A Lie-Jordan Framework for classical and quantum mechanic

Stage M2-PSA

Edouard Malgoyre

Sous la direction de : Michel Vittot, CNRS, Centre de Physique Théorique (CPT) Marseille-Luminy

Centre de Physique Théorique

Sommaire

I) *Introduction*

1) *Quantité physique et espace des états*

La réunion de la mécanique quantique et de la gravité dans un modèle de gravité quantique fait face à plusieurs écueil, notamment il est nécessaire d'avoir une ***description de l'espace-temps en soi***. Or la mécanique quantique de par son interprétation instrumentaliste ne donne pas une description réaliste du système. C'est pourquoi il faut un formalisme, se rapprochant de la mécanique classique, qui permet de décrire le système en soi sans faire référence à un observateur extérieur.

Système physique

- quantité physique *X* et espace des états *S* :

$$f_X : S \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (1.1)$$

- L'ensemble des fonctions = structure algèbrique

- L'ensemble des états = structure algèbrique dual
- état d'un système physique :

$$\sigma \ : f_X \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (1.2)$$

- σ normé et positif

2) *Algèbre de Lie-Jordan*

K-Algèbre

Soit K un corps (en général $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit A un ensemble muni de deux lois de compositions internes, notées + et $\times$, et d'une loi de composition externe notée «.» ($K \times A \longrightarrow A$)

On dit que A est une *K-Algèbre* si :

(i) (A,+, .) est un K-espace vectoriel

(ii) $\forall a,b \in A \quad (a,b) \longrightarrow a \times b$ *est bilinéaire (on l'appelle produit)*

De plus on dit que A est une *K-Algèbre* unitaire si :

(iii) il existe $1_A \in A$ *neutre pour* $\times$

associative si :

(iv) la loi $\times$ est associative

Commutative si :

(v) la loi $\times$ est commutative

Algèbre de Jordan et algèbre de Lie:

Une ***algèbre de Jordan*** est une algèbre commutative, $a \circ b = b \circ a$, non nécessairement associative pour laquelle *l'identité de Jordan* :

$$(a \circ b) \times (a \circ a) = a \circ (b \circ (a \circ a)) \qquad (1.3)$$

est vérifiée.

Une ***algèbre de Lie*** est un espace vectoriel E munit d'une loi bilinéaire antisymétrique, couramment appelé crochet de Lie, $[\ ,\ ] : E \times E \qquad E$ vérifiant *l'identité de Jacobi* :

$$\forall x, y, z \in E : [x,[y,z]] + [z,[x,y]] + [y,[z,x]] = 0 \qquad (1.4)$$

2) *Algèbre de Lie-Jordan*

On appelle ***algèbre de Lie-Jordan*** (avec constante de déformation *q*) un *K*-espace vectoriel *E* munit d'un deux lois bilinéaires : une loi symétrique, le ***produit de Jordan***, et une loi antisymétrique, ***le crochet de Lie,*** qui est un dérivation pour le produit de Jordan et une dérivation de Lie.

Une ***K*-algèbre de Lie-Jordan** est une structure algébrique $(E\ ,\ +\ ,\circ,\ [\ ;\ ]\ ,\ .)$ satisfaisant les conditions suivantes :

$\forall\ x, y, z\ \in\ E$

(i) (E,+, .) est un K-espace vectoriel

(ii) $x \circ y = y \circ x$

(iii) $\forall\ x, y, z \in E :\ \big[x\ ,[y\ ,z\ ]\big] + \big[\ z\ ,[x\ ,y\ ]\big] + \big[\ y\ ,[z\ ,x\ ]\big]\ = 0$ (dérivée de Lie)

(iv) $[x\ ,y \circ z] = [\ x, y] \circ z + y \circ [x, z]$ (Leibniz)

(v) $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z + q^2\big[\ y\ ,[x\ ,z\ ]\big]$ (identité d'association)

II) Mécanique Classique:

1) Outils de géométrie différentielle

Formulation de la mécanique classique : Newtonienne, Hamiltonienne => Hamiltonienne plus générale.

=> La mécanique classique Hamiltonienne peut être entièrement caractérisé en termes *géométrique* avec les ***variété de Poisson***. La notion de ***forme symplectique*** est fondamental dans cette formulation, pour en donner une définition formel il faut d'abord introduire plusieurs notions de géométrie différentielle.

Une variété différentiable *M* de dimension *n* est un ensemble de points qui ressemble à $\mathbb{R}^n$ pour un voisinage autour de chaque point. Formellement on définit *M* comme :

un ensemble $M = \cup_{a=1}^{N} C_a$ où pour chaque ensemble C_a on a une bijection

$$\varphi_a : \begin{cases} C_a \subset M & \to & O_a \subset \mathbb{R}^n \\ x & \to & (x) = (x_{1,a}, \dots \dots . x_{n,a}) \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.1)$$

où $O_a \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert

On demande aussi que pour tout *a,b,* $\varphi_b(C_a \cap C_b) \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert et l'application

$$\varphi_{ab} \coloneqq \varphi_a \circ \varphi_b^{-1}: \quad \varphi_b(C_a \cap C_b) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \varphi_a(C_a \cap C_b) \subset \mathbb{R}^n \quad (2.2)$$

est un difféomorphisme qu'on appelle changement de coordonnées.

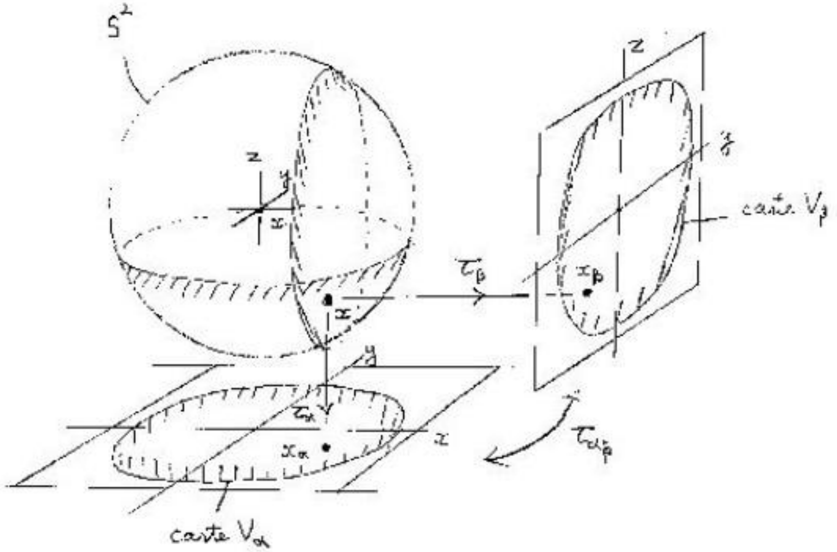

Figure 1: Sphère S^2 est un exemple de variété de dimension 2

2) *Forme symplectique et variété de Poisson*

En tout point *x* d'une variété *M* de dimension *n* on peut définir un ***vecteur tangent*** *V* qui s'écrit :

$$\boxed{V=\sum_{i=1}^{n} V^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \qquad (2.3)$$

C'est un operateur différentiel d'ordre 1 et les vecteurs $\frac{\partial}{\partial x^i}$ $i: 1, \ldots, n$ forment une base vectoriel de *l'espace tangent* au point *x,* noté $T_x M$.

On appelle *fibré tangent* la collection de tous les espaces tangents, noté $T\ M = \cup_{x=1}^{N} T_x M$

Un ***champ de vecteurs*** sur *M* est un choix de vecteurs tangents en chaque point de la variété.

On note $\mathcal{C}^\infty(M, \Gamma M)$ l'ensemble des champs de vecteurs sur *M.*

Figure 2: illustration d'un vecteur tangent

La notion de champ de vecteur et d'espace tangent vient avec une **version duale**, on définit ainsi l'ensemble des champs de formes (ou co-vecteur) $\mathcal{C}^\infty(M, T^*M)$, où T^*M est le *fibré cotangent* $T^*\ M = \cup_{x=1}^{N} T_x^* M$ (collection des espace cotangent).

2) *Forme symplectique et variété de Poisson*

Formes différentielles:

Un tenseur covariant de degré *k* est un élément de $(\Gamma_x^* M \otimes \ldots \otimes \Gamma_x^* M)$
On appel ***k-formes*** les tenseurs antisymétriques de degré *k* et on note Λ_x^k l'ensemble des tenseurs anti-symmetrique au point *x*

De même on noté $\Lambda^k = \cup_{x \in M} \Lambda_x^k$ l'espace des fibré des *k-forme*
Une section de ce fibré, $\mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^k)$, est un champ de tenseur antisymétrique de degré *k* $\mathcal{C}^\infty$, c'est un choix de tenseur en chaque point.

Forme symplectique

On définit une forme symplectique Ω sur $T_{(x,\eta)}(T^* M)$ (l'espace tangent au point (x, η) de l'espace fibré cotangent $T^* M$) par :

$$\begin{aligned} \Omega &= dx^i \otimes d\eta_i - d\eta_i \otimes dx^i \\ &= dx^i \wedge d\eta_i \end{aligned} \qquad (2.4)$$

Elle est fermée ($d\Omega = 0$) et non dégénérée c'est-à-dire :

$$\widehat{\Omega} : \begin{cases} T_{(x,\eta)}(T^* M) & \to T^*_{(x,\eta)}(T^* M) \\ x & \to \widehat{\Omega}(x) = \Omega(x, .) \end{cases} \qquad (2.5)$$

est un isomorphisme.

On appelle variété symplectique une variété munie d'une forme symplectique.

2) *Forme symplectique et variété de Poisson*

Variété de poisson

Soit une variété *M,* et *A*=$\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ l'algèbre des fonctions. On dit que *M* est une variété de Poisson si *A* équipée du produit point par point de deux fonctions:

(f.g)(x)=f(x)g(x)

et d'une loi bilinéaire antisymétrique { , } : *A* x *A* ⟶ *A* , appelé ***crochet de Poisson***, qui vérifie l'identité de Jacobi et la règle de Leibniz.

$$\forall\, f,g,h \in A: \quad \{f,\{g,h\}\}+\{h,\{f,g\}\}+\{g,\{h,f\}\} = 0 \quad \text{(Jacobi)} \quad (2.6)$$

$$\{f,gh\} = \{f,g\}h + g\{f,h\} \quad \text{(Leibniz)} \quad (2.7)$$

Exemple : en mécanique classique le crochet de Poisson est : $\{ f , g \} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}$

Toute variété symplectique possède une structure de variété de Poisson.
L'algèbre de Poisson est *P*=($\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}),\{\,,\}$), le crochet de Poisson est défini comme $\{f,g\} = \Omega(X_f,X_g)$ avec X_f, X_g les champs de vecteurs (dit Hamiltonien) définit respectivement comme les uniques champs de vecteurs vérifiant :

$$\Omega(X_f,-) = df \text{ et } \Omega(X_g,-) = dg \qquad (2.8)$$

3) *Algèbre de Lie-Jordan et état classique*

- ***Algèbre de Lie-Jordan classique :***

En mécanique classique on appelle ***espace des configurations*** une variété de Poisson *P* et ***l'espace des phases*** le fibré cotangent. Les ***grandeurs physiques ou observables*** sont représentées par des ***fonctions sur l'espace des phases*** et la forme symplectique ***induit une structure d'algèbre de Poisson*** sur les fonctions de cette variété.

- **Algèbre de Poisson => algèbre de Lie-Jordan de paramètre $\hbar$=0**. Le produit de Jordan est : *(f.g)(x)=f(x)g(x)* et le crochet de Lie est le crochet de Poisson : [-,-] = {-,-}
- ***Etat classique***

Un état pur classique est une forme linéaire, sur l'algèbre des fonctions de l'espace des phases, normée et positive.

$$\forall f \in A, f = g.g, \quad g \in A \implies \sigma(f) \geq 0 \qquad (2.3)$$

$$\sigma(1) = 1 \qquad (2.4)$$

- On peut se poser la question à quoi ressemble un état quelconque ? C'est une mesure de probabilité quelconque sur l'algèbre des fonctions
- En fait on peut montrer que *l'ensemble des états forment un ensemble conve*xe => théorème de Krein-Milman : tout ensemble convexe peut être reconstruit à partir de son squelette, les points extrémaux (les états purs).

Dans le cas de la mécanique classiques ces **états extrémaux** se trouvent être des ***mesures de Dirac*** :

$$\forall f \quad \delta_{p,q}(f) = f(p,q) \qquad (2.5)$$

Ainsi pour un système classique avec une impulsion *p* à la position *q*, un état de ce système associe à une grandeur physique la valeur de cette grandeur pour la position et l'impulsion du système : $\delta_{p,q} \leftrightarrow (p,q)$

III. ***Mécanique quantique***

i. Problème de la mesure et théorie des variables cachées
ii. Algèbre de Lie-Jordan quantique
iii. Quantification par déformation et mécanique quantique sur l'espace des phases
iv. Espace des états quantique

1) Problèmes de la mesure et théorie des variables cachées

- Effondrement de la fonction d’onde => évolution discontinue, non gouvernée par l’équation de Schrödinger.

System = |**state 1**⟩ +|**state 2**⟩ +...+ |**state N**⟩

Valeur mésurée correspondant à l’état 2

System = |**state 2**⟩

- Remise en question de la ***nature de l’état quantique ψ*** => outil purement calculatoire qui retranscris la connaissance de l’observateur du système quantique ou représentation symbolique du monde quantique contrairement à l’état classique qui donne une représentation réelle de l’état des choses.

- Réponse possible => ***théorie des variables cachées***, il y a d’autres variables qui permettent de retrouver la description classique d’un état.

=> mise en défaut par le théorème de Kochen-Specker énonçant impossibilité d’assigner une variable à chaque opérateur dès que la dimension de l’espace de *Hilbert* est de dimension supérieur à 3

2) *Algèbre de Lie-Jordan quantique*

- La mécanique quantique est basée sur le formalisme des espaces de *Hilbert*. L'ensemble des opérateurs sur cet espace forment une $\mathbb{C}$-*algèbre (algèbre de Banach sur le corps des complexes muni d'une opération involutive $A \longrightarrow A^*$).

Il est possible, à partir de cette $\mathbb{C}$-*algèbre de construire une ***algèbre de Lie-Jordan*** en définissant le produit de Jordan par :

$$\boldsymbol{A \circ B = \frac{1}{2}(AB + BA)} \qquad (3.1)$$

et le crochet de Lie par :

$$\boldsymbol{[A, B] = \frac{1}{2i\hbar}(AB - BA)} \qquad (3.2)$$

On peut vérifier que cette construction satisfait bien les condition de la définition de Lie-Jordan avec pour constante $q = \hbar$.

- En mécanique quantique l'algèbre des observables est une algèbre de Lie-Jordan *A* avec $\hbar \neq 0$. On peut alors complexifier cette algèbre (*V=A⊕A)* pour obtenir la $\mathbb{C}$-*algèbre des opérateurs. Les observables sont alors la parties hermitienne de *V*.

2) *Algèbre de Lie-Jordan quantique*

- La différence entre une algèbre de Lie-Jordan classique et quantique est donc une conséquence de la constante de déformation qui est non nulle dans le cas quantique ($\hbar \neq 0$).

- Cette condition est équivalente à la non-associativité du produit de Jordan. De même la non-associativité vient du fait que deux opérateurs sur un espace de Hilbert ne commutent pas nécessairement. Par conséquent on retrouve bien que c'est la non-commutativité des observables qui fait la particularité des systèmes quantiques.

3) *Quantification par déformation et mécanique quantique sur l'espace des phases*

Quantification d'un système physique :

La quantification consiste à associer un système quantique à un système classique. De manière générale on associe aux observables classiques (les fonctions sur une variété de Poisson) un observable quantique en imposant une relation de commutation dite canonique.

- De plus on veut que lorsque $\hbar$ devienne négligeable par rapport aux autres quantités alors on retrouve le cas classique, c'est le ***principe de correspondance***.
- Toutefois un système quantique contenant plus d'information qu'un système classique il est possible qu'il y ait différentes méthodes de quantification, des systèmes quantiques diffèrent, donnant le même système classique (lorsqu'il existe) dans la limite où $\hbar$ est négligeable.
- La quantification apparait durant les années 1920 avec Dirac et Weyl. Dirac note la similitude entre le crochet de Poisson classique et le commutateur des opérateurs quantiques => idée formuler la mécanique quantique sur l'espace des phases.

3) Quantification par déformation et mécanique quantique sur l'espace des phases

Le point de départ est la correspondance de Weyl-Wigner. L'idée est d'associer de manière biunivoque aux fonctions sur l'espace des phases $f \in \mathcal{C}^{\infty}(P, \mathbb{R})$, un opérateur quantique $\widehat{W}[f]$.

Correspondance de Weyl-Wigner :

Soit deux réels *a et b* $\in \mathbb{R}$ et *f* $\in L^2(\mathbb{R})$

i. On calcul la transformée de Fourier de *f :*

$$\hat{f}(a,b) = \iint dpdqe^{-i(ap+bq)} f(p,q) \qquad (3.3)$$

ii. On change $q \to \hat{q} \quad p \to \hat{p}$

iii. Et on définit :

$$\widehat{W}[f](\hat{q},\hat{p}) = \iint \frac{da}{2\pi}\frac{db}{2\pi} e^{-i(a\hat{p}+b\hat{q})} \hat{f}(a,b) \qquad (3.4)$$

La correspondance de Weyl-Wigner nous donne donc un opérateur mais aucune information sur la structure algébrique formé par ceux-ci. La question étant de trouver pour deux fonctions *f,g* $\in \mathcal{C}^{\infty}(P, \mathbb{R})$ une fonction *h*$\in \mathcal{C}^{\infty}(P, \mathbb{R})$ tel que :

$$\widehat{W}[f]\widehat{W}[g] = \widehat{W}[h] \qquad (3.5)$$

3) *Quantification par déformation et mécanique quantique sur l'espace des phases*

En développant la partie gauche :

$$\widehat{W}[f]\widehat{W}[g] = \iint \frac{da}{2\pi}\frac{db}{2\pi} e^{i(a\hat{p}+b\hat{q})}\hat{f}(a,b) \iint \frac{da'}{2\pi}\frac{db'}{2\pi} e^{i\left(a'\hat{p}+b'\hat{q}\right)}\hat{g}(a',b')$$

Pour deux opérateurs *A* et *B* commutant avec leur commutateur [*A*,*B*] on a la formule :

exp(A)exp(B)=exp(A+B)exp([A,B]/2) *(3.6)*

On obtient :

$$e^{i(a\hat{p}+b\hat{q})}e^{i\left(a'\hat{p}+b'\hat{q}\right)} = e^{i\left((a+a')\hat{p}+(b+b')\hat{q}\right)}e^{i\hbar\left(ab'-ba'\right)/2} \qquad (3.7)$$

On effectue le changement de variable $a \to a - a'$ $b \to b - b'$ et on note $(\widetilde{f \star_\hbar g})$

$$(\widetilde{f \star_\hbar g})(a,b) = \iint \frac{da}{2\pi}\frac{db}{2\pi}\hat{f}(a-a',b-b')e^{\frac{i\hbar\left((a-a')b'-(b-b')a'\right)}{2}}\hat{g}(a',b') \qquad (3.8)$$

Soit :

$$\widehat{W}[f]\widehat{W}[g] = \iint \frac{da}{2\pi}\frac{db}{2\pi}e^{i(a\hat{p}+b\hat{q})}(\widetilde{f \star_\hbar g})(a,b) = \widehat{W}[f \star_\hbar g] \qquad (3.9)$$

3) Quantification par déformation et mécanique quantique sur l'espace des phases

On définit alors le produit de Moyal comme la transformée de Fourier inverse :

$$(f \star_\hbar g)(q,p) = F^{-1}[\widetilde{f \star_\hbar g}] = \iint \frac{da}{2\pi}\frac{db}{2\pi} e^{i(a\hat{p}+b\hat{q})}(\widetilde{f \star_\hbar g})(a,b) \qquad (3.10)$$

Le produit de Moyal de deux fonctions dépend du couple impulsion et position *(p,q)* c'est la fonction $h \in \mathcal{C}^\infty(P,\mathbb{R})$ qu'on cherchait. Il n'est pas commutatif, le caractère non commutatif propre aux opérateurs quantique est bien retranscrit.

Aussi on aimerait que dans la limite $\hbar \to 0$ le produit de Moyal se réduise au produit classique de deux fonctions, ce qui n'est pas évident avec la formule ci-dessus. Pour cela on peut écrire le produit de Moyal d'une autre façon en remplaçant :

$$a, a' \to -i\frac{\partial}{\partial p} \quad b, b' \to -i\frac{\partial}{\partial q}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}(f \star_\hbar g) &= f(p,q) e^{\frac{i\hbar}{2}\left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q}}\overrightarrow{\frac{\partial}{\partial p}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p}}\overrightarrow{\frac{\partial}{\partial q}}\right)} g(p,q) \qquad (3.11)\\ &= (fg)(p,q) + \sum_{n=1}^{+\infty} \hbar^n M_n[f,g](p,q)\end{aligned}$$

3) *Quantification par déformation et mécanique quantique sur l'espace des phases*

Où : $M_n[f,g](p,q) = \frac{1}{n!} f(p,q)\left(\frac{i}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}\right)\right)^n g(p,q)$ *(3.12)*

Et : $M_1[f,g](p,q) = f(p,q)\left(\frac{i}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}\right)\right) g(p,q) = \{f,g\}$

<u>*Remarques :*</u>

- Sous la forme *(3.11)* on voit bien que lorsque $\hbar \to 0$ le produit de Moyal se réduit au produit classique.

- La correspondance de Wigner-Weyl est un homéomorphisme entre l'algèbre des fonctions, avec comme produit le produit de Moyal, et l'algèbre des fonctions, avec comme produit la multiplication point par point.

$$\widehat{W} : (\mathcal{C}^\infty(P,\mathbb{R}),\star_\hbar) \longrightarrow (\mathcal{C}^\infty(P,\mathbb{R}),.)$$

$$\widehat{W}[f \star_\hbar g] = \widehat{W}[f]\widehat{W}[g] \qquad (3.13)$$

-On définit ainsi le commutateur de Moyal comme :

$$[f \star_\hbar g] = f \star_\hbar g - g \star_\hbar f = i\hbar\{f,g\} + \mathcal{O}(\hbar^2) \qquad (3.14)$$

-On retrouve exactement la vision de la quantification de Dirac, la similitude (en $\mathcal{O}(\hbar^2)$) entre le commutateur quantique et le crochet de Poisson apparait clairement ici.

3) *Quantification par déformation et mécanique quantique sur l'espace des phases*

Conclusion :

- Le produit de Moyal nous a permis de formuler la mécanique quantique, avec son algèbre d'opérateur non-commutative, sur l'espace des phases. En effet un système quantique est entièrement déterminé par l'algèbre de ses observables. De ce fait nous avons mis en avant un processus de quantification alternatif se rapprochant d'une formulation classique.
- Toutefois le produit de Moyal n'est valable que pour des structures de Poisson constante, ainsi cette quantification n'est pas adaptée pour décrire des transformations comme un changement de variable. Un théorème due a Kontsevich (Médaille Fields, 1998) permet de montrer que ce processus de quantification dit par déformation est valide pour n'importe quel système classique.

4) *Espace des états quantiques*

Etat quantique

- Soit *E* une algèbre de Lie-Jordan représentant l'ensemble des observables d'un système alors on définit un état comme un élément $\sigma \in E^*$ normé à 1 et positif. Un état quantique est donc une forme linéaire tel que :

$$\forall X \in E,\ X = Y \circ Y,\ Y \in E \quad \Longrightarrow \quad \sigma(X) \geq 0 \qquad (3.15)$$

et pour l'unité de l'algèbre :

$$\sigma(1) = 1 \qquad (3.16)$$

- On peut se poser la même question que dans le cas classique, à quoi ressemble l'espace quantique sous-jacent ?
- Dans le cas classique c'est l'ensemble des points sur une variété or en mécanique quantique nous n'avons pas une telle correspondance entre l'espace des états et l'espace quantique. Mais comme nous l'avons mentionné en introduction il est parfois nécessaire d'avoir une représentation concrète de cet espace quantique.

4) *Espace des états quantiques : Dualité de Gelfand-Naimark*

<u>*Cas abélien :*</u>

- La dualité de Gefland-Naimark énonce que toute $\mathbb{C}$-*algèbre abélienne est isomorphe à la $\mathbb{C}$-*algèbre des fonctions continues sur un espace topologique appelé son ***spectre de Gelffand*** et noté $\Sigma(A)$

$$G: A \to C(\Sigma(A))$$

$$a \to \bar{a}$$

- On appel $\bar{a}$ transformée de Gelfand d'un élément a définit comme :

$$\bar{a} : \Sigma(A) \to \mathbb{C}$$

$$\lambda \to \bar{a}(\lambda) = \lambda(a)$$

- Les éléments du spectre $\Sigma(A)$, appelé caractère, sont les homéomorphismes d'algèbres entre *A* et $\mathbb{C}$.

$$\lambda : A \to \mathbb{C}$$

$$a \to \lambda(a)$$

Lorsque l'élément *a* est auto-adjoint alors le caractère qui lui est associe par dualité est à valeur réelle. L'ensemble de ces caractères forment l'espace des états. De plus la valeur $\lambda(a)$ n'est pas une espérance associée à *a* mais bien la valeur réelle de *a* dans l'état λ. Il suit qu'on peut interpréter le spectre de Gelfand comme l'espace des états purs du système décrit par *A* et *A* comme l'algèbre des fonctions continues sur cette espace.

4) *Espace des états quantiques : Dualité de Gelfand-Naimark*

La dualité de Gelfand-Naimark permet une interprétation classique des états et des grandeurs physiques. Une algèbre commutative est une algèbre donc classique. Similairement cela revient à choisir un ensemble complet d'observable qui commutent pour étudier un système quantique.

<u>Cas non-abélien</u>

Soit A une $\mathbb{C}$-*algèbre non abélienne, alors elle n'a pas de spectre de Gelfand mais les sous-$\mathbb{C}$-*algèbre abélienne de A, elles en ont un. L'idée est de rassembler tous les sous algèbre abélienne, les contextes, de A ainsi que leur spectre pour essayer de définir un spectre « global » de l'algèbre.

4) *Espace des états quantiques : Dualité de Gelfand-Naimark*

On commence par définir pour deux sous-algèbre abélienne C_1 et C_2 telle que $C_2 \subset C_1$ une application entre leur spectre :

$$r_{C_1 C_2} : \Sigma(C_1) \to \Sigma(C_2)$$
$$\lambda \to \lambda_{|C_2}$$

où $\lambda_{|C_2}$ est la restriction de λ à C_2

Soit la ***catégorie des contextes*** de *A*, $\mathcal{C}$ *(A).* Elle a pour objet les sous algèbres abélienne de *A* et comme flèche entre deux sous-algèbre abélienne C_1 et C_2 telle que $C_2 \subset C_1$ l'inclusion $i_{C_2 C_1} : C_2 \to C_1$. On définit le ***pré-faisceau spectrale*** $\underline{\Sigma}$ comme le *foncteur contravariant* de la catégorie des contextes vers la catégorie des ensembles tel que :

- Il envoie les objets *C* de $\mathcal{C}$ *(A)* sur leur spectre $\Sigma(C)$
- et les inclusions $i_{C_2 C_1} : C_2 \to C_1$ sur les restrictions des caractères $r_{C_1 C_2} : \Sigma(C_1) \to \Sigma(C_2)$

Par analogie avec le langage ensembliste on appelle un élément « global » du pré-faisceau spectral $\underline{\Sigma}$ une transformation naturelle entre le pré-faisceau constant $\underline{1}$ objet terminal de la catégorie des pré-faisceau.

$$p : \underline{1} \to \underline{\Sigma}$$

4) *Espace des états quantiques : Dualité de Gelfand-Naimark*

- L'élément *p* sélectionne un état pur λ_C pour chaque contexte de $\mathcal{C}$ *(A).*
- si un contexte C_1 est inclus dans *C* alors on choisit $\lambda_{C|C_1} = \lambda_{C_1}$. De cette manière la valeur $\lambda_C(a)$ d'une quantité physique *a* ne dépend pas du contexte choisit.
- Le pré-faisceau spectral est un ***espace des états généralisé***, les espaces des états locaux (c'est-à-dire associé à une sous-algèbre abélienne d'une algèbre globale non abélienne) sont tous recollé ensemble dans une même structure, avec des éléments globaux.

Remarque :

L'absence d'élément local du pré-faisceau spectral est équivalent au théorème de Kochen-Specker montrant qu'il est impossible d'assigner une valeur à tous les observables d'un système quantique.

Conclusion

L'objectif était de donné un cadre décrivant aussi bien les systèmes classiques que quantiques. De ce fait la structure d'algèbre de Lie-Jordan est le cadre adéquat, elle permet de décrire des systèmes classiques et quantiques avec toutefois des caractéristiques algébriques propres à chaque cas ($\hbar$=0 ou $\hbar \neq 0$).

De plus la méthode de quantification sur l'espace des phases, différente de la quantification canonique usuelle, permet de rapprocher le cadre quantique du cadre classique et fait ressortir la similitude entre le crochet de Poisson classique et le commutateur. Finalement un aperçu de ce à quoi pourrait ressembler l'espace des états quantiques en tant qu'objet sans élément locale a été mis en avant à l'aide de nouveau outils mathématiques.

7) Références

- *<u>Références :</u>*

- [1] Chris Isham & Andreas Döring 2008 *Topos theory in the formulayion of theories of physics* Blackett Laboratory Imperial College, London
- [2] Andreas Döring 2009 *Why Topos Theory in the Foundation of Physics ?* Perimeter Institue, Waterloo
- [3] Andreas Döring 2008 *Tutorial on Conceptual Issues of Quantum theory*
- [4] Sjoerd Beentjes 2012 *An introduction to deformation quantization after Kontsevitch*
- [5] Döring A. 2015 *Spectral presheaves as quantum state spaces*. *Phil. Trans. R. Soc. A* **373**: 20140247. http://dx.doi.org/10.1098/rsta.2014.0247
- [6] https://lipn.univ-paris13.fr/~mazza/teaching/IntroCat.pdf
- [7]   https://en.wikipedia.org/wiki/Kochen%E2%80%93Specker_theorem

Merci de votre attention

Annexe

Langage des catégories :

Le théorie des catégories est une branche des mathématiques qui permet d'appliquer une intuition ensembliste, dans une certaine mesure, à des collections d'élément qui ne sont pas nécessairement des ensembles. On ne fait plus référence aux éléments mais seulement à des relations entre objets.

<u>Définition</u> *Catégorie et foncteur :*

Une catégorie $\mathcal{C}$ est composée :

- d'une ***collection d'objets*** Obj*C* : *A, B, C*…
- pour chaque paire d'objets (A , B) une *collection* ***Hom_C (A,B)*** de morphisme ou flèche *f* partant de A et arrivant sur B, notée $f: A \longrightarrow B$

-D'une application tel que pour tout triplet d'objet A,B,C

$\circ : Hom_C(A,B) \times Hom_C(A,B) \longrightarrow Hom_C(A,C)$

appelée composition et satisfaisant les axiomes :

<u>*associativité*</u> : pour toutes flèches $f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$ et $h: C \longrightarrow D$ on a $h\circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

<u>*neutralité*</u> : pour tout objet *A,* il existe une flèche $id_A : A \longrightarrow A$ telle que, pour toutes $g: A \longrightarrow B$ et $g: B \longrightarrow A$, $id_A \circ h = h$ et $g \circ id_A = g$

Un foncteur F d'une catégorie $\mathcal{C}$ vers une catégorie $\mathcal{C}'$ est définit comme une application préservant la structure de catégorie. On le note $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ et il vérfie :

Annexe

Objet terminal

On dit qu'un objet $\mathbb{T}$ d'une catégorie est terminal si pour chaque objet *A* il existe une unique flèche *f* : $A \longrightarrow \mathbb{T}$

L'objet terminal permet de parler d'éléments d'un ensemble en parlant de fonctions : un ensemble quelconque A est en bijection avec l'ensemble des fonctions {*} →A. Nous avons donc une façon apparemment universelle de convertir un énoncé ou une définition « ensembliste » en un énoncé ou une définition « catégorique », c'est-à-dire, « sans éléments »

Transformation naturelle

Une transformation naturelle est un morphisme entre foncteur. Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories et *F* et *G* deux foncteurs de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$, alors une transformation naturelle entre *F* et *G* noté Φ: $F \longrightarrow G$, est la donnée :

pour chaque objet *X* de $\mathcal{C}$, d'un morphisme Φ_X: $F(X) \rightarrow G(X)$ tel que, pour tout *f* : $X \longrightarrow Y$ morphisme de $\mathcal{C}$, le diagramme suivant soit commutatif :