Basic Example - 1

Comment estimer une incertitude ?
Le cas de l'efficacité

Autrans, 17-21 mai 2010

Jérôme Baudot,
baudot@in2p3.fr

Institut Pluridisciplinaire Hubert CURIEN STRASBOURG

D'après :

- Marc Patterno, "Calculating Efficiencies and Their Uncertainties", FERMILAB-TM-2286-CD

- Thomas Ullrich & Zangbu Xu, "Treatment of Errors in Efficiency Calculations", arXiv:physics/0701199v1

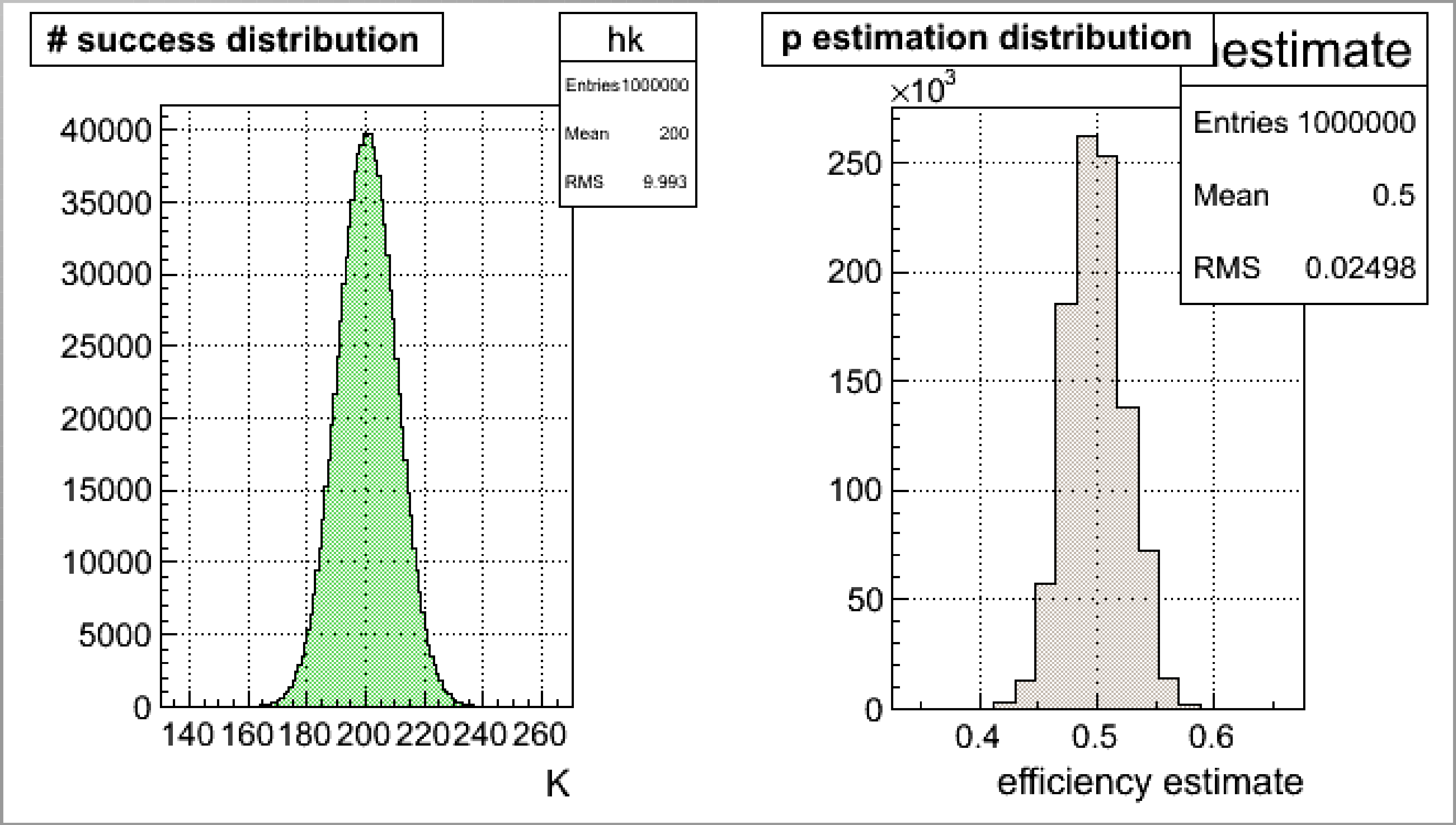
Le problème

- Processus de sélection
  - Efficacité d'un détecteur, d'un critère de sélection, ...
  - p est la probabilité de sélectionner un événement
- Pour UNE expérience
  - Échantillon initial = N événements
  - Échantillon final = K événements sélectionnés
  - Quel est un estimateur de p ?
    - Un estimateur intuitif de p est K/N
  - Quelle est l'incertitude sur cette estimation ?
    - Selon la statistique de Poisson : $\sqrt{K} / N$

Approche empirique

- Let's go for a Toy MonteCarlo
  - ✗ Simulation de M expériences à p connu
  - ✗ Pour chaque expérience :
    - ➔ N tirages de la loi de Bernouilli (0=failed ou 1=success)
    - ➔ La sommation des 1 donne K
  - ✗ La distribution de K/N sur les M expériences fourni :
    - ➔ La moyenne de l'estimateur de p
    - ➔ L'écart-type de l'estimateur de p = incertitude recherchée ?
  - ✗ En pratique pour Bernouilli :
    - ➔ Tirer un nombre u uniforme [0,1]
    - ➔ Si u<p : success
    - ➔ Si u>p : failed

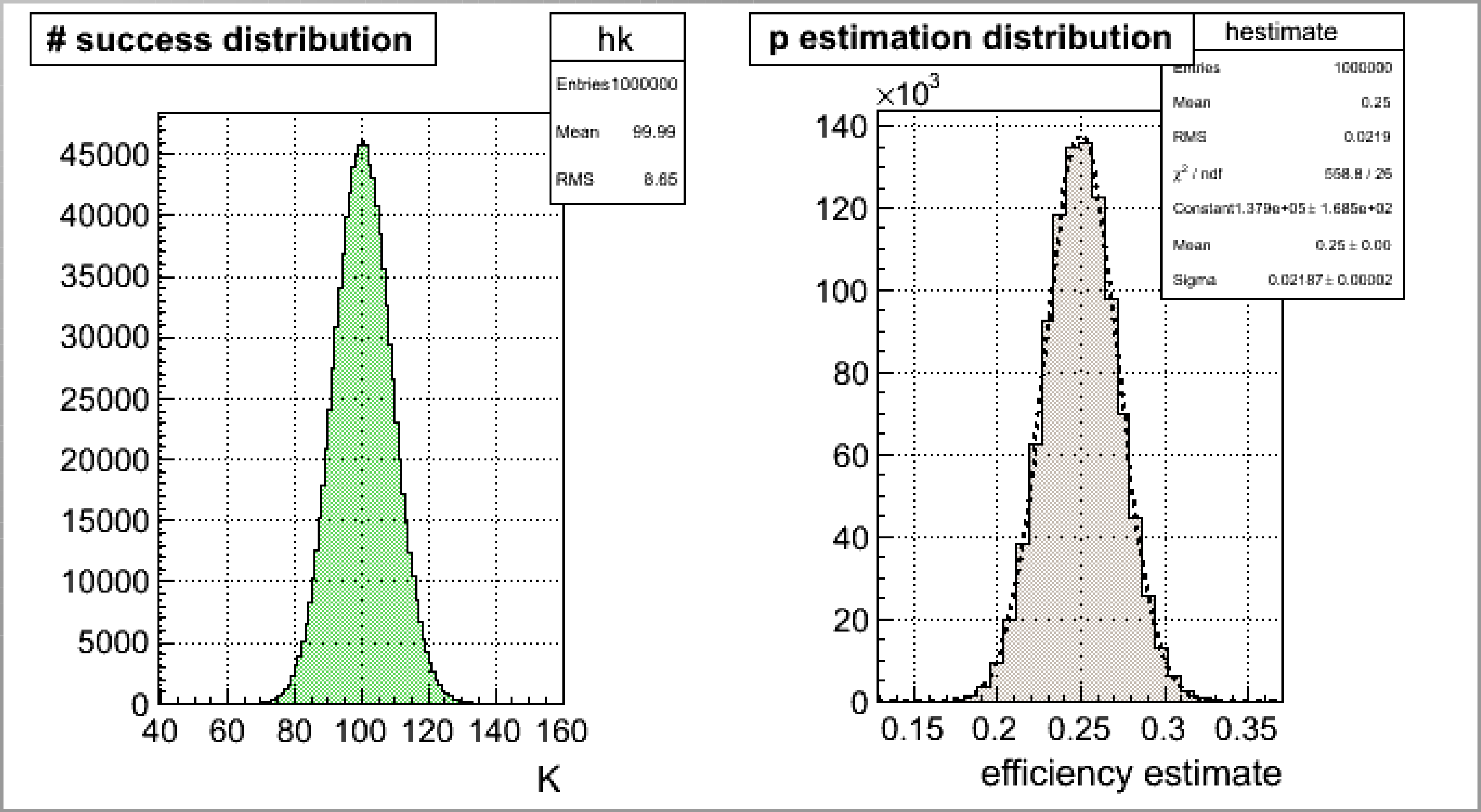
Toy MonteCarlo p=0.5



$M=10^6$ expériences de $N=400$ tirages

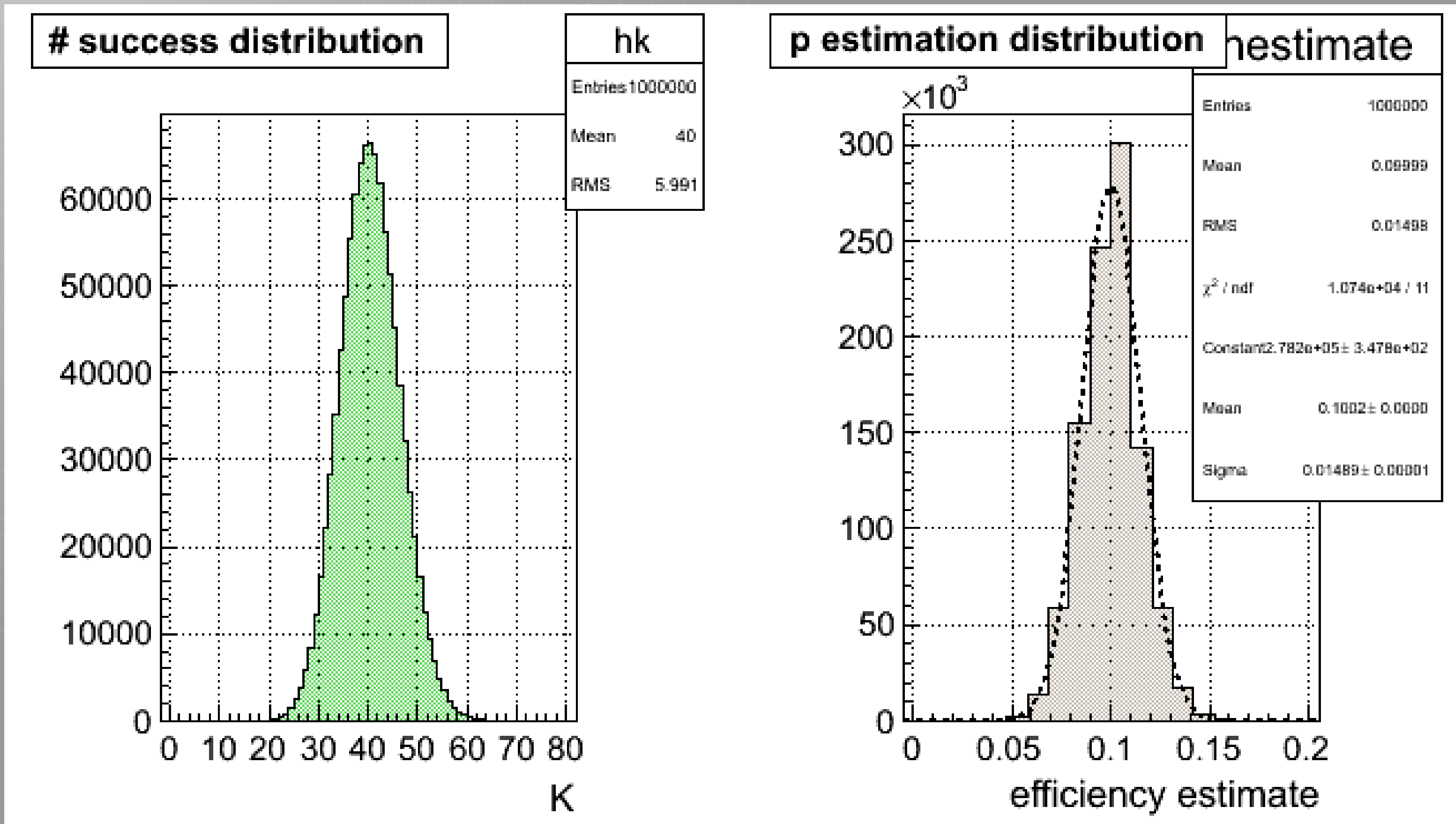
Macro uncertaintyOnEfficiency_simpleStudy.C

Toy MonteCarlo p=0.25



M=10^6 expériences de N=400 tirages

Toy MonteCarlo p=0.1



M=10^6 expériences de N=400 tirages

Première leçon

- Incertitude = ecart-type de la distribution de l'estimateur
  - K est une variable aléatoire binomiale
    - Moyenne Np
    - Variance Np(1-p)
  - Estimateur de p = K/N → variance de p = variance(K)/N^2

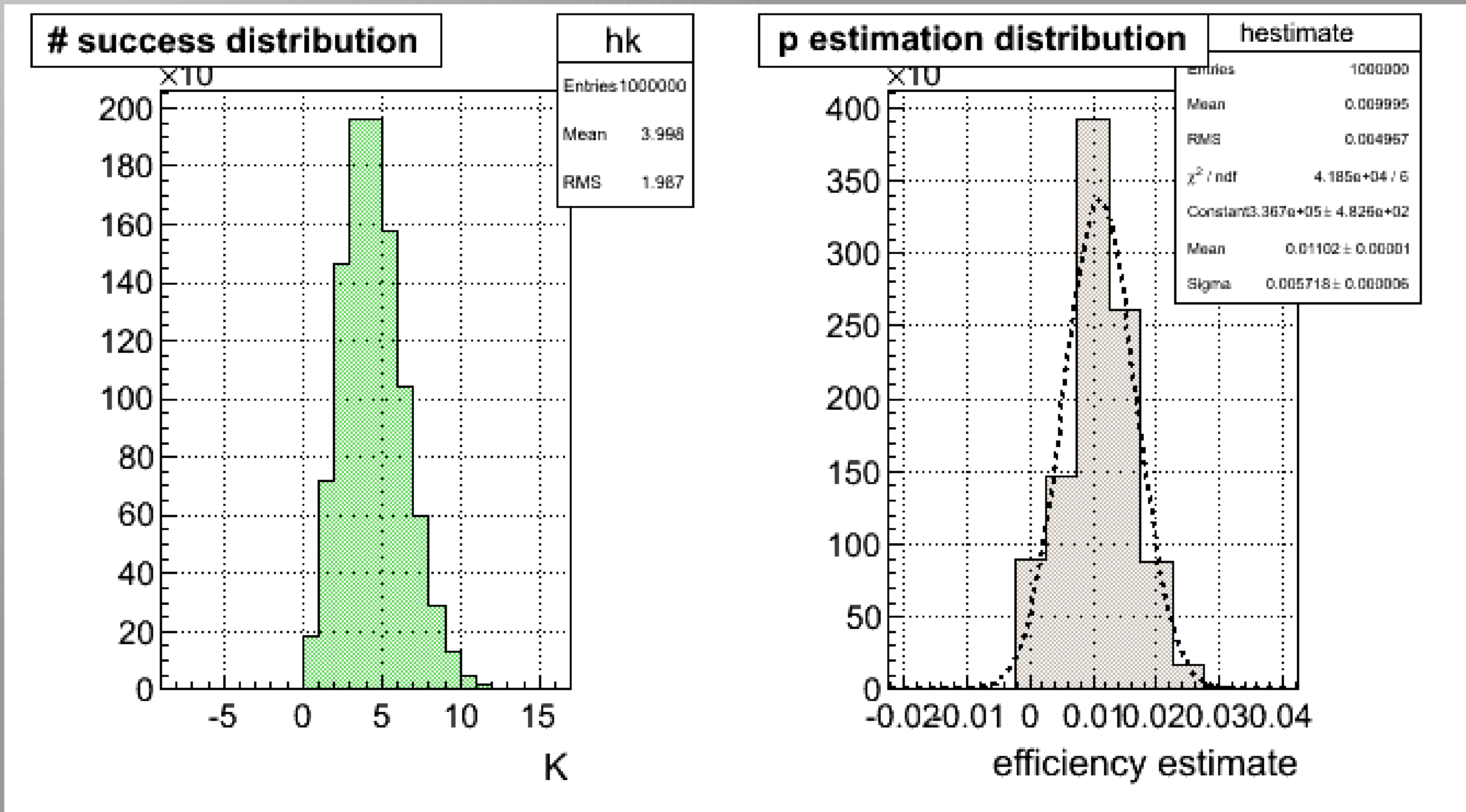
$$\sigma_p = \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}$$

  - Sur les exemples précédents

p	RMS histo	(p)
0.5	0.025	0.025
0.25	0.022	0.022
0.1	0.015	0.015

So far, so good...

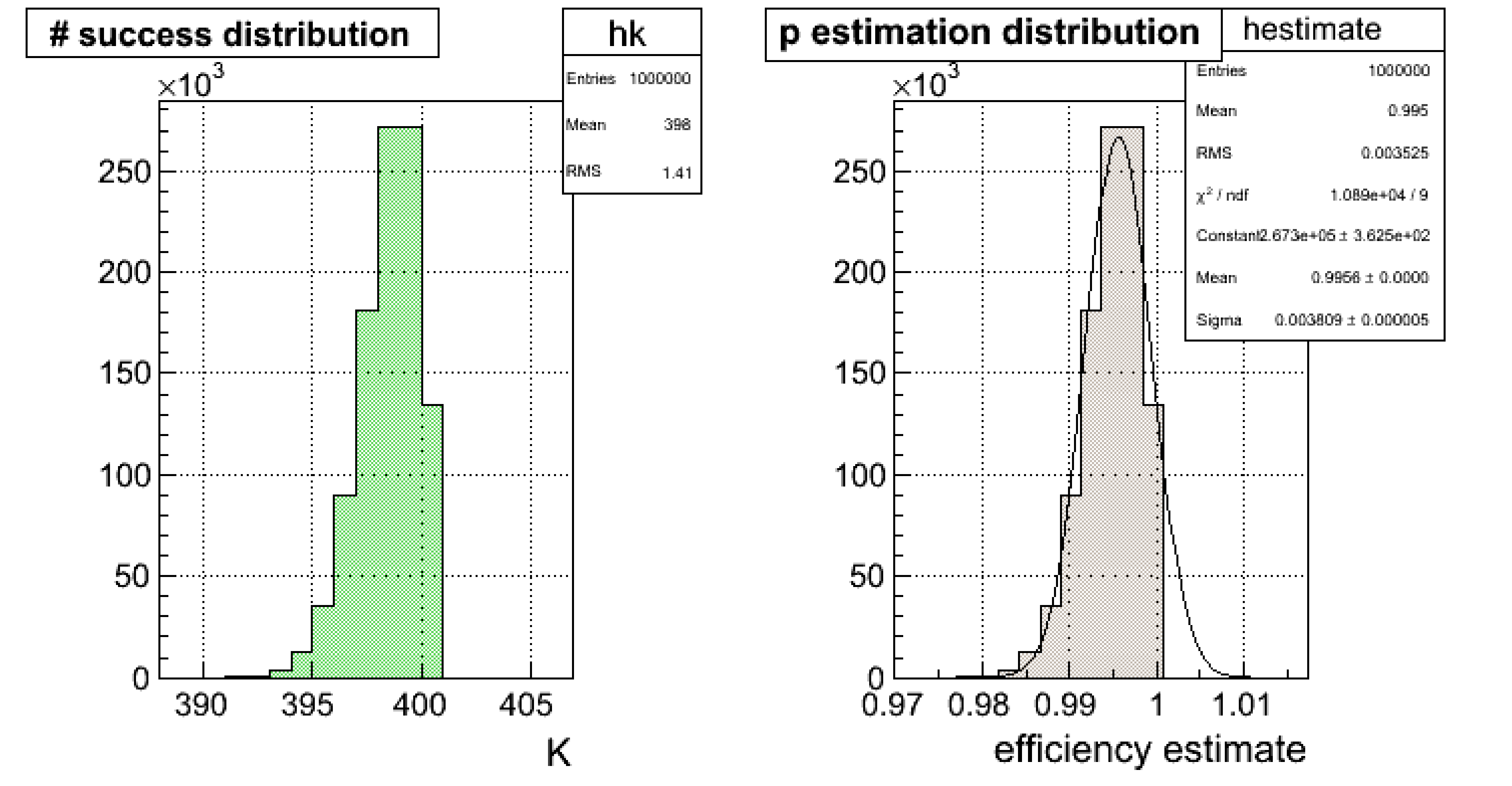
Toy MonteCarlo p=0.01



$M=10^6$ expériences de $N=400$ tirages

Moyenne $\neq$ 0.005
Variance prévue 0.005 !

Toy MonteCarlo p=0.995



- La distribution devient asymétrique
  - ✗ La moyenne n'est plus le mode (valeur la plus probable)
  - ✗ L'erreur est ridiculement faible (prévue 0.0035)

Situation difficile

- Cas p~0 ou p~1
  - ✗ Il est possible d'observer K=0 ou N sans que p=0 ou 1 strictement
  - ✗ Formulation avec écart-type de la binomiale prédit dans ces cas :
    - ➔ ATTENTION, on utilise l'estimateur de p=K/N dans la formule
    - ➔ Incertitude (1-p)p = 0 ???

- Revenons à la loi Binomiale
  - ✗ Pour p=0 (ou 1), la seule variable possible de K est 0 (ou N)
  - ✗ Il est donc normal que la variance soir nulle

... On n'a rien compris !

La bonne question

- La réponse que nous avons :
  - Loi binomiale = probabilité que pour p fixé, on observe K (à N fixé)
    - Écart-type ~ intervalle dans lequel se situe 68% des K (pour N grand)

- La bonne question :
  - Pour K observé fixé, quelle est la loi de probabilité de p ?
    - Écart-type ~ intervalle dans lequel se situent 68% des p

- L'hypothèse implicite que nous avons faite :
  - Les deux questions précédentes sont équivalentes
    - Identification de
la loi de distribution de l'estimateur de p avec
la loi de distribution de la variable K
  - Aux limites p=0, ou 1 cette hypothèse est mise en défaut !

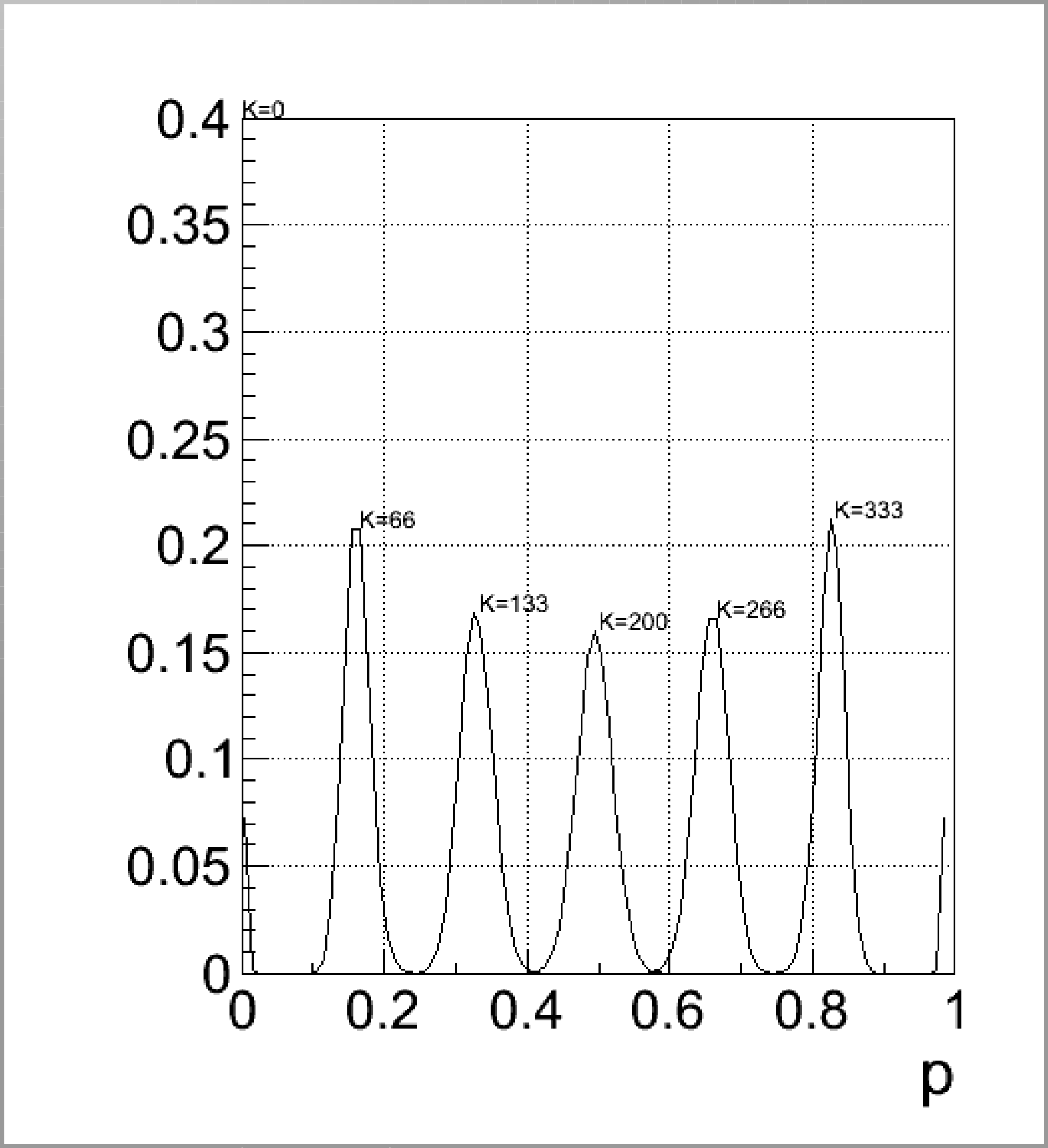
Back to Bayes

- La solution = probabilité conditionnelle
  - Probabilité de p sachant que K est observé = P(p|K)

$$P(p|K)=\frac{P(K|p)*P(p)}{Z}$$

  - P(K|p) est la probabilité binomiale, connue
  - P(p) est une distribution *a priori*, le fameux prior des Bayesiens !
    - Choix “naturel” P(p) uniforme=1 dans [0,1], nulle ailleurs
  - Z est une constante de normalisation (0 < P(p|K) < 1)
    - Vérifie $$1=\int P(p|K)=\frac{1}{Z}\frac{N!}{K!K-N!}\int p^K(1-p)^{N-K}dp$$
    - On obtient $$\boxed{P(p|K)=\frac{N+1!}{K!K-N!}p^K(1-p)^{N-K}}$$

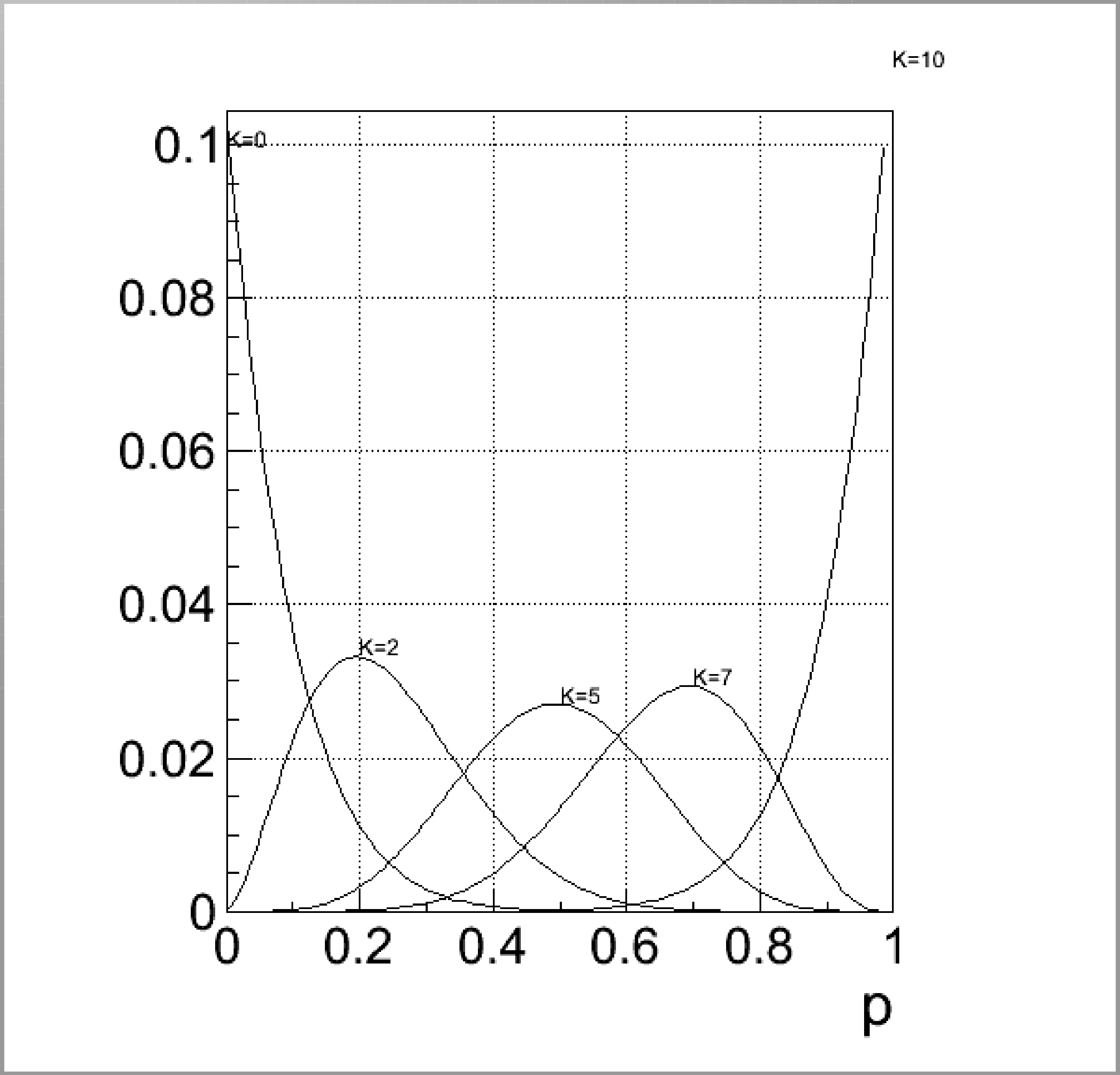
La distribution P(p|K)



- Pour N(=400) grand, l'asymétrie de la distribution reste peut visible sauf à très petit (grand) K

Macros :
- distributionEfficiencyFromOccurence.C
- distributionOfEfficiency.C

La distribution P(p|K)



- Pour N(=10) faible, l'asymétrie de la distribution apparaît rapidement
- Le mode vaut K/N
- La moyenne vaut (K+1)/(N+2)   mode !
- La probabilité est nulle en p=0 ou 1 sauf si K=0 ou N

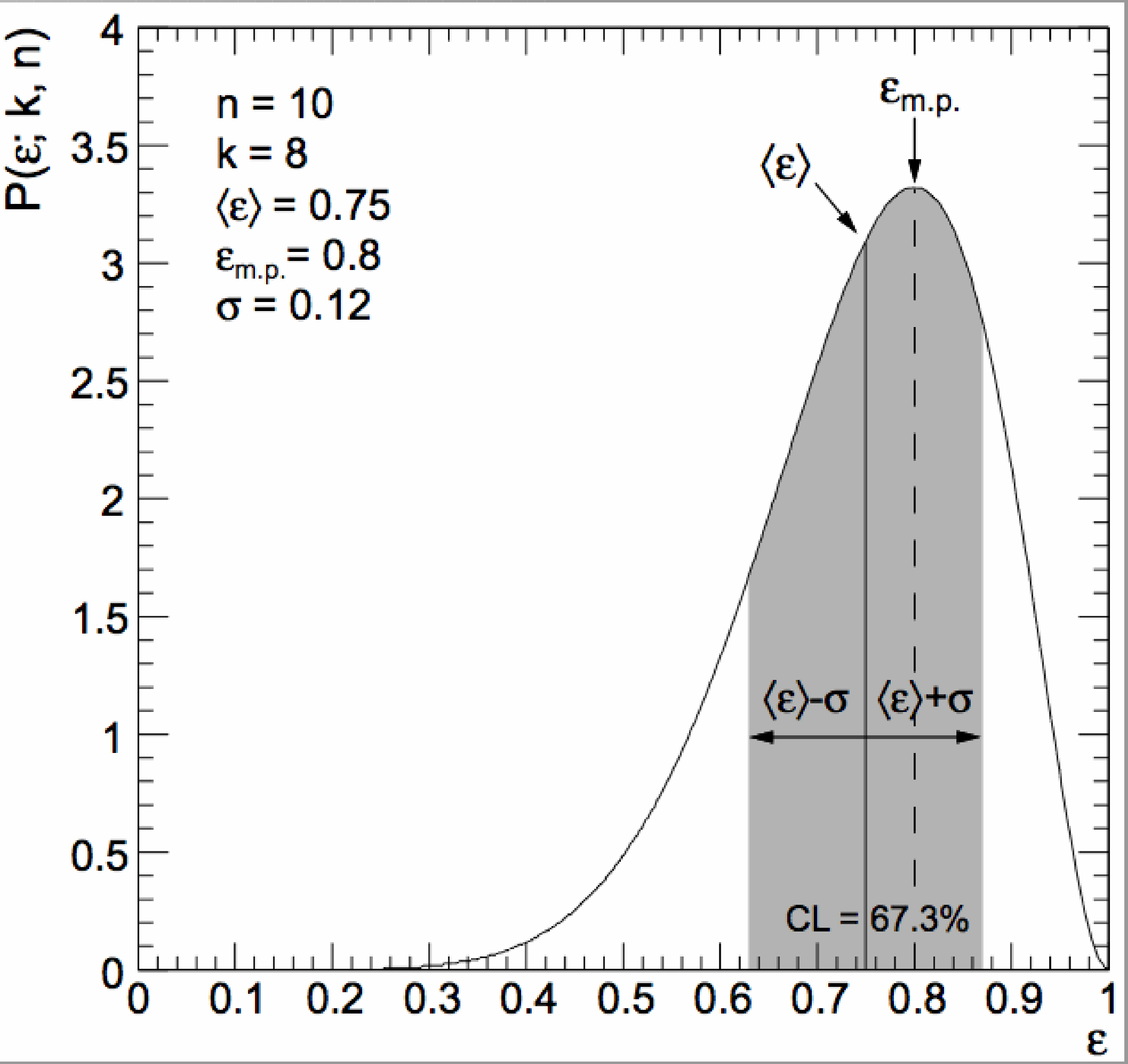
Estimation de l'incertitude

- Méthode 1 : prendre l'écart-type de P(p|K)
  - Calul donne :

$$\boxed{\sigma_p = \sqrt{\frac{(K+1)(K+2)}{(N+2)(N+3)} - \frac{(K+1)^2}{(N+2)^2}}}$$

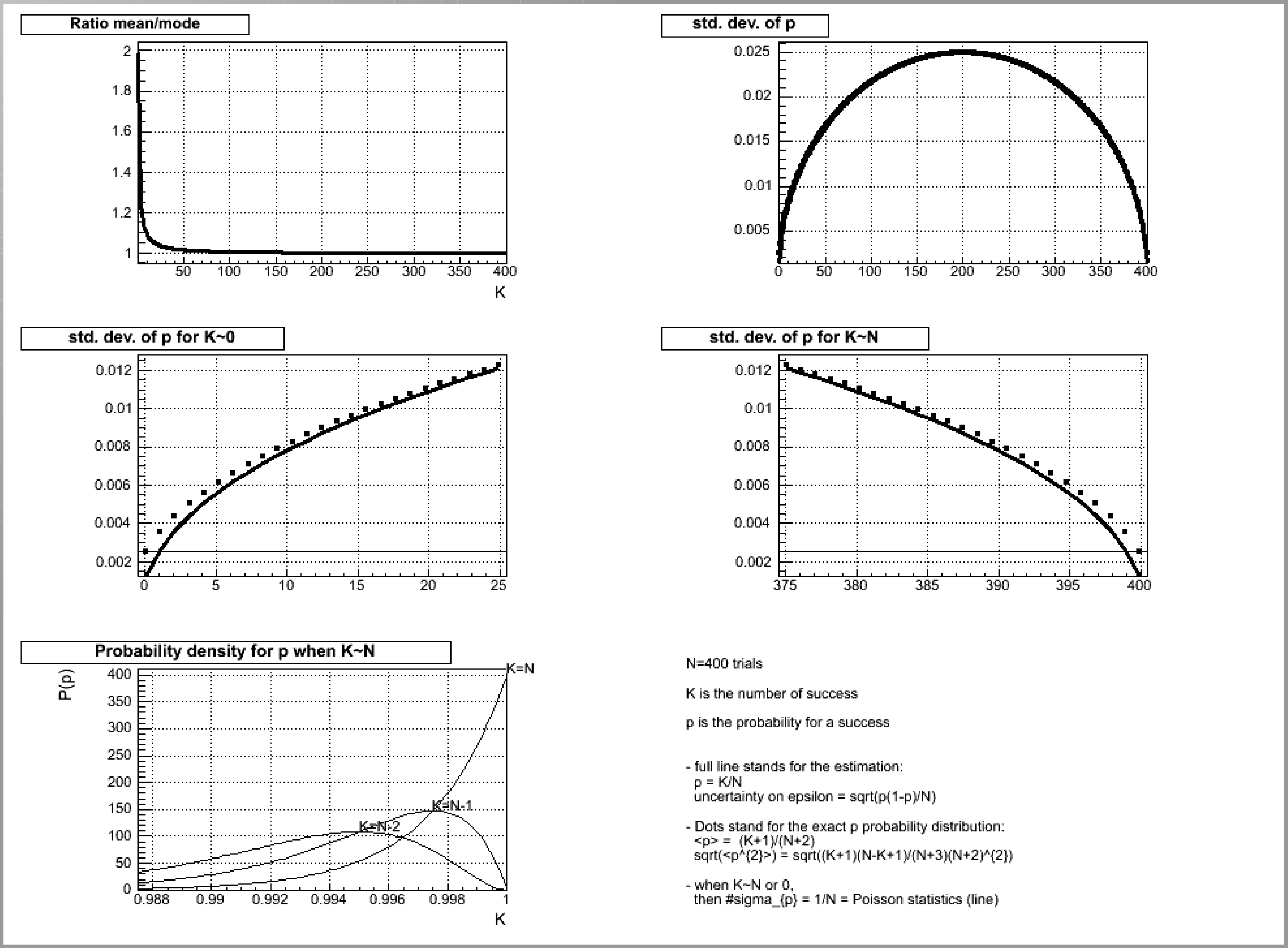
- Méthode 2 : intervalle avec couverture de 68%
  - Méthode numérique proposée par M.Paterno
  - Voir la classe TgraphAsymmError dans Root

Estimation de l'incertitude

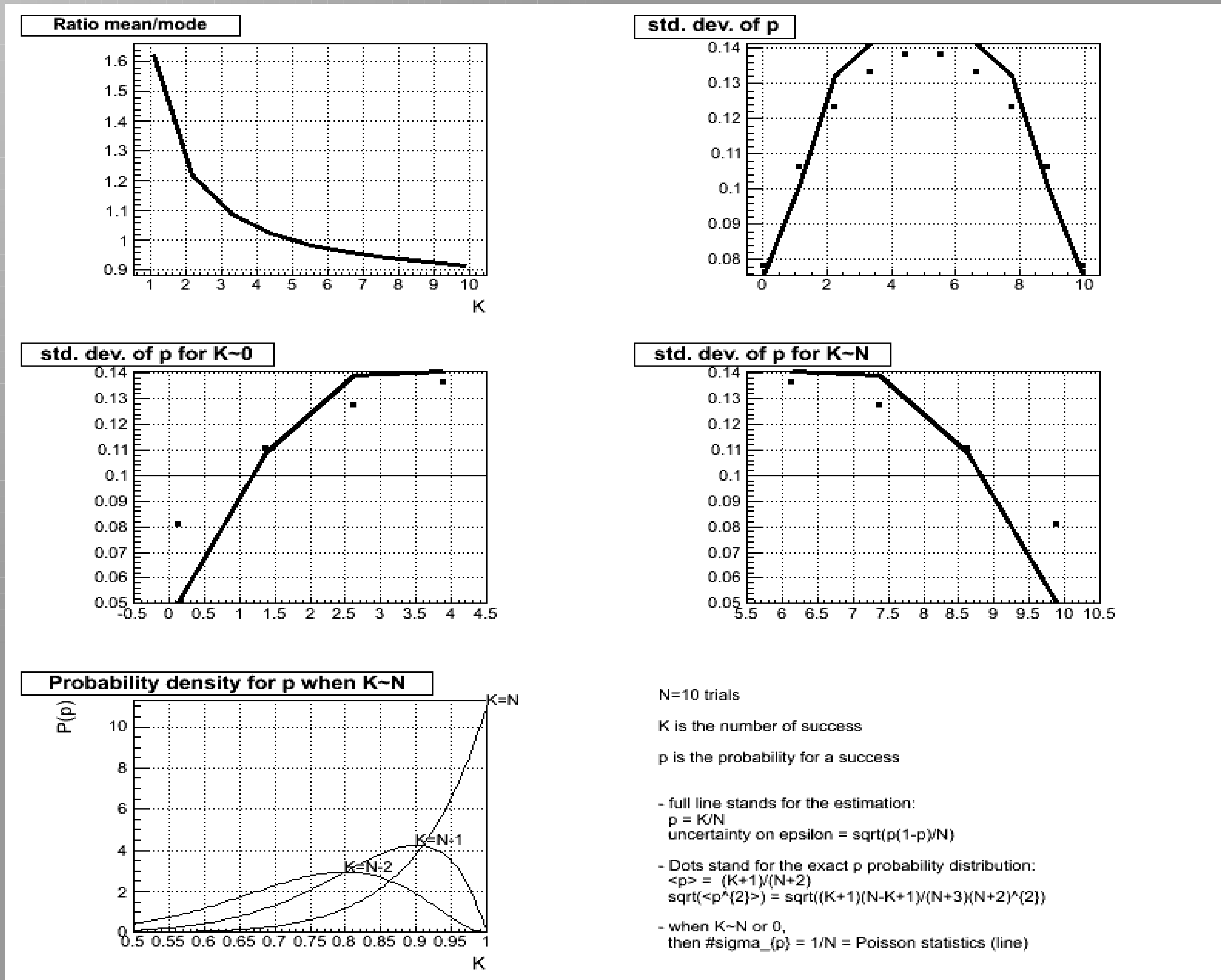


Comparons les incertitudes

Macro uncertaintyOnEfficiency_study.C

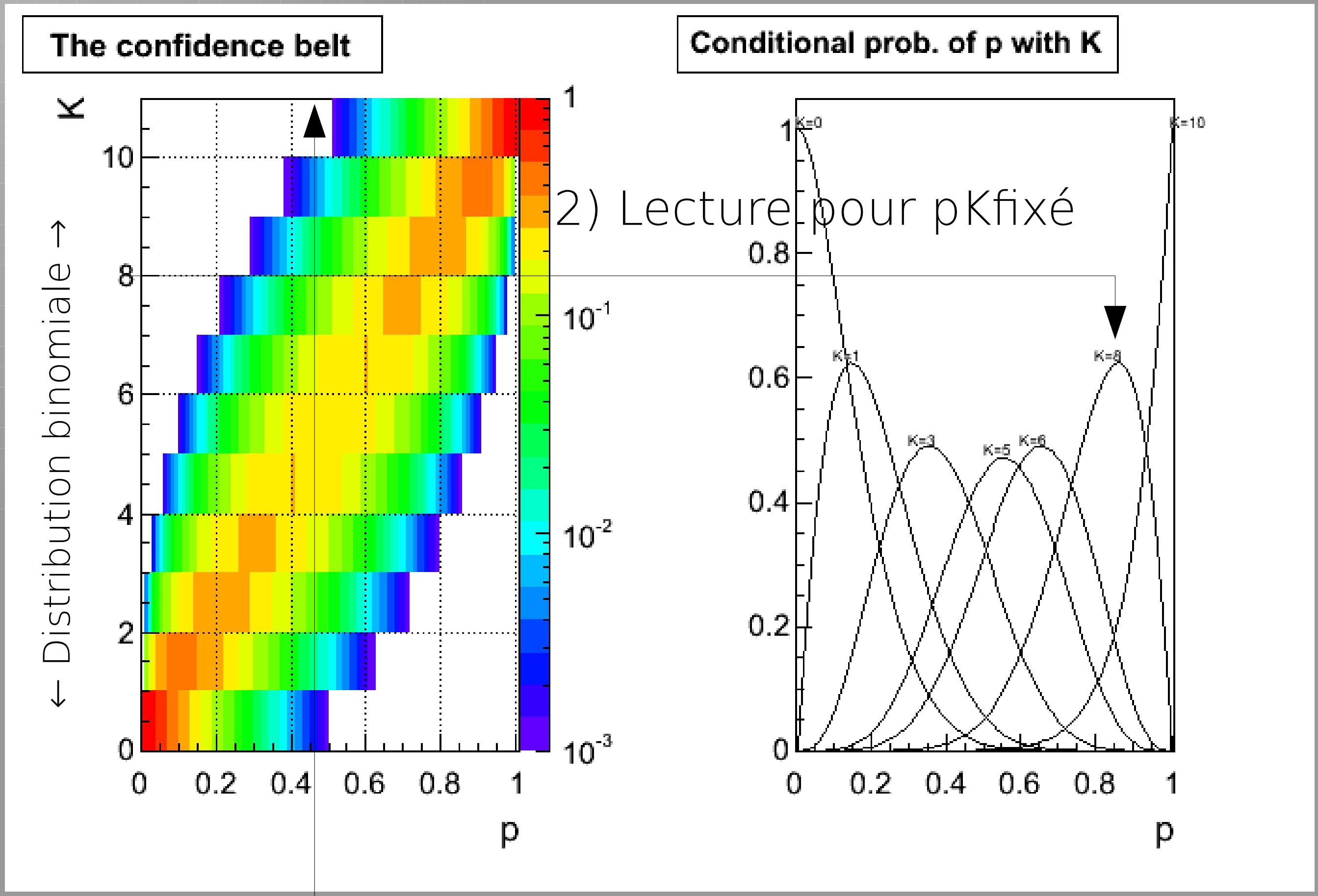


Comparons les incertitudes



Méthode numérique pour P(p|K)

- Inversion graphique
  - ✗ De P(K|p) vers P(p|K)
  - ✗ Macro uncertaintyOnEfficiency_Inversion.C

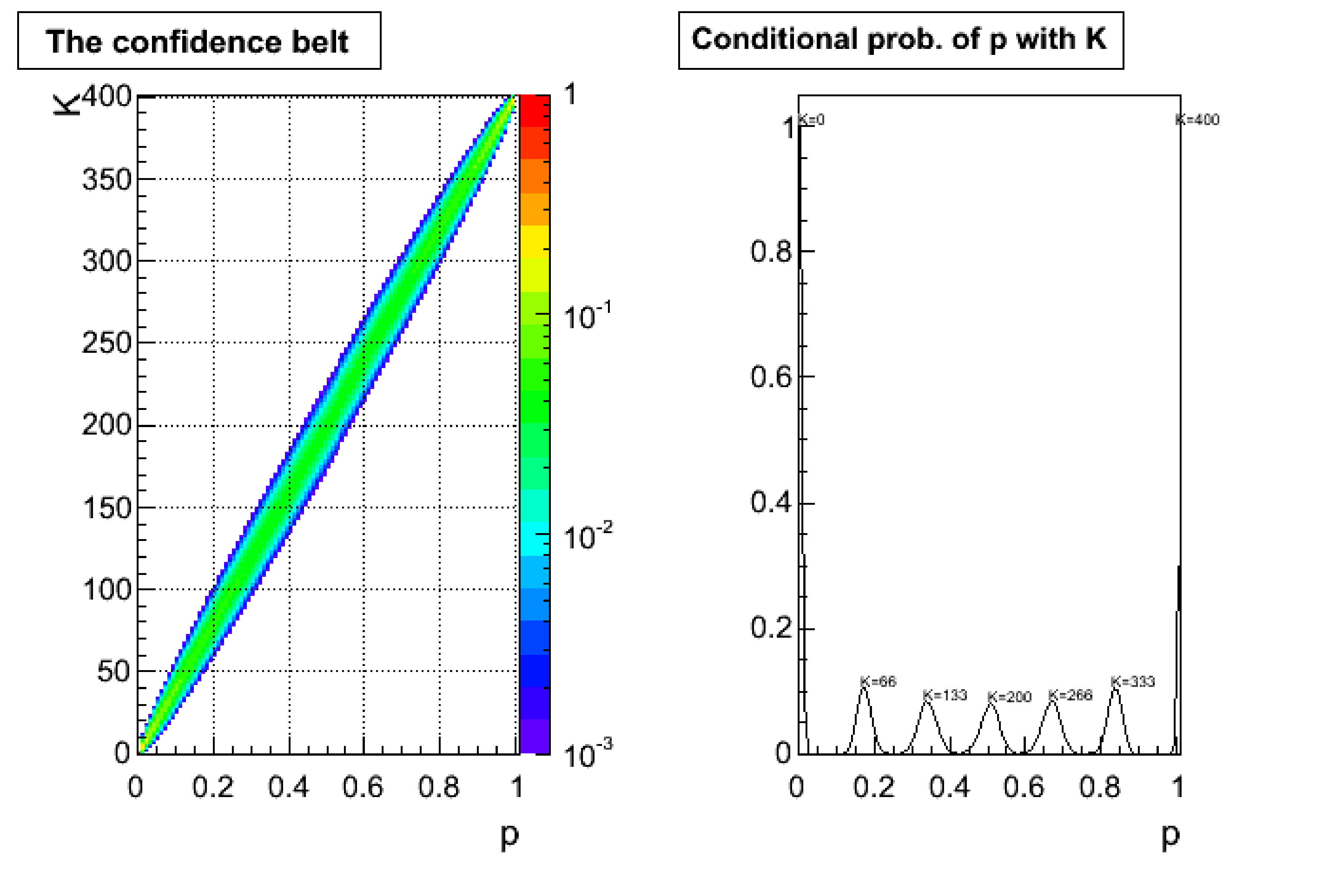


2) Lecture pour pKfixé

1) Génération à p fixé

Méthode numérique pour P(p|K)

N=400



Conclusion

- Sur le problème de l'incertitude associée à l'estimation de l'efficacité :
  - ✗ Méthode de la variance binomiale correcte dans la plupart des cas
  - ✗ Pour les cas limites ($p \sim 0, 1$) faire attention !

- En général
  - ✗ Le point crucial consiste à se poser la bonne question