentealba, M. Henneaux and C. Troessaert, “Asymptotic symmetry algebra of Einstein gravity and Lorentz generators,” [arXiv :2305.05436 [hep-th]].

Supertranslations logarithmiques

Gravitation
einsteinienne,
une centenaire
dynamique

Marc Henneaux
(Université Libre
de Bruxelles et
Collège de
France)

Introduction

Systèmes isolés et
symétries
asymptotiques

Le groupe BMS_4

Mémoire et
supertranslations

Définition du
moment cinétique

Conclusions

On peut élargir les conditions asymptotiques afin qu'elles soient invariantes sous un groupe plus grand

contenant les “supertranslations logarithmiques”

c-à-d des difféomorphismes qui se comportent asymptotiquement comme $\ln r$ quand $r \rightarrow \infty$.

Les générateurs L^α des supertranslations logarithmiques sont canoniquement conjugués aux générateurs S_β des supertranslations pures,

$$\{L^\alpha, S_\beta\} = \delta^\alpha_\beta$$

Algèbre BMS_4 logarithmique

Gravitation
einsteinienne,
une centenaire
dynamique

Marc Henneaux
(Université Libre
de Bruxelles et
Collège de
France)

Introduction

Systèmes isolés et
symétries
asymptotiques

Le groupe BMS_4

Mémoire et
supertranslations

Définition du
moment cinétique

Conclusions

L'algèbre complète prend la forme

$$\{M_a, M_b\} = f_{ab}^c M_c,$$

$$\{M_a, T_i\} = R_{ai}^j T_j,$$

$$\{M_a, S_\alpha\} = G_{aa}^i T_i + G_{aa}^\beta S_\beta,$$

$$\{M_a, L^\alpha\} = -G_{a\beta}^\alpha L^\beta,$$

$$\{L^\alpha, S_\beta\} = \delta_\beta^\alpha,$$

et donc $\text{Log}BMS_4 = \mathcal{L} \oplus_\sigma (\mathcal{A} \oplus_c \mathcal{B})$

où \mathcal{A} et \mathcal{B} sont les sous-algèbres abéliennes des
supertranslations pures et des supertranslations logarithmiques.

La relation clé est $\{L^\alpha, S_\beta\} = \delta_\beta^\alpha$

car elle permet une redéfinition des générateurs de Lorentz telle
que $\{M_a, S_\alpha\} = 0$.

Redéfinition non-linéaire

Gravitation
einsteinienne,
une centenaire
dynamique

Marc Henneaux
(Université Libre
de Bruxelles et
Collège de
France)

Introduction

Systèmes isolés et
symétries
asymptotiques

Le groupe BMS_4

Mémoire et
supertranslations

Définition du
moment cinétique

Conclusions

La redéfinition qui permet de “découpler” les supertranslations est non-linéaire, ce qui est tout à fait autorisé.

Elle prend la forme

$$\begin{aligned}\tilde{M}_a &= M_a - G_{a\beta}{}^i L^\beta T_i - G_{a\beta}{}^\gamma L^\beta S_\gamma \\ &= M_a - L^\beta \{M_a, S_\beta\}.\end{aligned}$$

Elle implique en effet

$$\{\tilde{M}_a, S_\alpha\} = \{\tilde{M}_a, L^\alpha\} = 0,$$

tandis que $\{\tilde{M}_a, \tilde{M}_b\}$ et $\{\tilde{M}_a, T_i\}$ sont inchangés.
(théorème de Darboux)

Les nouveaux champs de vecteurs hamiltoniens associés aux transformations de Lorentz diffèrent des précédents par une supertranslation de paramètre $(-G_{a\beta}{}^i L^\beta, -G_{a\beta}{}^\gamma L^\beta)$ et une supertranslation logarithmique de paramètre $-\{M_a, S_\beta\}$.

Algèbre BMS_4 logarithmique

Gravitation
einsteinienne,
une centenaire
dynamique

Marc Henneaux
(Université Libre
de Bruxelles et
Collège de
France)

Introduction

Systèmes isolés et
symétries
asymptotiques

Le groupe BMS_4

Mémoire et
supertranslations

Définition du
moment cinétique

Conclusions

La nouvelle algèbre est

$$\{\tilde{M}_a, \tilde{M}_b\} = f_{ab}^c \tilde{M}_c,$$

$$\{\tilde{M}_a, T_i\} = R_{ai}^j T_j,$$

$$\{\tilde{M}_a, S_\alpha\} = 0,$$

$$\{\tilde{M}_a, L^\alpha\} = 0,$$

$$\{L^\alpha, S_\beta\} = \delta_\beta^\alpha,$$

et donc $\text{LogBMS}'_4 = \mathcal{L} \oplus (\mathcal{A} \oplus_c \mathcal{B})$

Le moment cinétique ne dépend plus des supertranslations.

Conclusions

Gravitation einsteinienne, une centenaire dynamique

Marc Henneaux
(Université Libre
de Bruxelles et
Collège de
France)

Introduction

Systèmes isolés et
symétries
asymptotiques

Le groupe BMS_4

Mémoire et
supertranslations

Définition du
moment cinétique

Conclusions

La structure asymptotique de la gravitation est extrêmement riche, qu'on l'étudie à l'infini de genre espace ou à l'infini de genre lumière.

On obtient des résultats en complète concordance :

les symétries asymptotiques forment une algèbre de dimension infinie, l'algèbre de BMS.

On peut explicitement relier les générateurs obtenus dans les deux descriptions

ainsi que les charges (à la limite $u \rightarrow -\infty$)

Conclusions

Gravitation
einsteinienne,
une centenaire
dynamique

Marc Henneaux
(Université Libre
de Bruxelles et
Collège de
France)

Introduction

Systèmes isolés et
symétries
asymptotiques

Le groupe BMS_4

Mémoire et
supertranslations

Définition du
moment cinétique

Conclusions

Cette structure asymptotique peut être élargie en introduisant les supertranslations logarithmiques

qui sont des transformations de jauge “impropres” conjuguées aux supertranslations pures.

Celles-ci sont physiquement non triviales.

Elles permettent en particulier de redéfinir les générateurs de Lorentz (et en particulier le moment cinétique) de telle sorte que $\{\tilde{M}_a, S_\alpha\} = \{\tilde{M}_a, L^\alpha\} = 0$.

Il n’y a plus d’ambiguïté du moment cinétique.

L’algèbre de symétrie asymptotique est $\mathcal{L} \oplus (\mathcal{A} \oplus_c \mathcal{B})$ (somme directe).

Conclusions

Gravitation einsteinienne, une centenaire dynamique

Marc Henneaux
(Université Libre
de Bruxelles et
Collège de
France)

Introduction

Systèmes isolés et
symétries
asymptotiques

Le groupe BMS_4

Mémoire et
supertranslations

Définition du
moment cinétique

Conclusions

L'effet de mémoire est une manifestation physique des supertranslations et de la symétrie asymptotique BMS.

Une autre manifestation physique est constituée par les conséquences quantiques que l'on tire des identités de Ward et qui conduisent aux “soft theorems” (Strominger et al).

MERCI!