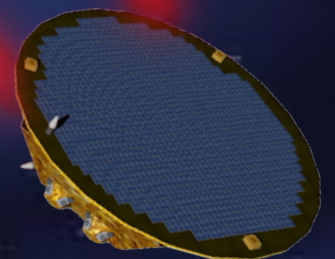
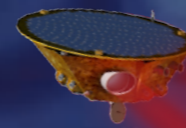






# Cours LISA

Introduction à LISA

H. Halloin  
07.01.2021



-  Faisceaux lasers et interférométrie
-  Quelques composants optiques
-  Bruits et signaux
-  Systèmes asservis



# Faisceau laser et interférométrie

## Equations de Maxwell dans un milieu continu

Loi de Gauss:  $\nabla \cdot \vec{D} = \rho \Leftrightarrow \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV$

Absence de monopôles magnétiques :  $\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

Loi de Maxwell-Ampère:  $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Leftrightarrow \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$

Loi de Faraday  $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$

## Relations de constitution d'un milieu linéaire, local, ohmique et isotrope

Induction électrique [C/m<sup>2</sup>]:  $\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r(\vec{r}, \omega) \cdot \vec{E} = \epsilon_0 [1 + \chi_e(\vec{r}, \omega)] \cdot \vec{E}$

Permittivité du vide :  $\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} \approx \frac{10^{-9} \text{ F/m}}{36\pi} \approx 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$

Induction magnétique [T/m<sup>2</sup>]:  $\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_r(\vec{r}, \omega) \cdot \vec{H} = \mu_0 [1 + \chi_m(\vec{r}, \omega)] \cdot \vec{H}$

Perméabilité du vide :  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$

Densité de courant [A/m<sup>2</sup>]:  $\vec{J} = \sigma(\vec{r}, \omega) \cdot \vec{E}$  [Pour un milieu ohmique]

Conductivité électrique:  $\sigma$  en S/m

## Equations de Maxwell dans un milieu continu

Loi de Gauss:  $\nabla \cdot \vec{D} = \rho \Leftrightarrow \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV$

Absence de monopôles magnétiques:  $\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

**Champ magnétique en A/m** Ampère:  $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Leftrightarrow \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$

**Champ électrique en V/m** de Faraday:  $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$

## Relations de constitution d'un milieu linéaire, local et ohmique

Induction électrique [C/m<sup>2</sup>]:  $\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r(\vec{r}, \omega) \cdot \vec{E} = \epsilon_0 [1 + \chi_e(\vec{r}, \omega)] \cdot \vec{E}$

Permittivité du vide:  $\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} \approx \frac{10^{-9} \text{ F/m}}{36\pi} \approx 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$

Induction magnétique [T/m<sup>2</sup>]:  $\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_r(\vec{r}, \omega) \cdot \vec{H} = \mu_0 [1 + \chi_m(\vec{r}, \omega)] \cdot \vec{H}$

Perméabilité du vide:  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$

Densité de courant [A/m<sup>2</sup>]:  $\vec{J} = \sigma(\vec{r}, \omega) \cdot \vec{E}$  [Pour un milieu ohmique]

Conductivité électrique:  $\sigma$  en S/m

 Compliqué dans le cas général ....

 Simplifications usuelles :

 H1 : Champs périodiques de pulsation  $\omega$ , séparation espace et temps

$$\vec{E} = \mathbb{R} \left( \vec{E}_0(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t} \right) \quad \vec{H} = \mathbb{R} \left( \vec{H}_0(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t} \right)$$

 H2 : Pas de charge, ni courant ( $\rho = J = 0$ )

 H3 : Homogène ( $\epsilon$  et  $\mu$  indépendants de  $r$ )

 H4 : Non dispersif ( $\epsilon$  et  $\mu$  indépendants de  $\omega$ )

$(\Delta + k^2) \vec{E} = \vec{0}$  équation d'onde de Helmholtz

$$\vec{H} = -\frac{j}{k} \nabla \times \vec{E}$$

avec :

$$k = \frac{\omega}{c/\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{norme du vecteur d'onde}$$

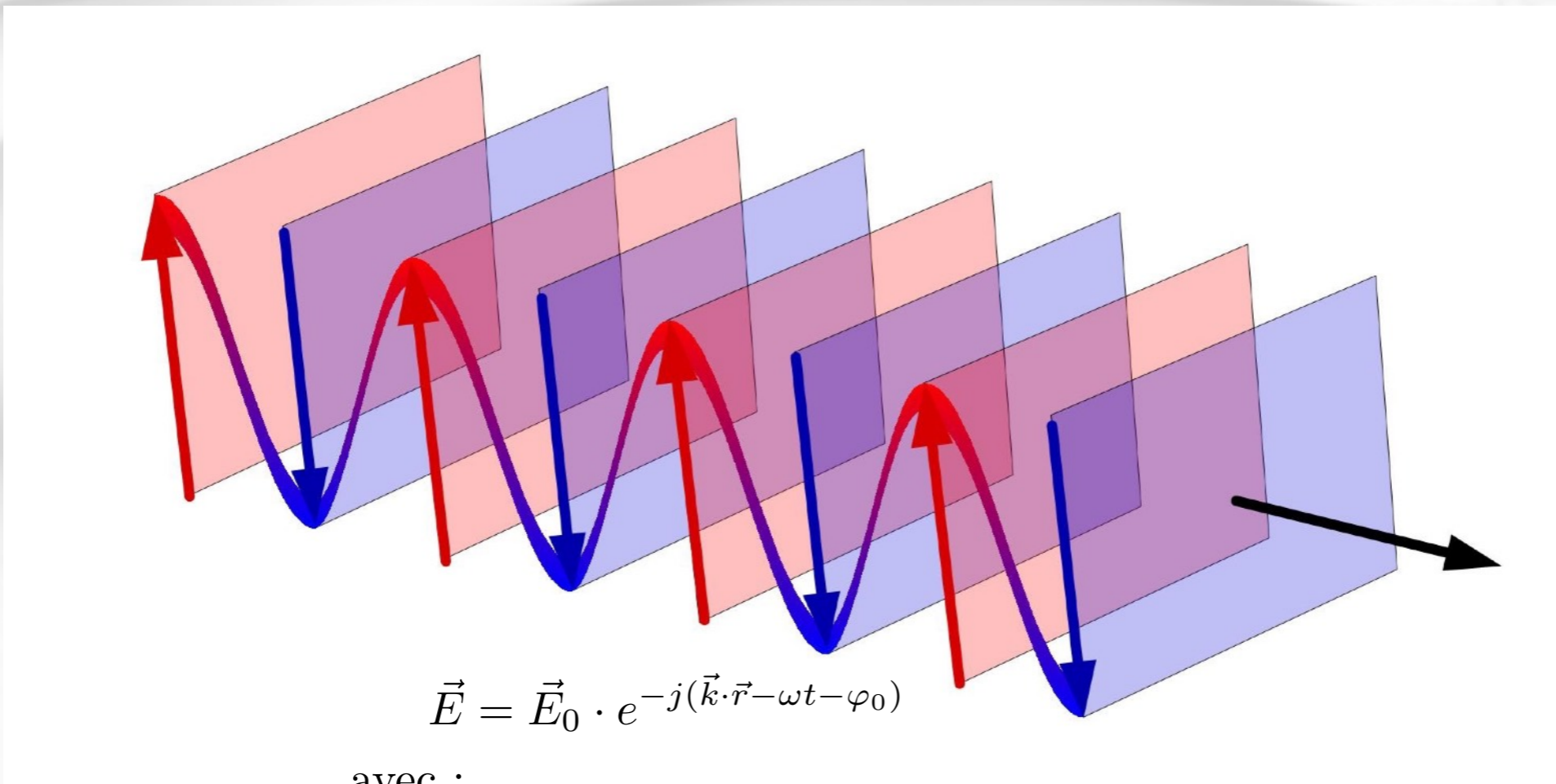
$$\lambda = \frac{c}{n \cdot f} \quad \text{Longueur d'onde}$$

$$n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \quad \text{indice du milieu (peut dépendre de } \omega \text{ et complexe si dispersif)}$$

$$f = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{fréquence de l'onde}$$

## Ondes planes

- Le modèle le plus simple, loin d'une source
- Fronts d'onde (=surfaces d'équiphasse) plane



$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{-j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \varphi_0)}$$

avec :

$\vec{k}$  : vecteur d'onde, direction de propagation

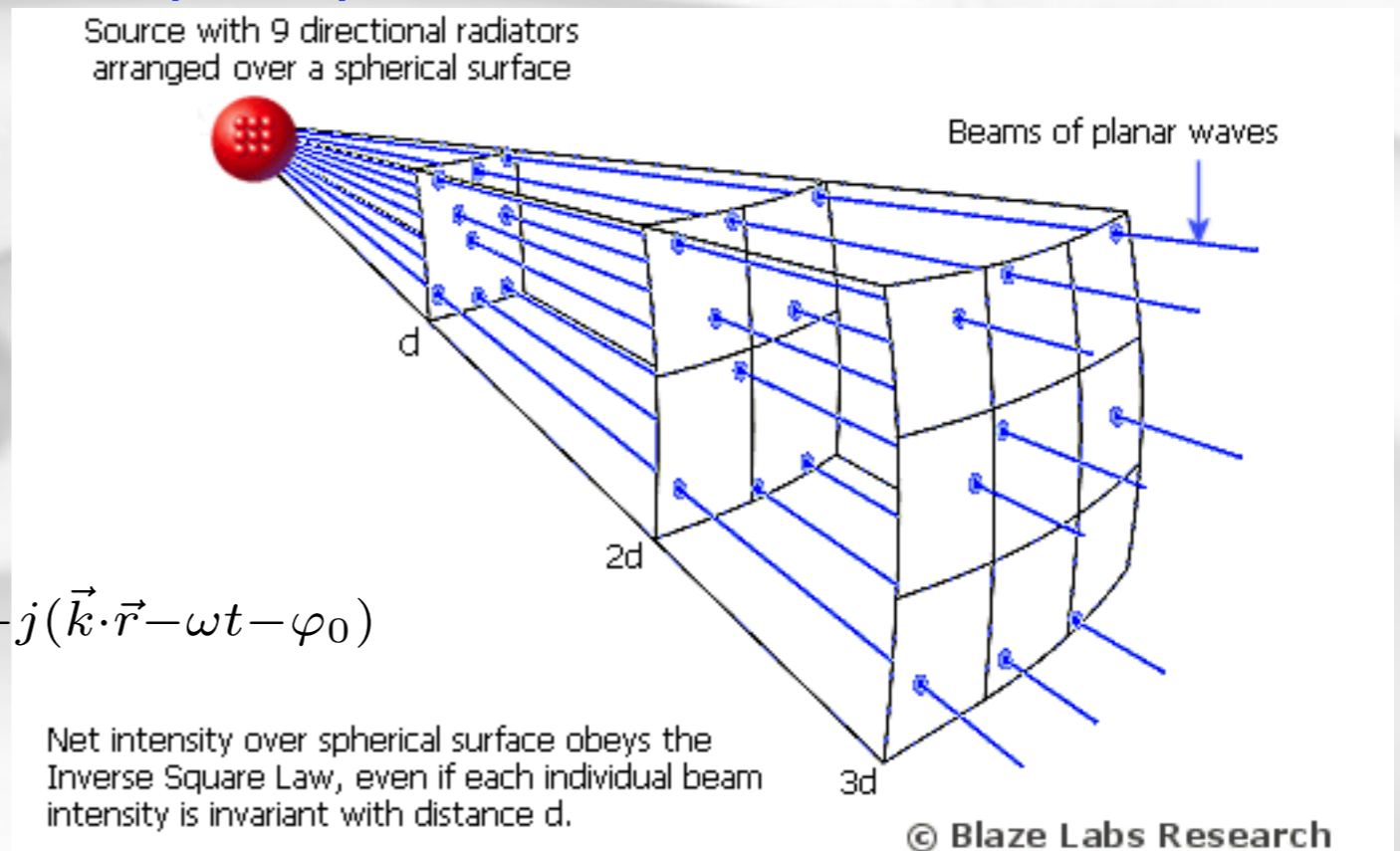
$\Phi(\vec{r}, t) = \omega t + \varphi_0 - \vec{k} \cdot \vec{r}$  : phase de l'onde

$\varphi_0$  : phase à l'origine, dépend de l'origine de  $\vec{r}$  et/ou de  $t$

$\vec{E}_0$  : perpendiculaire à  $\vec{k}$ , indépendant de  $\vec{r}$  et  $t$

## 🌀 Ondes sphériques

- 🌀 Proche (mais pas trop...) de la source
- 🌀 Fronts d'onde (=surfaces d'équiphasse) sphériques



$$\vec{E} = \frac{\vec{A}_0}{r} \cdot e^{-j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \varphi_0)}$$

avec :

$\vec{k}$  : vecteur d'onde, direction de propagation




$\Phi(\vec{r}, t) = \omega t + \varphi_0 - \vec{k} \cdot \vec{r}$  : phase de l'onde

$\varphi_0$  : phase à l'origine, dépend de l'origine de t

$\vec{A}_0$  : perpendiculaire à  $\vec{k}$ , indépendant de  $\vec{r}$  et t



## Faisceau laser : du plan à la sphère

-  Laser : faisceau cohérent (continuité de phase) solution de l'équation d'onde *paraxiale*, i.e. l'angle entre  $\mathbf{k}$  (vecteur d'onde, perpendiculaire aux fronts d'onde) et la direction de propagation est petit
-  Variation au premier ordre de l'onde plane
-  Si propagation suivant  $\mathbf{z}$  :

$$\vec{E} = u(x, y, z) \cdot e^{-j(kz - \omega t)} \vec{n}$$

avec :










$k$  : norme du vecteur d'onde

$\vec{n}$  : vecteur constant, perp. à  $\vec{z}$

$u(x, y, z) \in \mathbb{C}$  une solution de :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2jk \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

## Faisceau laser : du plan à la sphère

-  Le champ électrique produit par un faisceau laser est décrit par une superposition des solutions possibles de cette équation
-  On parle de modes de Hermite-Gauss (en coordonnées cartésiennes) ou de Laguerre-Gauss (en coordonnées cylindriques) d'ordres  $m, n$
-  On parle aussi de mode  $TEM_{mn}$  (TEM = Transverse ElectroMagnétique)
-  Le mode fondamental ( $TEM_{00}$ ) est de profil d'amplitude gaussien
-  Sauf exception, le mode  $TEM_{00}$  est dominant et privilégié
-  La présence de modes d'ordres supérieurs impacts (perturbe) :
  -  Le profil d'intensité
  -  Le front d'onde
  -  La phase

 Faisceau laser : du plan à la sphère

 Hermite-Gauss ( $l, m \geq 0$ ):

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \quad : \text{ rayon}$$

$$u_{l,m}(x, y, z) = u_0 \frac{w_0}{w(z)} H_l \left( \frac{\sqrt{2} x}{w(z)} \right) H_m \left( \frac{\sqrt{2} y}{w(z)} \right) \exp \left( -\frac{\rho^2}{w^2(z)} \right) \exp \left( -j \frac{k \rho^2}{2R(z)} \right) \exp(j\psi(z))$$

$H_n(X)$  : Polynôme d'Hermite d'ordre  $n$  ( $H_0 = 1$ )

 Laguerre-Gauss

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \quad : \text{ rayon}$$

$$\phi = \arctan \left( \frac{y}{x} \right) \quad : \text{ azimuth}$$

$$u(\rho, \phi, z) = \sqrt{\frac{2p!}{\pi(p+l)!}} \frac{1}{w(z)} \left( \frac{\rho\sqrt{2}}{w(z)} \right)^l \exp \left( -\frac{\rho^2}{w^2(z)} \right) L_p^l \left( \frac{2\rho^2}{w^2(z)} \right) \\ \times \exp \left( -jk \frac{\rho^2}{2R(z)} \right) \exp(-jl\phi) \exp(j\psi(z))$$

$L_p^l(X)$  : Polynôme de Laguerre,  $p \geq 0$  (indice radial),  $l \geq 0$  (indice azimutal)

## Paramètres libres du faisceau

 Taille radiale minimale (waist) :  $w_0$

 Position du waist minimal :  $z_0 : z \leftarrow z - z_0$

## Quelques caractéristiques des faisceaux lasers

 Distance caractéristique de propagation = longueur de Rayleigh

$$Z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

## Taille transverse (waist) du faisceau

$$w^2(z) = w_0^2 \left( 1 + \left( \frac{z}{Z_R} \right)^2 \right)$$

$z \ll Z_R : w(z) \approx w_0 \rightarrow$  Taille constante

$z \gg Z_R : w(z) \approx \frac{\lambda}{\pi w_0} z \sim$  Divergence par une ouverture de rayon  $w_0$  en  $z = 0$

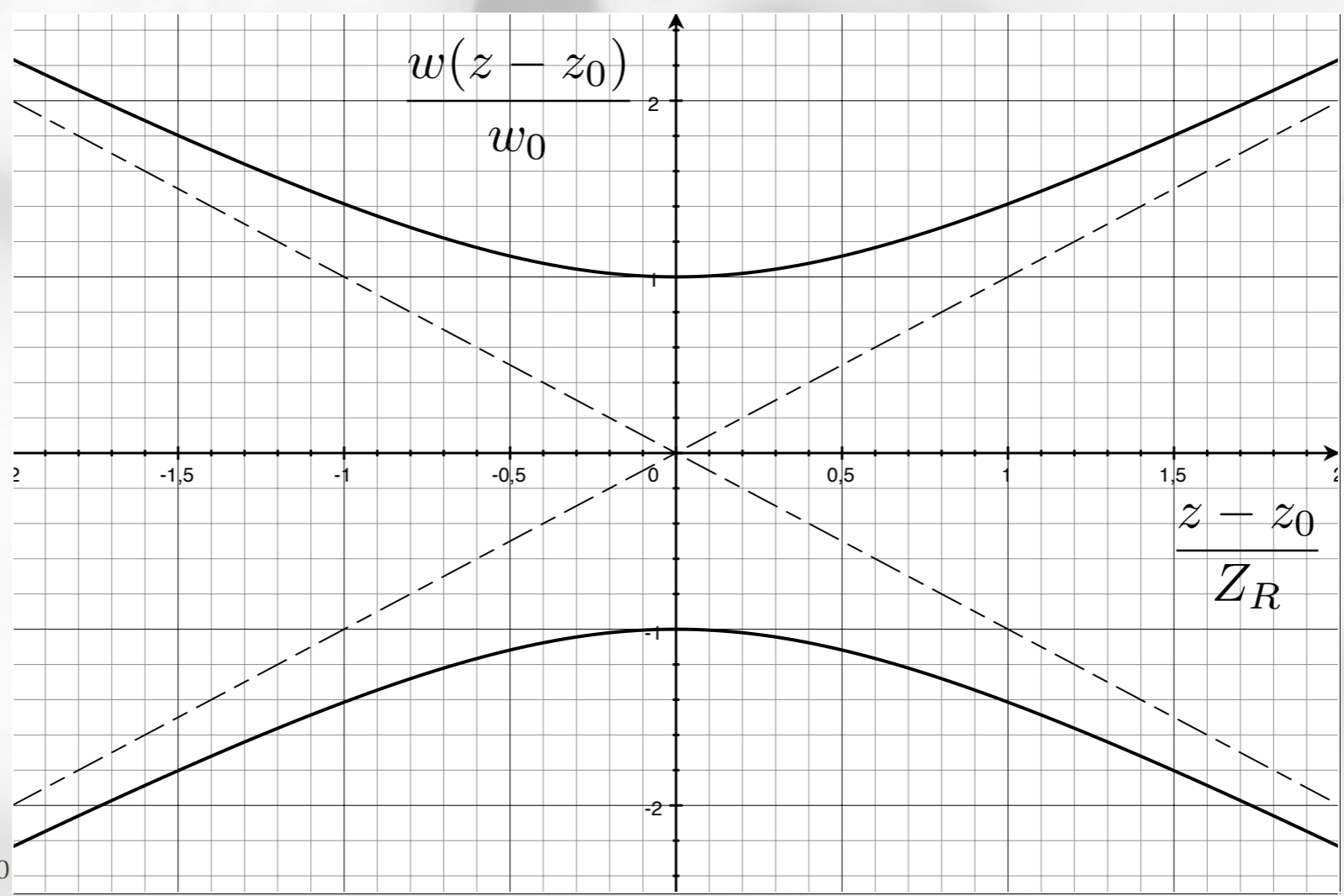
## Quelques caractéristiques des faisceaux lasers

### Taille transverse (waist) du faisceau

$$w^2(z) = w_0^2 \left( 1 + \left( \frac{z}{Z_R} \right)^2 \right)$$

$z \ll Z_R$  :  $w(z) \approx w_0 \rightarrow$  Taille constante

$z \gg Z_R$  :  $w(z) \approx \frac{\lambda}{\pi w_0} z \sim$  Divergence par une ouverture de rayon  $w_0$  en  $z = 0$



## Quelques caractéristiques des faisceaux lasers

### Rayon de courbure du front d'onde

$$R(z) = z \left( 1 + \left( \frac{Z_R}{z} \right)^2 \right)$$

$z \ll Z_R$  :  $R(z) \approx +\infty$  → Onde plane (champ proche)

$z \gg Z_R$  :  $R(z) \approx z$  → Onde sphérique (champ lointain)

### Phase de Gouy : terme de phase additionnel à $\omega t - kz - \varphi_0$ :

#### Dépend du mode de propagation

$$\psi(z) = (N + 1) \arctan \frac{z}{Z_R}$$

$N = m + l$  Modes d'Hermite-Gauss

$= 2l + p$  Modes de Laguerre-Gauss

$$z \ll Z_R : \psi(z) \approx (N + 1) \frac{z}{Z_R}$$

$$z \gg Z_R : \psi(z) \approx (N + 1) \frac{\pi}{2}$$

## Eclairement et puissance

**E** et **H** sont orthogonaux

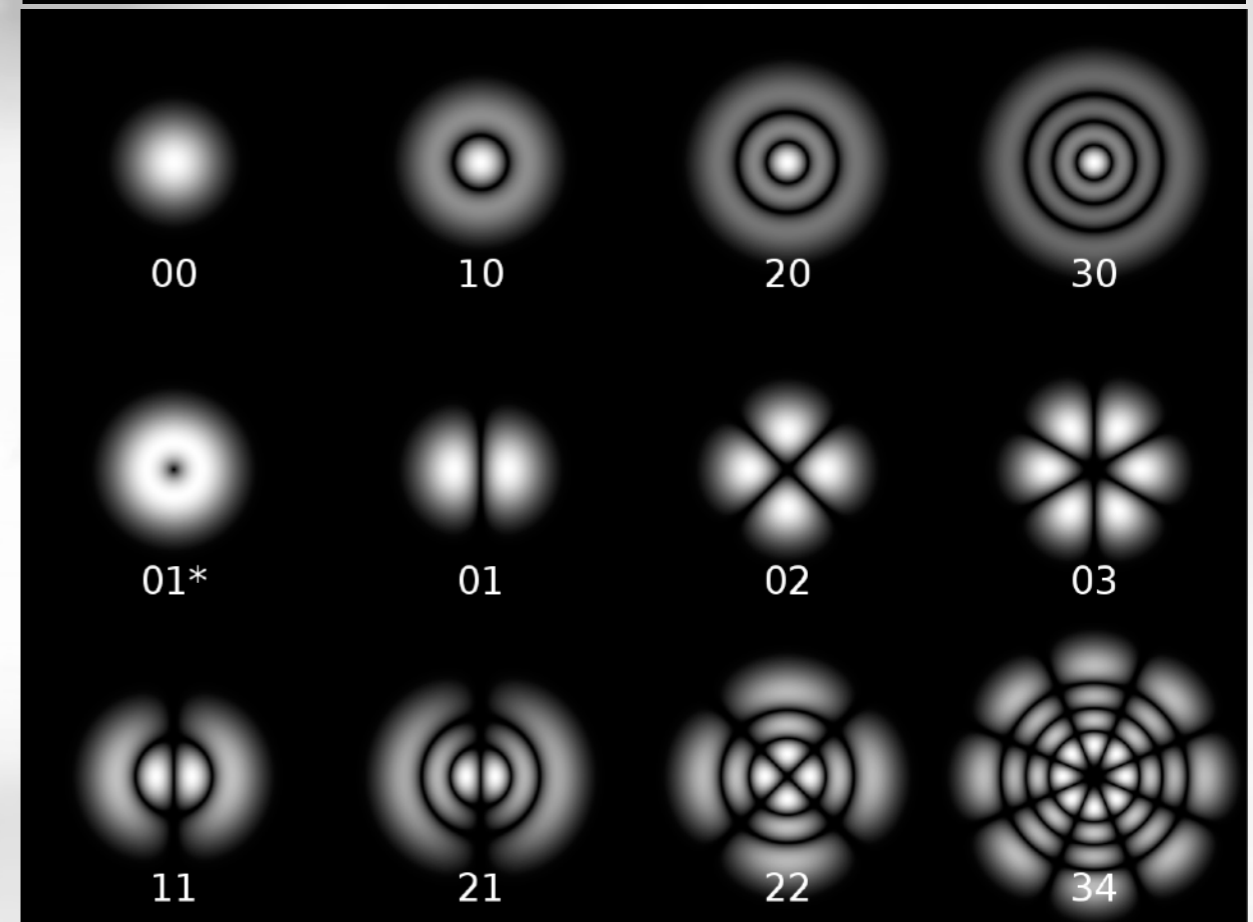
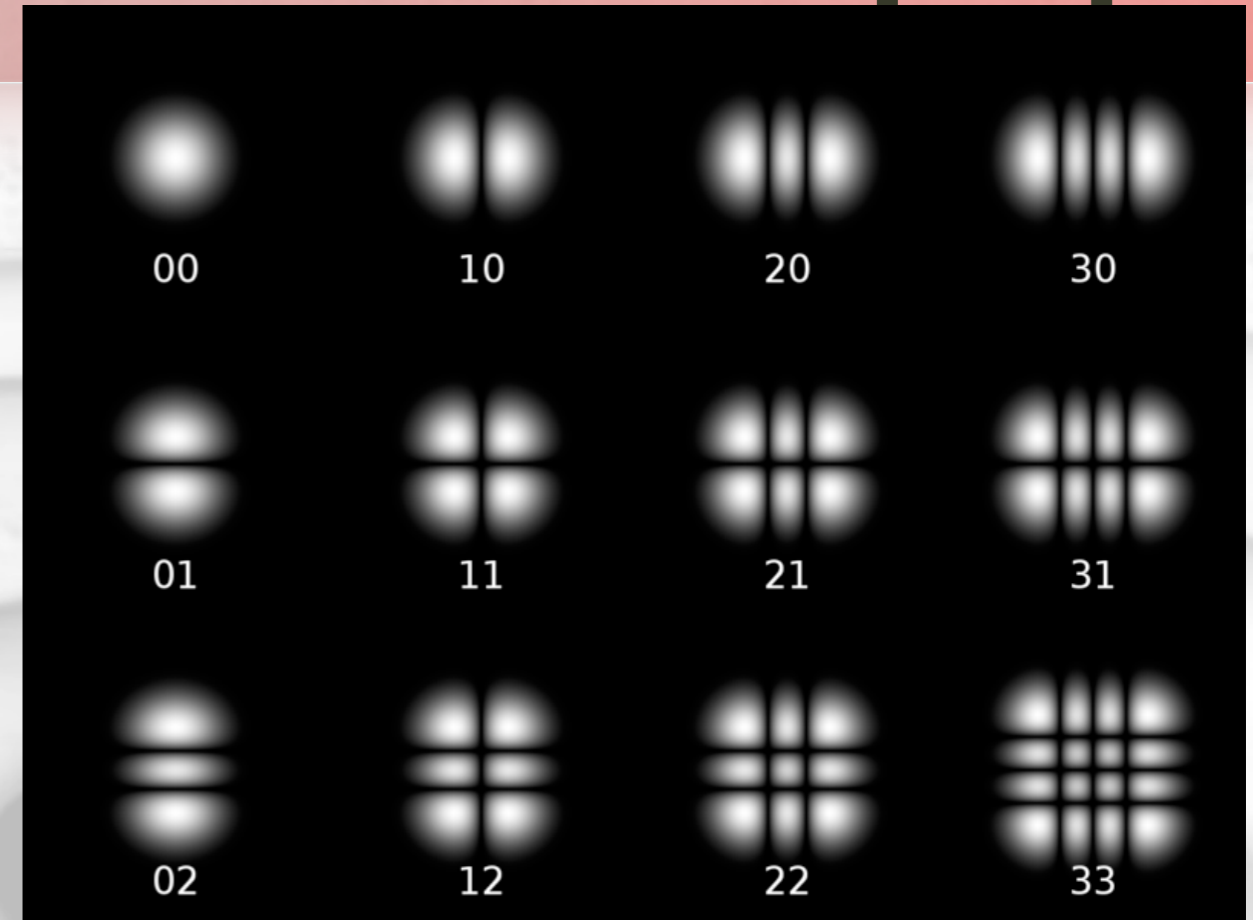
Eclairement (hyp:  $n=1$ )

$$I = \frac{\|\vec{E}\|^2}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} = \frac{\|\vec{E}\|^2}{2\mu_0 c} = \frac{\|\vec{E}\|^2}{2Z_0} \text{ W/m}^2$$

avec  $Z_0 = \mu_0 c \approx 120\pi \approx 377 \Omega$  Impédance du vide

## Puissance optique

$$P = \iint I dx dy \quad \text{W}$$



## Modes de Hermite-Gauss

$$I_{lm}(x, y, z) = \frac{I_0}{1 + \left(\frac{z}{Z_R}\right)^2} H_l^2\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) H_m^2\left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)}\right) \exp\left(-\frac{2\rho^2}{w^2(z)}\right)$$

## Mode fondamental (TEM<sub>00</sub>)

$$I_{00}(x, y, z) = \frac{I_0}{1 + \left(\frac{z}{Z_R}\right)^2} \exp\left(-\frac{2\rho^2}{w^2(z)}\right)$$

Intensité  
sur l'axe

Décroissance  
gaussienne  
transverse

## Profil Gaussien de largeur à mi-hauteur :

$$FWHM(z) = \sqrt{2 \ln 2} \cdot w(z) \approx 1,2 \cdot w(z)$$

## Puissance optique dans un rayon $\rho$ :

$$P(\rho) = \frac{I_0}{2} \pi w_0^2 \left(1 - e^{-\frac{2\rho^2}{w^2(z)}}\right) \underset{\rho \ll w(z)}{\sim} \frac{I_0}{1 + \left(\frac{z}{Z_R}\right)^2} \pi \rho^2$$

$$\underset{\rho \gg w(z)}{\sim} \frac{I_0}{2} \pi w_0^2$$

$\rho/w$	$I/I_{\max}$	$P/P_{\max}$
$\sqrt{(\ln(2)/2)} \sim 0,6$	50 %	50 %
1	14 %	86 %
2	$3,4 \cdot 10^{-2}$ %	99,97 %
2,5	3,7 ppm	99,9996 %



## Taille transverse (waist) du faisceau - Application à LISA

$\lambda = 1064 \text{ nm}$

Banc optique :

$w_0 \sim 1,1 \text{ mm}$

$\Rightarrow Z_R = 3.6 \text{ m}$

$\Rightarrow$  Le faisceau est de taille  $\sim$  constante sur le banc optique

Inter-satellite :

$w_0 \sim 10 \text{ cm}$

$\Rightarrow Z_R = 30 \text{ km}$

$\Rightarrow$  Vu du satellite distant, le faisceau diverge depuis une source ponctuelle

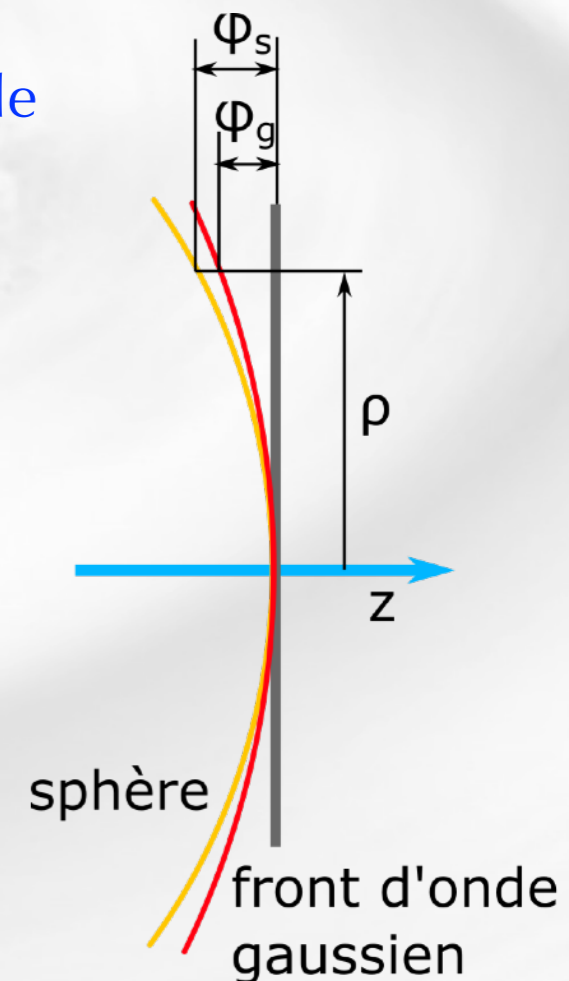
$\Rightarrow w(z=2.5 \text{ Mkm}) \sim 8.5 \text{ km}$  , i.e. champ de vue (FWHM)  $\sim 4 \mu\text{rad}$  (0,8 seconde d'arc)

## Erreur de sphéricité : quel dépointage admissible ?

$$\delta l_{sph} = \frac{\delta \phi_{sph}}{k} = \frac{\rho^2}{2z} - \frac{\rho^2}{2R(z)}$$

$$\approx \frac{\theta^2}{2} \frac{Z_R^2}{z} \quad \text{avec } \theta = \rho/z, \text{ dépointage}$$

$$\delta l_{sph} < 1 \text{ pm} \Leftrightarrow \theta < 2.4 \mu\text{rad}$$



🚀 Puissance reçue à 2.5 Mkm

🚀  $P(\rho = 15 \text{ cm}) \sim 600 \times 10^{-12} P_{\text{tot}} \sim 600 \text{ pW}$

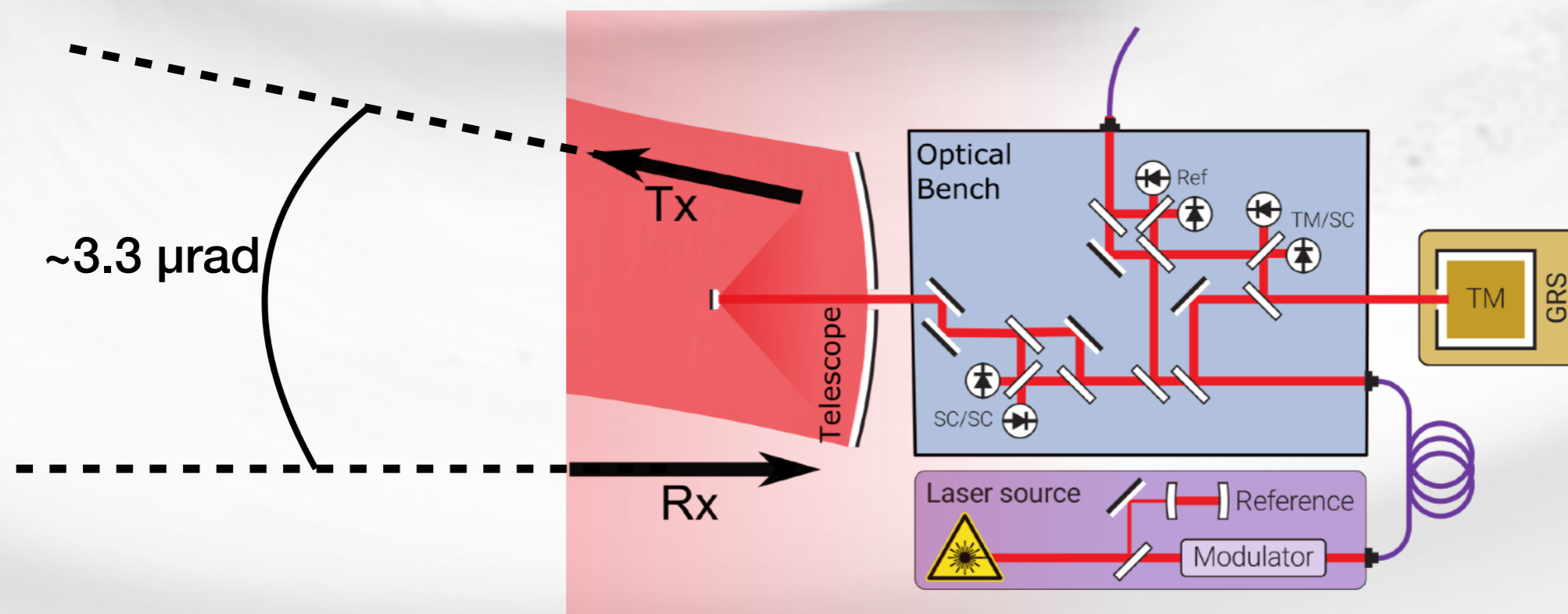
🚀 Point ahead ?

🚀 Rotation de la constellation sur elle-même en 1 an  $\Rightarrow \sim 0.2 \mu\text{rad/s}$

🚀 Sur un temps de parcours AR :  $T=2 * 2.5 \text{ Mkm} / c \sim 16,7 \text{ s} : \sim 3.3 \mu\text{rad}$

🚀 Perte de puissance :  $P_{\text{rec}}(\rho/z = 3.3 \mu\text{rad}) \sim 0.15 P_{\text{rec}}(\rho=0)$

🚀  $\Rightarrow$  besoin d'un PAAM ...



## Polarisation

Toute onde TEM se décompose en 2 polarisations orthogonales

Polarisation linéaires

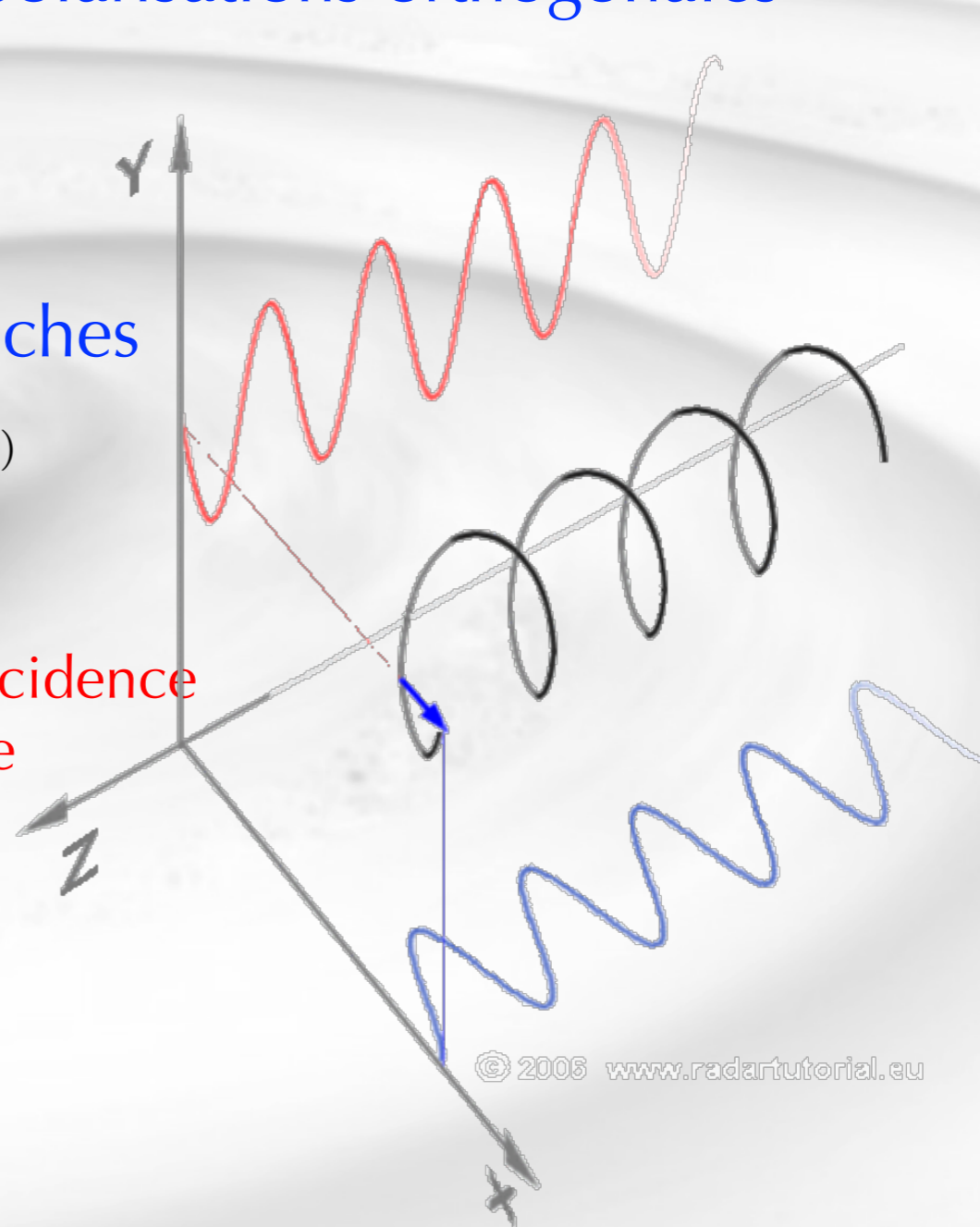
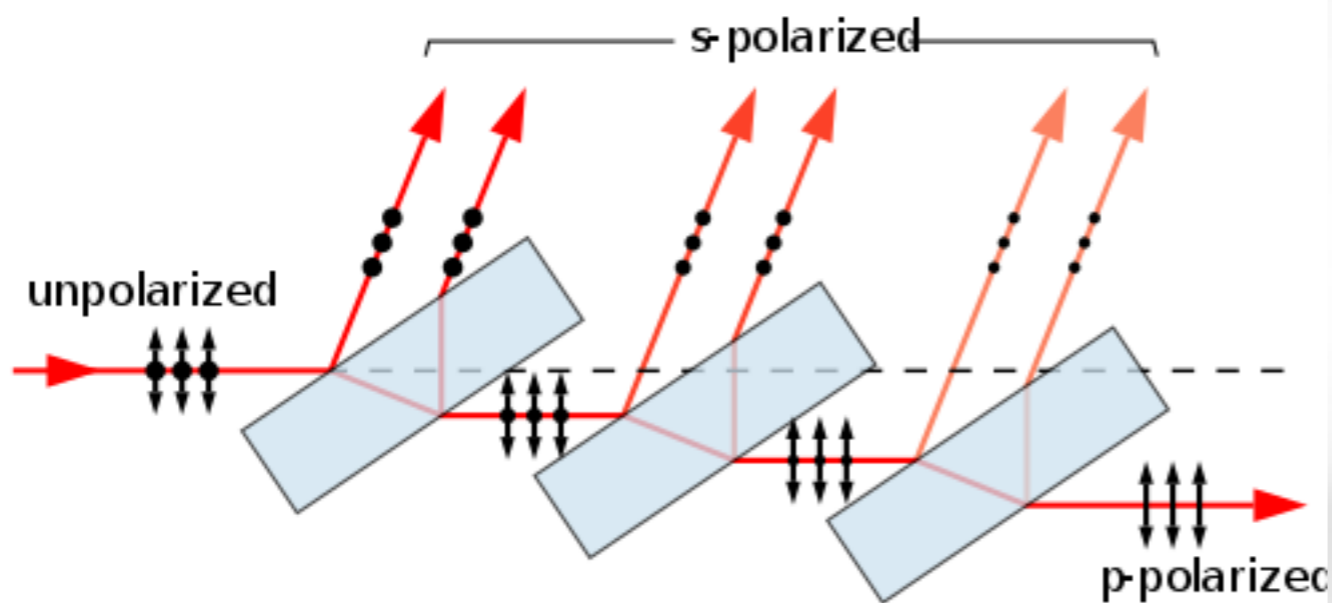
$$\vec{E} = [E_x \cdot \vec{x} + E_y e^{j\phi_y} \cdot \vec{y}] e^{-j(kz - \omega t)}$$

Polarisation circulaires droites et gauches

$$\vec{E} = [E_d \cdot (\vec{x} + j\vec{y}) + E_g e^{j\phi_g} \cdot (\vec{x} - j\vec{y})] e^{-j(kz - \omega t)}$$

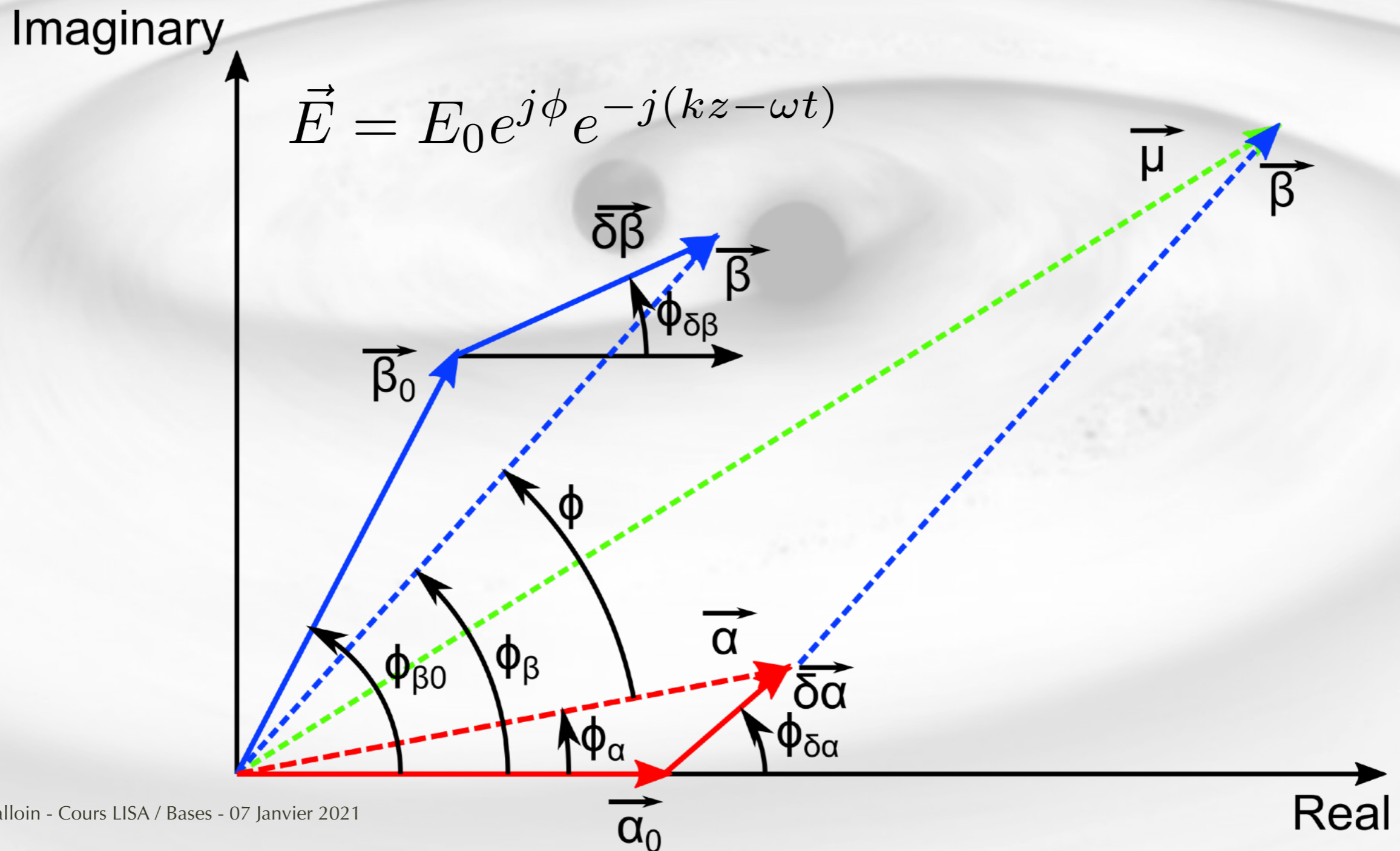
Axes adaptées à un système optique:

- Polarisation p (parallel): dans le plan d'incidence
- Polarisation s (senkrecht): perpendiculaire



© 2006 www.radar tutorial.eu

- Représentation graphique des champs électriques
- Rq : la pulsation hétérodyne est soustraite (rotation d'un faisceau par rapport à l'autre à la fréquence  $f_{het}$ )



 Les interférences proviennent de la superposition des champs EM à la surface du détecteur

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = u_1(\vec{r})e^{-j\psi_1(\vec{r})}e^{-j(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t)}\vec{n}_1$$

$$\vec{E}_2(\vec{r}) = u_2(\vec{r})e^{-j\psi_2(\vec{r})}e^{-j(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega_2 t)}\vec{n}_2$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r})$$

$$\Rightarrow I(\vec{r}) \propto \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{E}^*(\vec{r})$$

$$\begin{aligned} &\propto u_1^2(\vec{r}) + u_2^2(\vec{r}) + 2u_1(\vec{r}) \cdot u_2(\vec{r}) \cos \left[ \left( \vec{k}_2 - \vec{k}_1 \right) \cdot \vec{r} - (\omega_2 - \omega_1)t + (\psi_2(\vec{r}) - \psi_1(\vec{r})) \right] \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 \\ &= \underbrace{I_1(\vec{r}) + I_2(\vec{r})}_{\text{Valeur Continue ('moyenne')}} + \underbrace{2\sqrt{I_1(\vec{r}) \cdot I_2(\vec{r})} \cos \left[ \left( \vec{k}_2 - \vec{k}_1 \right) \cdot \vec{r} - (\omega_2 - \omega_1)t + (\psi_2(\vec{r}) - \psi_1(\vec{r})) \right]}_{\text{Valeur oscillatoire}} \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 \end{aligned}$$

$$0 \leq I_1(\vec{r}) + I_2(\vec{r}) - 2\sqrt{I_1(\vec{r}) \cdot I_2(\vec{r})} \leq I(\vec{r}) \leq I_1(\vec{r}) + I_2(\vec{r}) + 2\sqrt{I_1(\vec{r}) \cdot I_2(\vec{r})} \leq 2(I_1(\vec{r}) + I_2(\vec{r}))$$

## Puissance optique sur le détecteur

 Moyenne temporelle liée à la bande passante du détecteur


$$P_{det} = \left\langle \iint_{S_{det}} I(\vec{r}) dS \right\rangle_t$$

 Destruction de la cohérence de l'interférence si :

 Les 2 faisceaux n'ont pas des fréquences optiques identiques ou très proches


$$\|\omega_2 - \omega_1\| > 2\pi \times BW$$

 Les différences de chemin optiques entre 2 points de la surface du détecteur sont 'grandes'


 Les directions de polarisation sont aléatoires entre 2 points de la surface (dépolariation)

 Les directions de polarisation sont orthogonales



# Homodyne vs. hétérodyne

-  Simplifications : ondes planes (mêmes distributions d'amplitude),  $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_1$ , mêmes polarisations




$$I(\vec{r}) = 2I_0 \cdot \left( 1 + \cos(\vec{k} \cdot \delta\vec{r} - \delta\omega \cdot t) \right)$$

-  Interférence **homodyne** : les 2 faisceaux qui interfèrent ont des fréquences identiques ( $\delta\omega = 0$ )


-  **Avantages :**

-  Facilité de mise en oeuvre (une seule source laser)
-  Possibilité de stabilisation autour d'un point de phase (et donc d'éclairement) constante


-  **Inconvénients :**

-  Ne convient pas à des mesures avec Doppler (dérive de  $\delta\omega$ )
-  Signal linéaire uniquement autour de  $\delta r = \frac{\lambda}{4} \left[ \frac{\lambda}{2} \right]$
-  Sensible aux fluctuations de puissance du laser ( $I_0$ ) dans la bande passante de mesure


# Homodyne vs. hétérodyne

-  Simplifications : ondes planes (mêmes distributions d'amplitude),  $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_1$ , mêmes polarisations

$$I(\vec{r}) = 2I_0 \cdot \left( 1 + \cos(\vec{k} \cdot \delta\vec{r} - \delta\omega \cdot t) \right)$$

-  Interférence **hétérodyne** : les 2 faisceaux qui interfèrent ont des fréquences légèrement différentes ( $\delta\omega/(2\pi) \sim 1 \text{ kHz} - 10 \text{ MHz}$ )

 => signal sinusoïdal à la fréquence  $\delta\omega/(2\pi)$ , perturbé par le bruit de phase


 Principe de la mesure : mesurer les fluctuations de phase par rapport à une oscillation 'pure' à la fréquence  $\delta\omega/(2\pi)$

 Techniques : démodulation synchrone, FFT, PLL, ...

 Bande passante des fluctuations mesurables  $\ll \delta\omega/(2\pi)$






# Homodyne vs. hétérodyne

-  Simplifications : ondes planes (mêmes distributions d'amplitude),  $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_1$ , mêmes polarisations




$$I(\vec{r}) = 2I_0 \cdot \left( 1 + \cos(\vec{k} \cdot \delta\vec{r} - \delta\omega \cdot t) \right)$$

-  Interférence **hétérodyne** : les 2 faisceaux qui interfèrent ont des fréquences légèrement différentes ( $\delta\omega/(2\pi) \sim 1 \text{ kHz} - 10 \text{ MHz}$ )

## Avantages :

-  Peut suivre le Doppler et le bruit de phase simultanément (distinction en fonction de la vitesse d'évolution)
-  Incrémentation de phase, signal linéaire sur une plage virtuellement infinie (limitée par la taille mémoire -> dilemme résolution/dynamique)
-  Sensible aux fluctuations de puissance à la fréquence porteuse  $\delta\omega/(2\pi)$  (pas en DC)

## Inconvénients :

-  Nécessite la connaissance / suivi / génération non bruitée de  $\delta\omega$
-  Pas d'éclairement constant
-  Incompatible avec les cavités résonantes (type Fabry-Perot, fréquence optique déterminée)

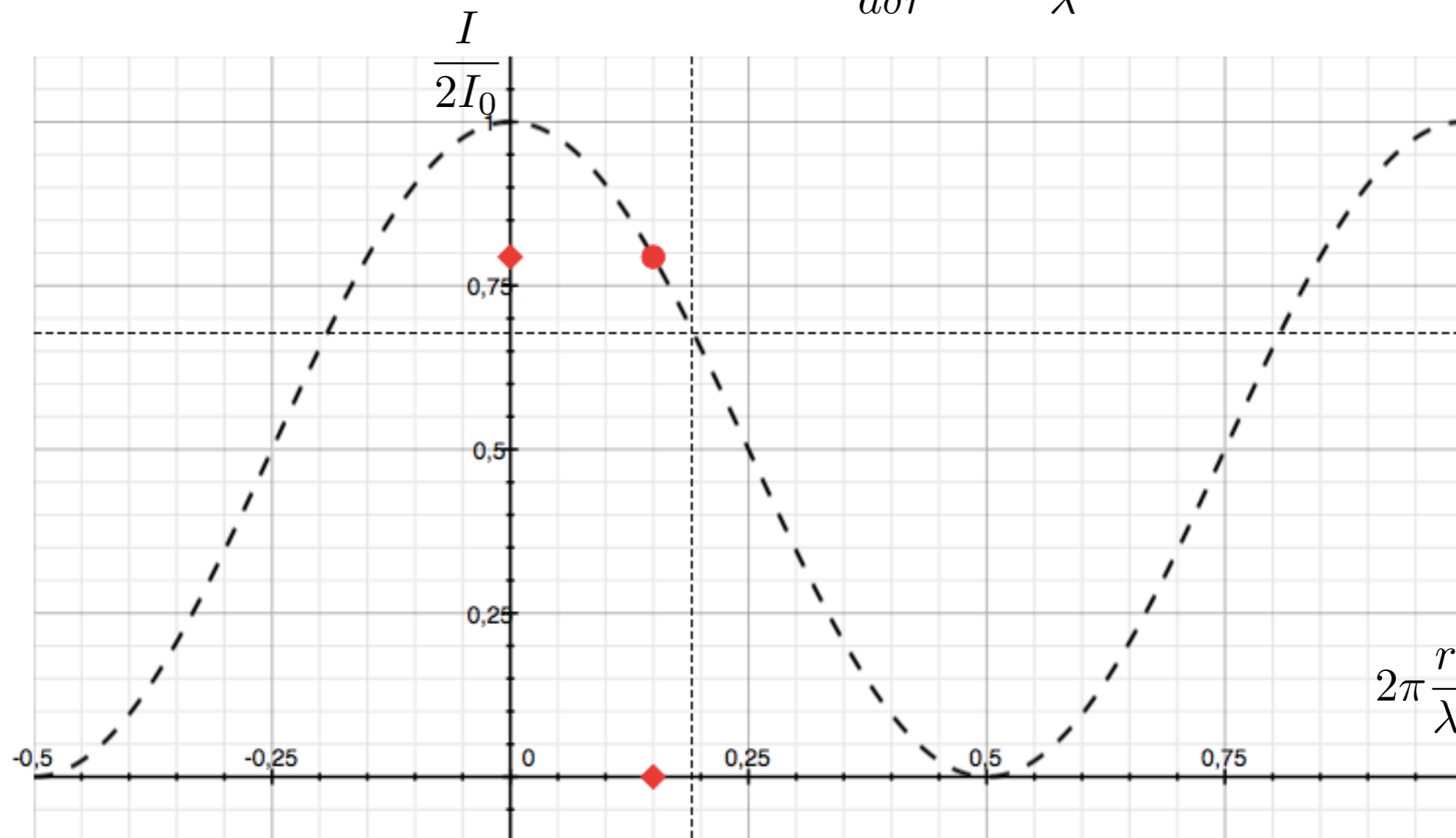
Homodyne : fluctuation de chemin optique autour de la mi-frange noire (réponse linéaire) :  $I_1=I_2$ ,  $\varphi=\pi/2 \Leftrightarrow \delta r=\lambda/4$

Réponse localement linéaire :

Sensible aux fluctuations de  $I_0$ .

$$I(\delta r) = 2I_0 \cdot \left( 1 - \sin \left( 2\pi \frac{\delta r}{\lambda} \right) \right)$$

$$\frac{dI}{d\delta r} = -\frac{4\pi}{\lambda} I_0$$



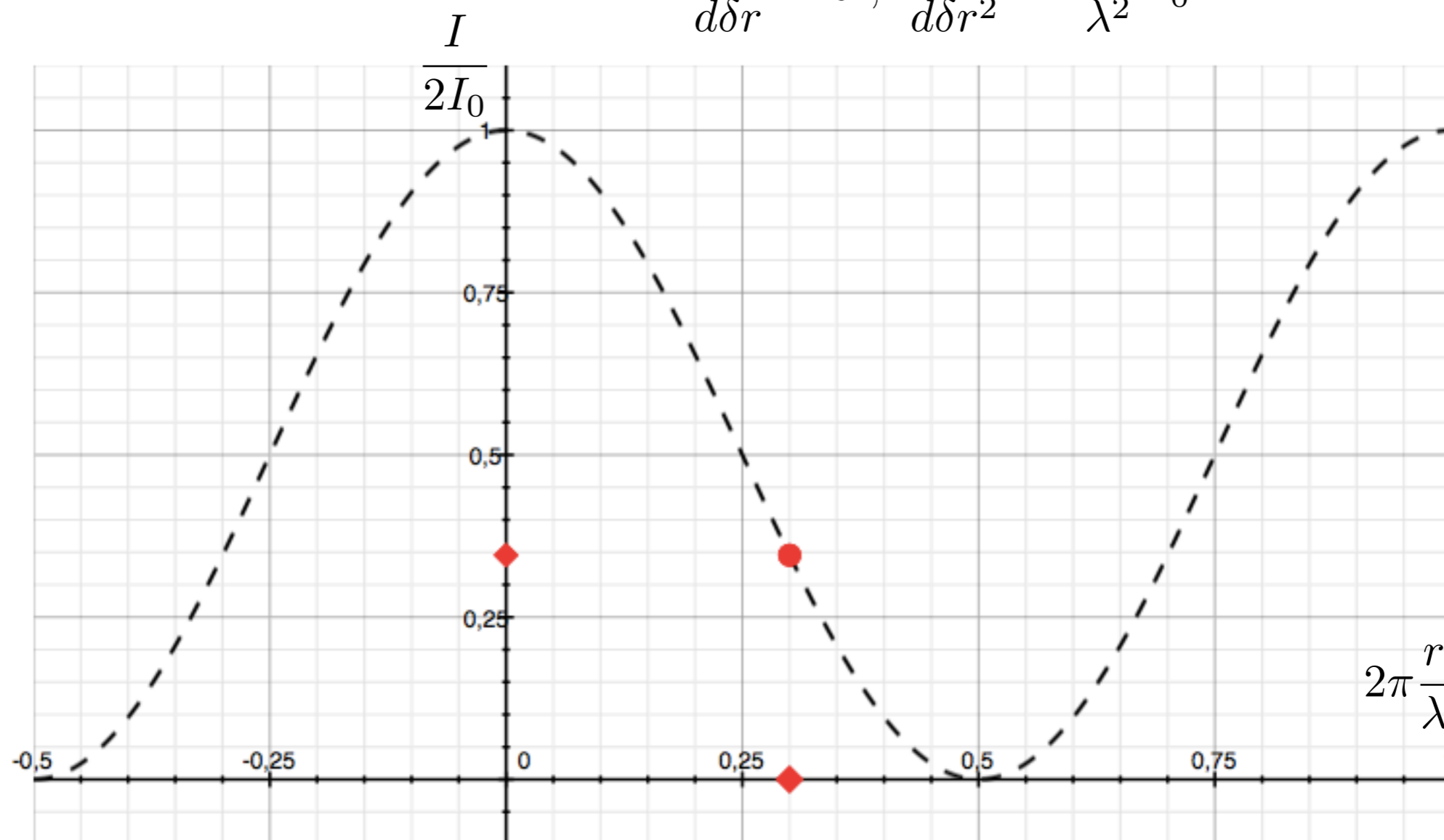
Homodyne : fluctuation de chemin optique autour de la frange noire (minimum de bruit) :  $I_1=I_2$ ,  $\varphi=\pi \Leftrightarrow \delta r=\lambda/2$


Pas de réponse linéaire

Nécessite une modulation

$$I(\delta r) = 2I_0 \cdot \left( 1 - \cos \left( 2\pi \frac{\delta r}{\lambda} \right) \right)$$

$$\frac{dI}{d\delta r} = 0 ; \quad \frac{d^2 I}{d\delta r^2} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} I_0$$



 Hétérodyne : fluctuation de chemin optique lente devant la fréquence hétérodyne ( $I_1=I_2$ )

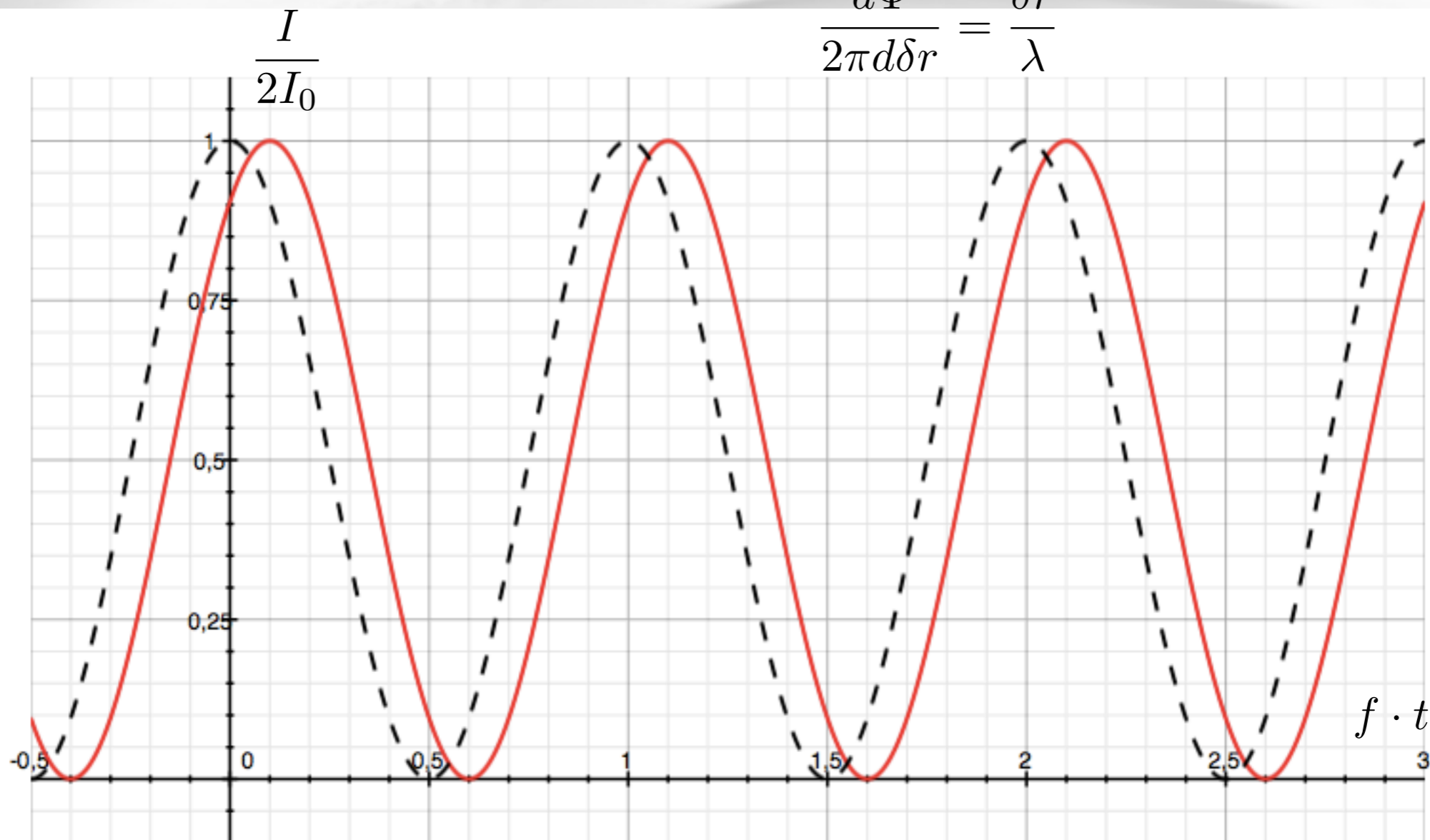
 Phase linéaire avec le signal

 Nécessite une démodulation à la fréquence  $f$

$$I(\delta r) = 2I_0 \cdot [1 + \cos \Phi(t)]$$

$$\Phi(t) = 2\pi \left( f \cdot t + \frac{\delta r}{\lambda} \right)$$

$$\frac{d\Phi}{2\pi d\delta r} = \frac{\delta r}{\lambda}$$





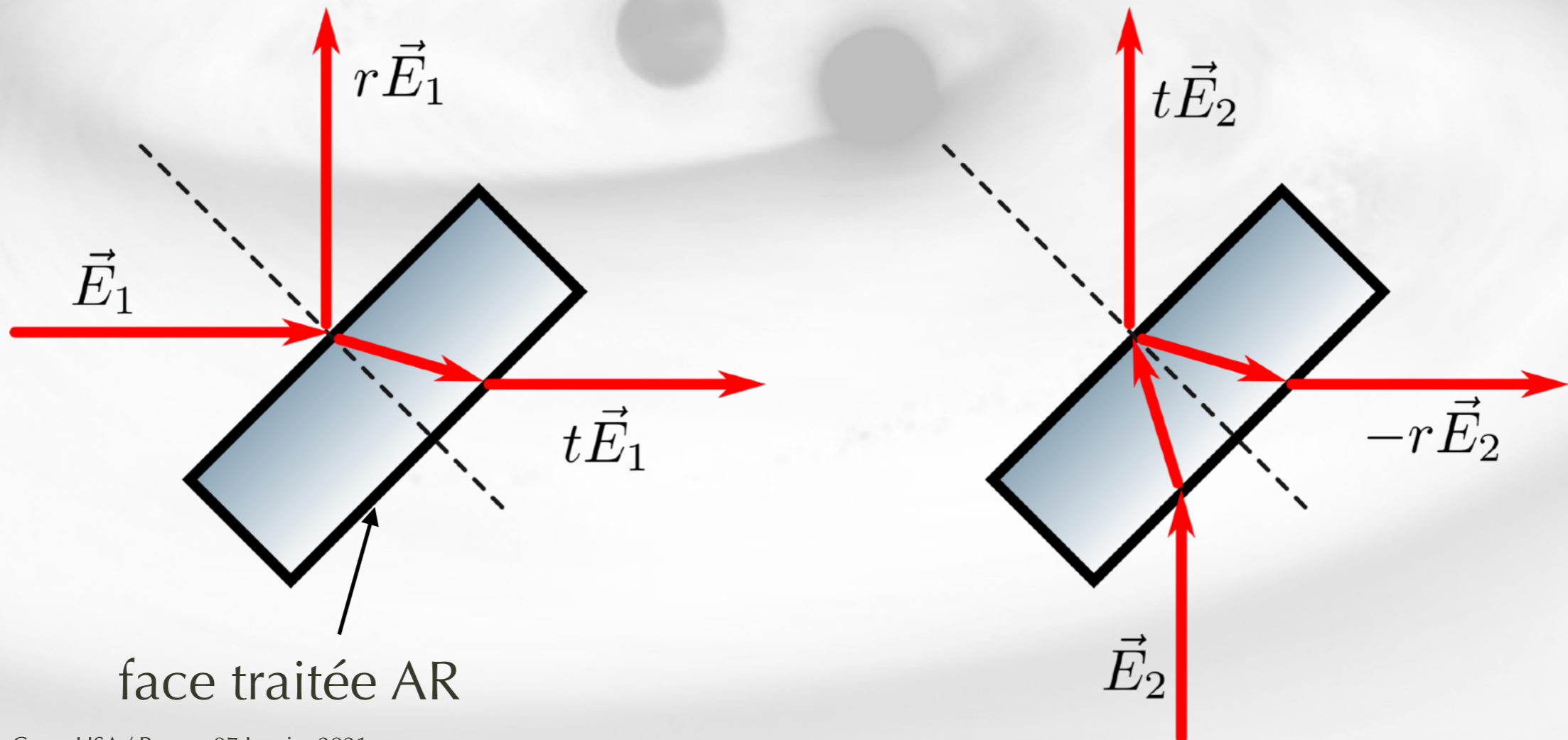
LISA France

# Quelques composants optiques

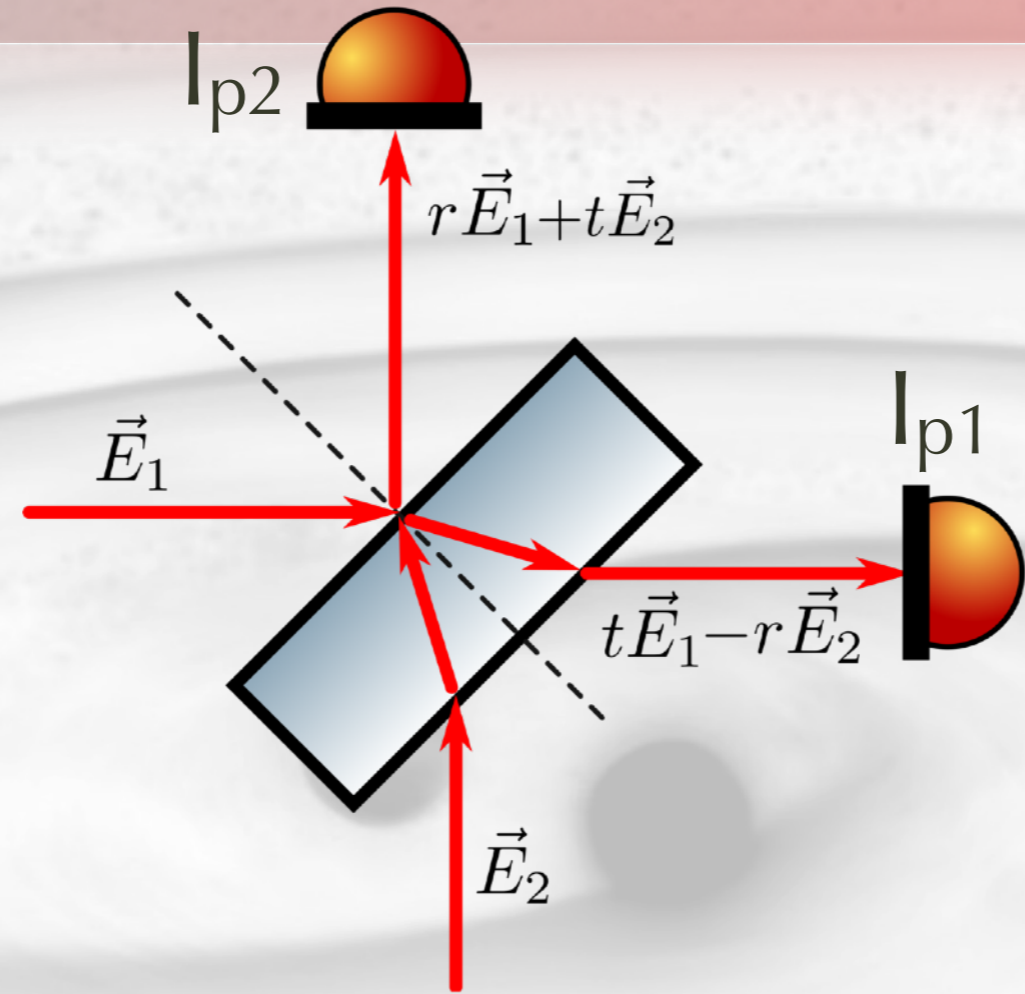
# Séparer les faisceaux

🌀 L'élément principal d'un interféromètre ...

- 🌀 Sépare en combine des faisceaux
- 🌀 En l'absence de pertes  $r^2 + t^2 = 1$
- 🌀 Séparateur non polarisant :  $r$  et  $t$  indépendant de la polarisation
- 🌀 Polarisant :  $r$  et  $t$  dépend de la polarisation, généralement transmet  $p$ , réfléchi  $s$



# Détection sur une photodiode



En supposant une superposition parfaite des faisceaux et une différence de chemin optique  $\delta r$  :

$$I_{p1} = t^2 I_1 + r^2 I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} r t \cos\left(2\pi \frac{\delta r}{\lambda}\right)$$

$$I_{p2} = r^2 I_1 + t^2 I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} r t \cos\left(2\pi \frac{\delta r}{\lambda}\right)$$

=> en l'absence de pertes ( $r^2+t^2=1$ ), la puissance totale est bien conservée ( $I_{p1}+I_{p2}= I_1+I_2$ )

# Détection équilibrée

🌀 Pour  $r^2 = t^2 = 0,5$  (inclus la calibration des PD), on parle de détection équilibrée (balanced detection)

🌀 **Avantage : insensible au premier ordre aux fluctuations de puissance d'un des faisceaux**

$$I_{p2} - I_{p1} = \sqrt{I_1 I_2} \cos\left(2\pi \frac{\delta r}{\lambda}\right)$$

Dans le domaine linéaire :

$$2\pi \frac{\delta r}{\lambda} = \frac{\pi}{2} + \alpha ; \alpha \ll 1$$

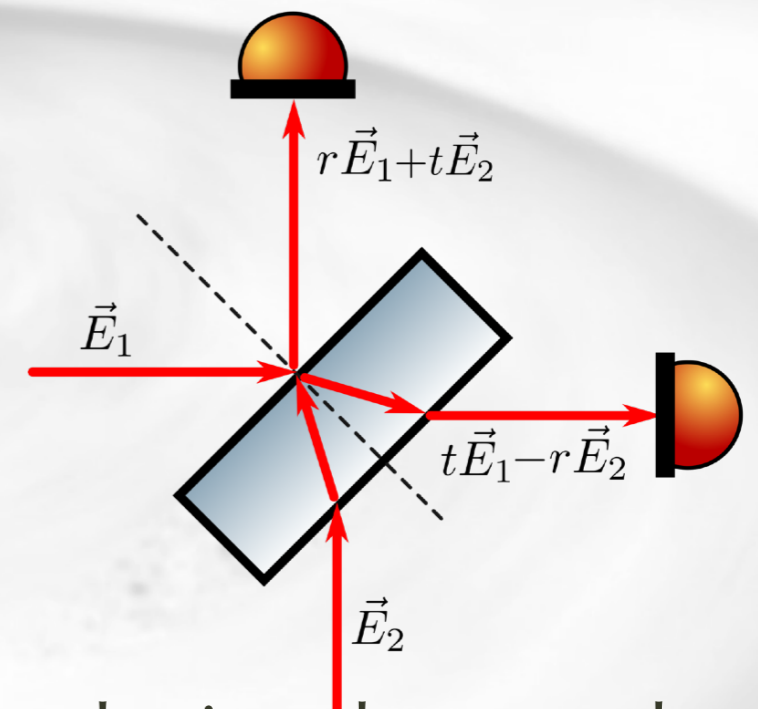
$$\Rightarrow I_{p2} - I_{p1} \approx \sqrt{I_1 I_2} \alpha$$

Perturbation de  $I_1$  :

$$I_1 \leftarrow I_1(1 + \epsilon) ; \epsilon \ll 1$$

$$\Rightarrow I_{p2} - I_{p1} \approx \sqrt{I_1 I_2} \left( \alpha + \frac{\epsilon}{2} \alpha \right)$$

Signal au premier ordre



Perturbation de second ordre

En hétérodyne :

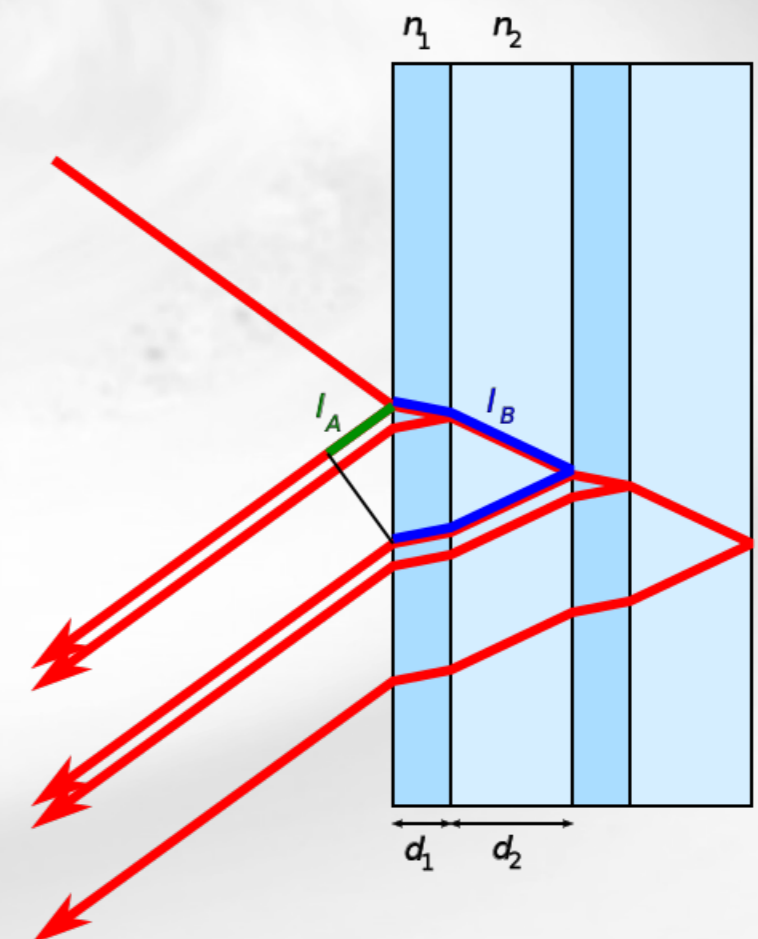
-> insensible au RIN @1f

-> contribution du RIN à 2f



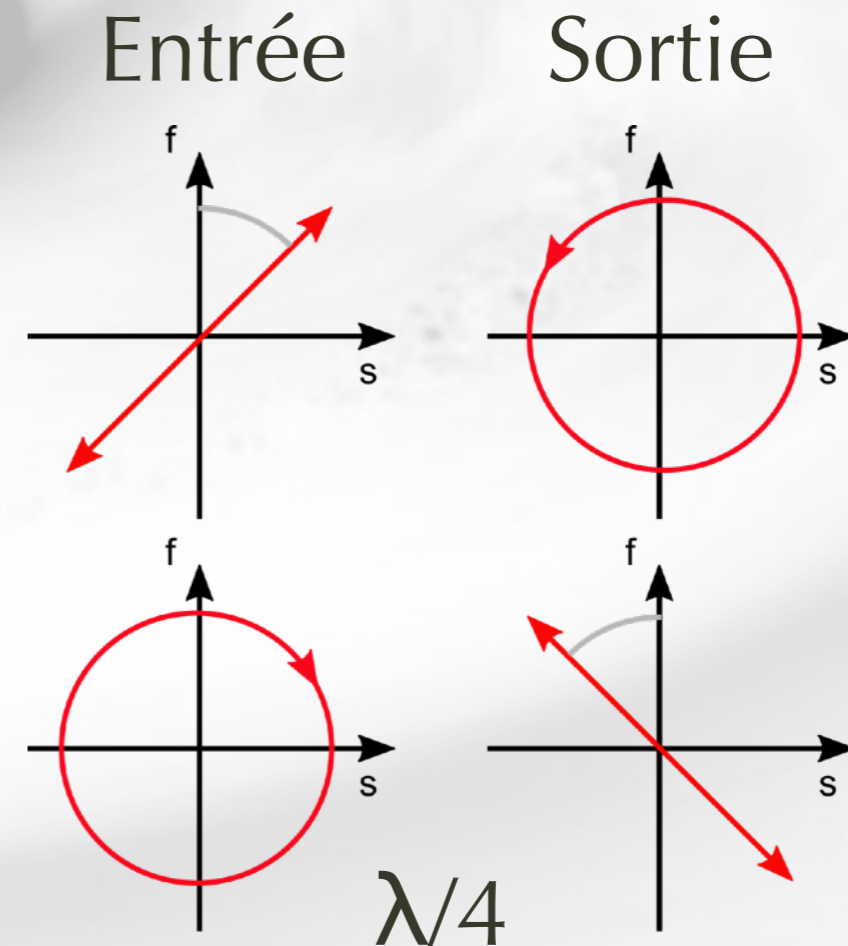
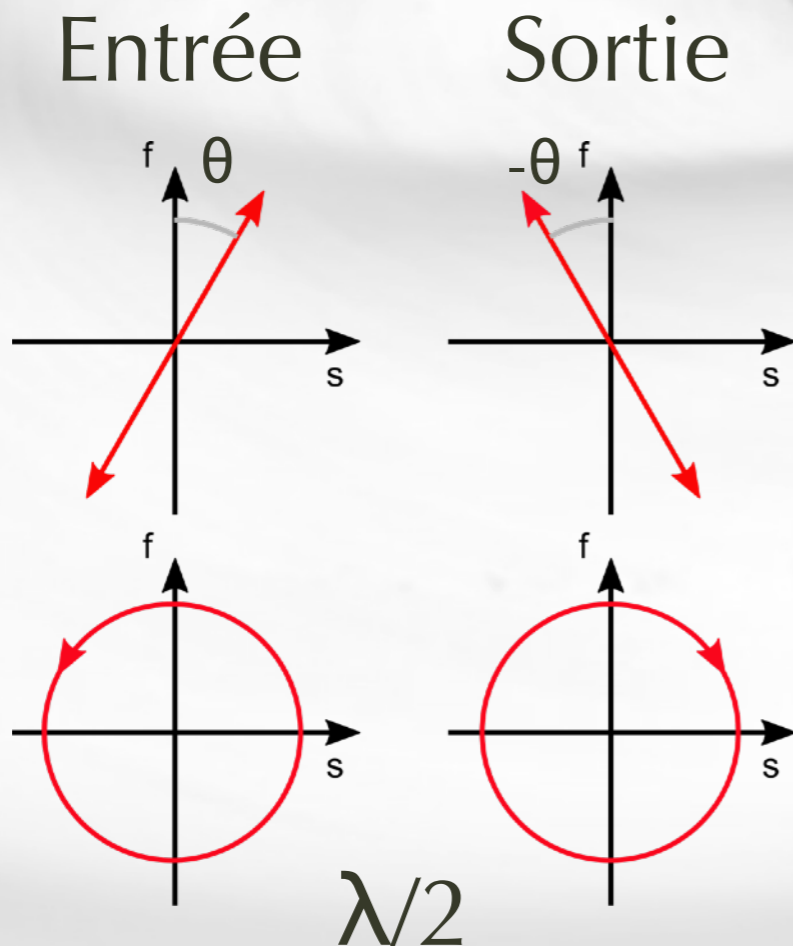
## Miroirs di-électriques ...

- Substrat recouvert de couches d'indices optiques alternativement grands et petits, d'épaisseurs définies pour former des interférences constructives ou destructives (suivant le besoin)
  
- Permet de manipuler :
  - coefficients de réflexion / transmission (partiel, AR, HR)
  - polarisation transmise / réfléchi
  - longueur d'onde (dichroïque)
  
- P.ex, un séparateur de faisceau peut avoir :
  - une face optimisée pour une séparation 50/50 (pour une seule ou les 2 polarisations)
  - une face traitée anti-reflet pour minimiser les images parasites
  
- Cas particulier important : le faisceau réfléchi (air->verre) en incidence normale est déphasé de  $180^\circ$ 
  - Une polarisation linéaire (s ou p) est inchangée
  - Une polarisation circulaire gauche devient circulaire droite (et vice-versa)



## Lames d'ondes

- Lames bi-réfringente, introduisant un déphasage (retard) connu entre un axe 'rapide' et un axe 'lent'
- Lames usuelles :
  - déphasage d'une demi-onde ( $\lambda/2$  ou  $180^\circ$ )  
utilisé pour la rotation de polarisation
  - déphasage d'un quart d'onde ( $\lambda/4$  ou  $90^\circ$ )  
utilisé pour transformé une polarisation linéaire en circulaire (et vice-versa)
  - Une combinaison de  $\lambda/4$  et  $\lambda/2$  permet de corriger l'ellipticité dun faisceau et orienter la polarisation dans la direction souhaitée



## Modulateur Electro-optique (EOM)

- Constitué d'un matériau transparent, dont l'indice de réfraction dépend du champ électrique appliqué
  - Matériau à 1064 nm :  $\text{LiNbO}_3$  ; KTP
- Permet de générer une modulation de phase en fonction d'un signal électrique radiofréquence
  - Large bande de modulation
- Caractérisé par le  $V_\pi$  : tension nécessaire pour un déphasage de  $180^\circ$ 
  - Dépend de la fréquence de modulation
- Modulateurs fibré ou espace libre (résonant et large bande)
- Très utilisé en telecom ....




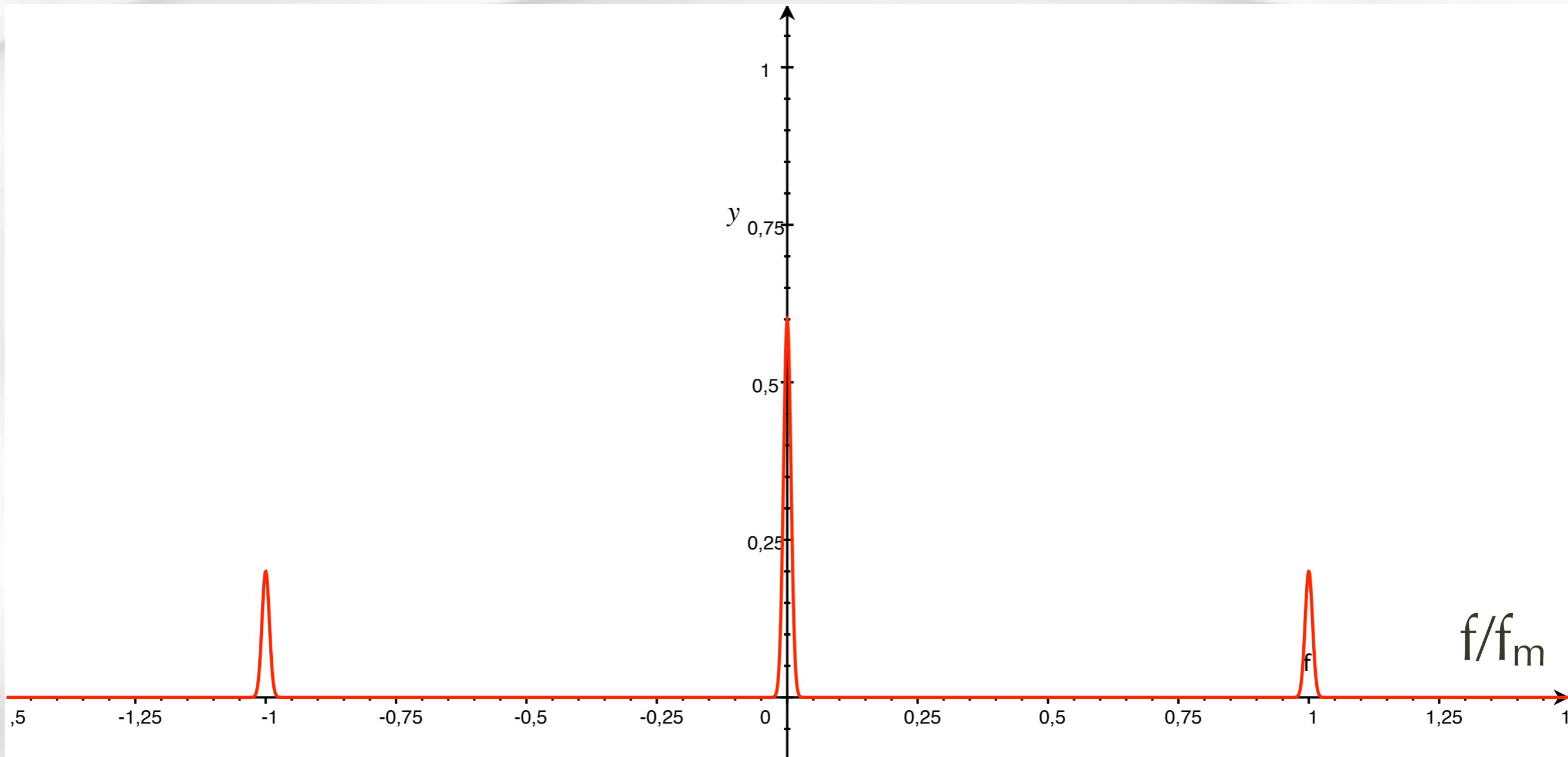
Exemples d'EOM @1064 nm	Large bande	Résonant	Fibré
$V_\pi$ [V]	210 V	10 - 30 V	2-6 V @50 kHz
Impedance	20 pF	50 ohms	50 ohms
Bande passante	DC-200 MHz	$df/f=3\%$ ; f in 0.01-250 MHz	jusqu'à 20 GHz
Pente de modulation	15 mrad/V	0,2 rad/V	1 rad/V

La modulation sinusoïdale de la phase d'un signal (i.e. du chemin optique du faisceau) est équivalente à la création de bandes latérales, i.e de nouvelles fréquences optiques.

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \cos(2\pi ft + \beta \sin(2\pi f_m t)) \\
 &= J_0(\beta) \cos(2\pi ft) \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{+\infty} J_{2k}(\beta) [\sin(2\pi(f + 2kf_m)t) + \sin(2\pi(f - 2kf_m)t)] \\
 &\quad + \sum_{k=0}^{+\infty} J_{2k+1}(\beta) [\cos(2\pi(f + (2k+1)f_m)t) - \cos(2\pi(f - (2k+1)f_m)t)] \\
 &\approx J_0(\beta) \cos(2\pi ft) \\
 &\quad + J_1(\beta) [\cos(2\pi(f + f_m)t) - \cos(2\pi(f - f_m)t)] \quad \text{si } \beta \ll 1
 \end{aligned}$$

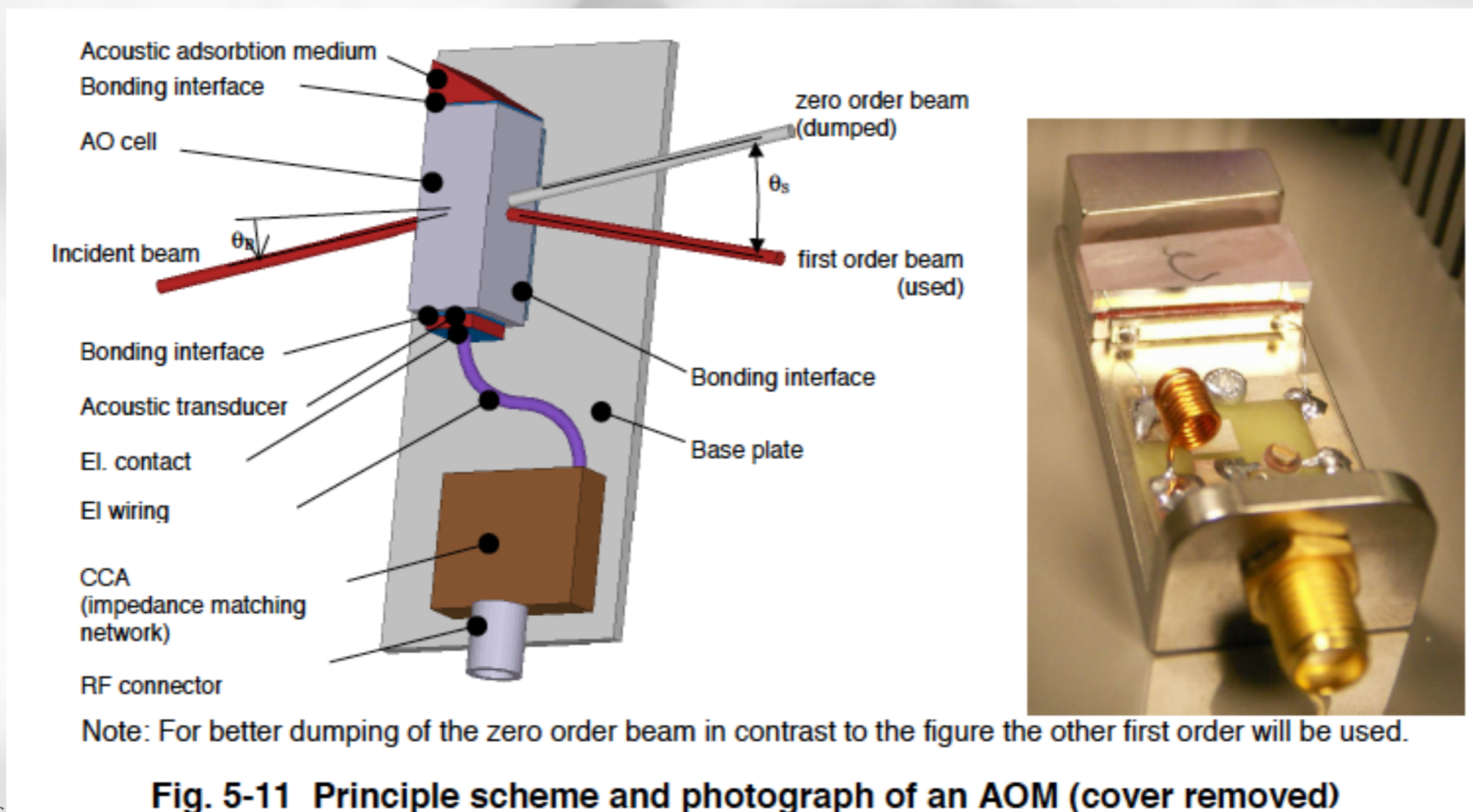
Création de 2 bandes latérales en opposition de phase

 Représentation spectrale : puissance dans les bandes latérales



## Modulateur acousto-optique

- Propagation d'une onde progressive de pression dans un cristal
- => onde d'indice de réfraction
- => ~réseau de diffraction en translation
- => déviation du faisceau (relation de Bragg pour un réseau) + décalage de fréquence (effet Doppler)



# Composants optiques communs

$$\theta_B = \frac{\lambda_0 F}{2v}$$

$\approx 0.73^\circ / (100 \text{ MHz})$  en mode longitudinal  $TeO_2$

$\approx 4.9^\circ / (100 \text{ MHz})$  en mode transverse  $TeO_2$

with  $\lambda_0$  : Longueur d'onde laser dans le vide (1064 nm)

$F$  : Fréquence RF (40 - 200 MHz)

$v$  : Vitesse du son ( $TeO_2$  : 4200 (longitudinal) / 620 (transverse) m/s )

## Modulateur acousto-optique

La puissance diffractée dépend de la puissance RF  
=> utilisable en modulateur de puissance optique

Bande passante de modulation (pour un faisceau  $TEM_{00}$ )

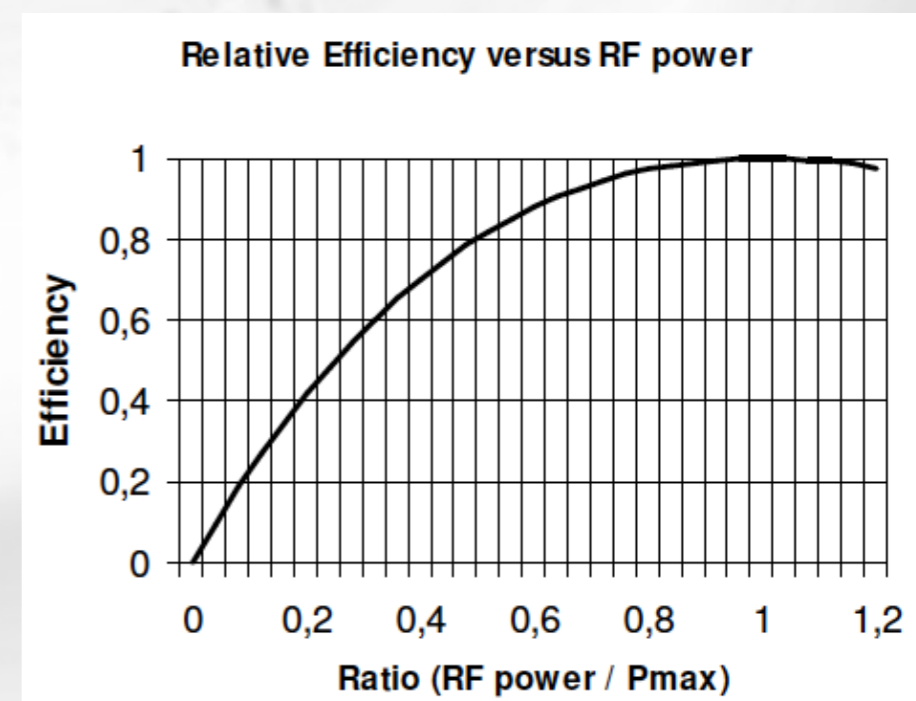
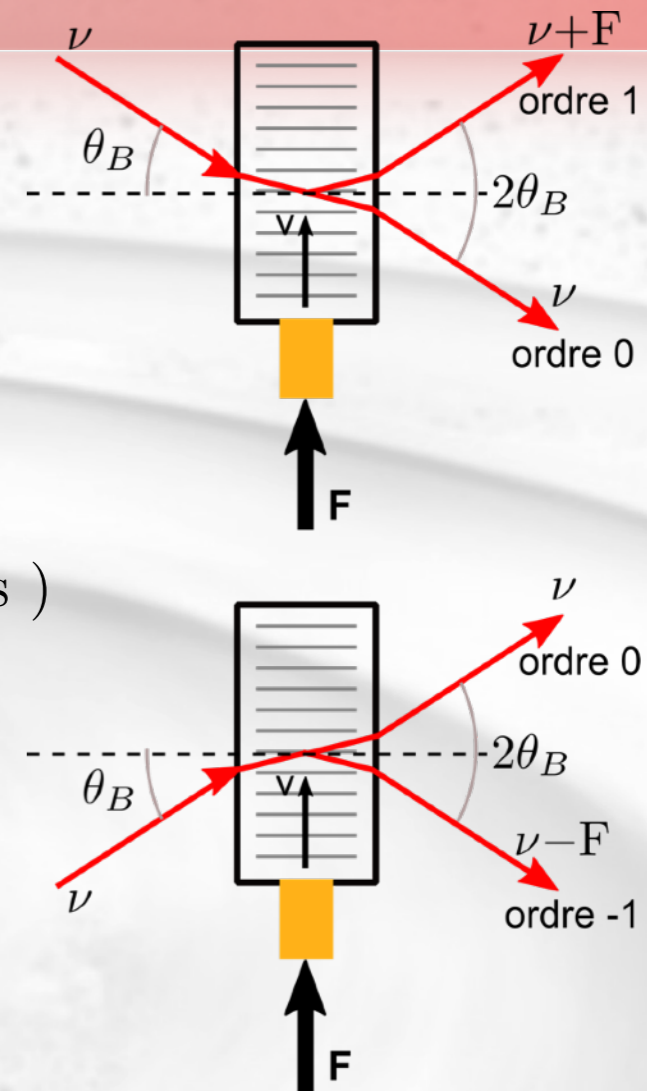
$$F_{-3dB} \approx 0.73 \frac{v}{\Phi}$$

$\approx 3 \text{ MHz}$  (longitudinal)

$\approx 0.4 \text{ MHz}$  (transverse)

avec  $\Phi$  : Diamètre à  $1/e^2$  du faisceau (1 mm)

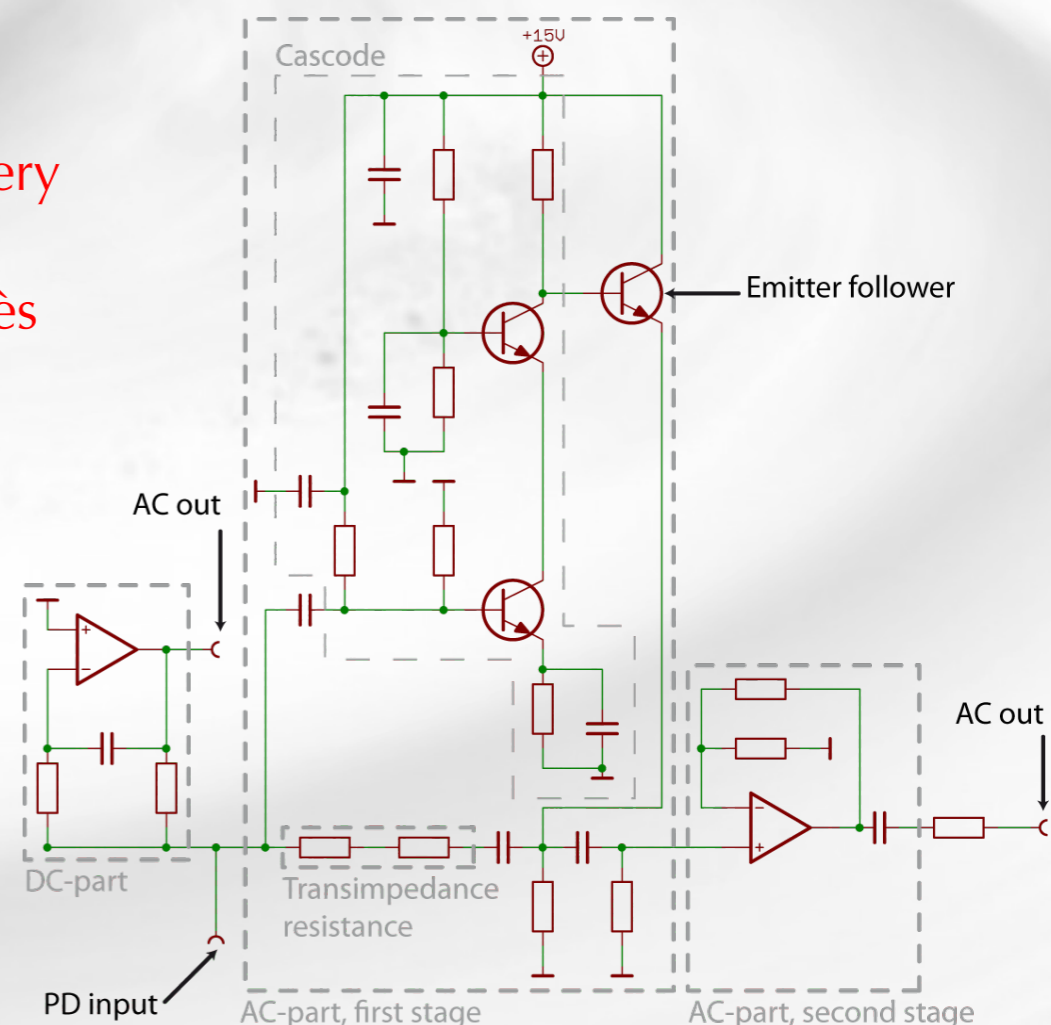
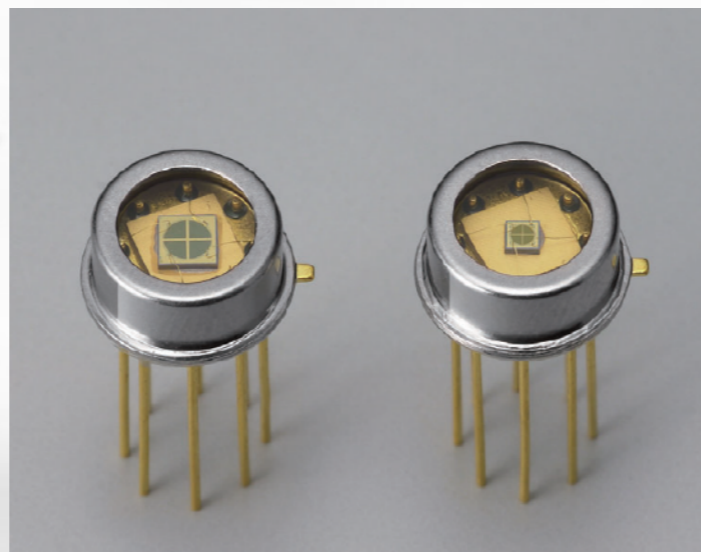
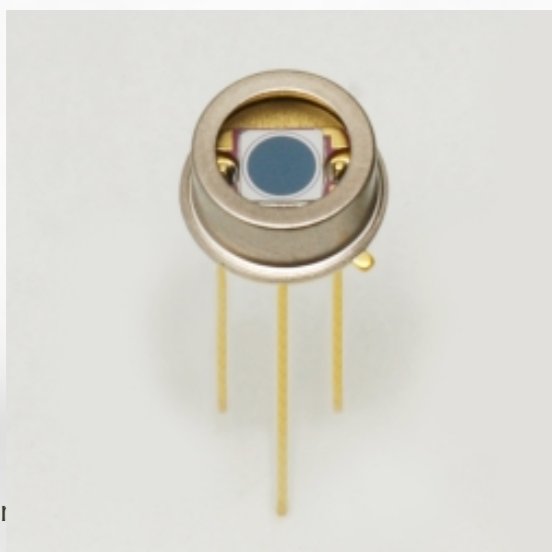
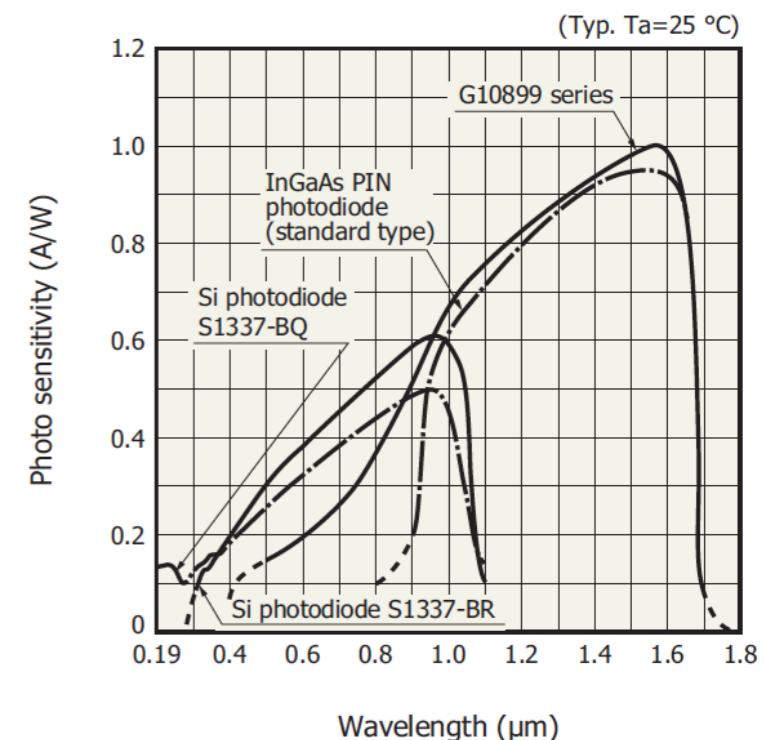
Dynamique :  $\frac{\Delta F}{F_0} \approx 30 - 50\%$



## Photodiodes

- 2 principales technologies :
  - Si : 320 à 1100 nm
  - InGaAs : 900 à 1650 nm
- Besoin photodiodes à quadrants InGaAs pour LISA
  - Détection de la direction du faisceau par Digital WaveFront Sensing (DWS)
- Problème principal : compromis bruit - bande passante
  - Limite : impédance (capacité) des segments
  - => diamètre max de ~1 mm (sauf prototype Discovery SemiConductors : 2 mm)
  - Besoin de pré-amplis séparant DC et AC avec un très bas bruit...

Spectral response









LISA France

# Bruits et signaux

 LISA ne mesure pas des valeurs 'instantanées' (caractérisées par une moyenne et un écart-type), mais l'amplitude (et la phase) de signaux dont la période est comprise entre  $\sim 1$  s et quelques heures.

  $s(t) = A(t)\sin[ 2\pi f(t) t + \varphi(t) ]$  ,  $f(t) = 0.1 \text{ mHz} \dots 1 \text{ Hz}$

  $A(t)$ ,  $f(t)$ , et  $\varphi(t)$  encodent les caractéristiques de la sources et évoluent sur des périodes  $\gg 1/f(t)$

  $\Rightarrow$  approximation 'quasi-statique' (généralement...)












 Il faut donc pouvoir caractériser les bruits dans le domaine fréquentiel

  $\Rightarrow$  Quelle est la 'puissance' de bruit à une fréquence donnée ?

  $\Rightarrow$  Analyse de Fourier

  $\Rightarrow$  Densité spectrale de puissance et d'amplitude

## Hypothèses générales pour la caractérisation des signaux aléatoires

-  Soit  $p(t)$  le résultat d'un processus aléatoire
-   $p(t)$  est supposé défini sur  $t = -\infty \dots +\infty$ 
  -  En pratique il existe sur le temps de la mesure :  $0 \dots T_m$
  -  On s'en sort en prenant en compte l'effet de cette fenêtre dans les estimateurs spectraux
  -   $T_m$  doit être grand devant l'échelle de temps des phénomènes à étudier.
-   $p(t)$  est stationnaire : ses propriétés statistiques ne dépendent pas du temps
  -  Pour LISA : localement assez vrai (sauf apparition de glitches, p. ex.) ; mais pas forcément sur la durée du phénomène
    -  Sources possibles : fluctuation du point de fonctionnement (effet Doppler, dérives thermiques, etc), 'bruit' des binaires galactiques (présentes dans une région du ciel), etc
-   $p(t)$  est ergodique : il est équivalent de considérer des moyennes temporelles et de moyennes d'ensemble (i.e. plusieurs réalisations du processus)
  -  Implique la stationnarité
  -  Généralement, vérifiable uniquement a posteriori, à partir des prédictions faites.

On caractérise la stabilité d'un processus par son auto-corrélation, entre 2 instant séparés d'un temps  $\tau$

Par stationnarité, ne dépend que de  $\tau$

$$C_p(\tau) = \langle p(t + \tau)p^*(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T p(t + \tau)p^*(t) dt$$

Mathématiquement, la densité spectrale de puissance (DSP) est définie comme la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation

=> décrit la répartition 'fréquentielle' des corrélations

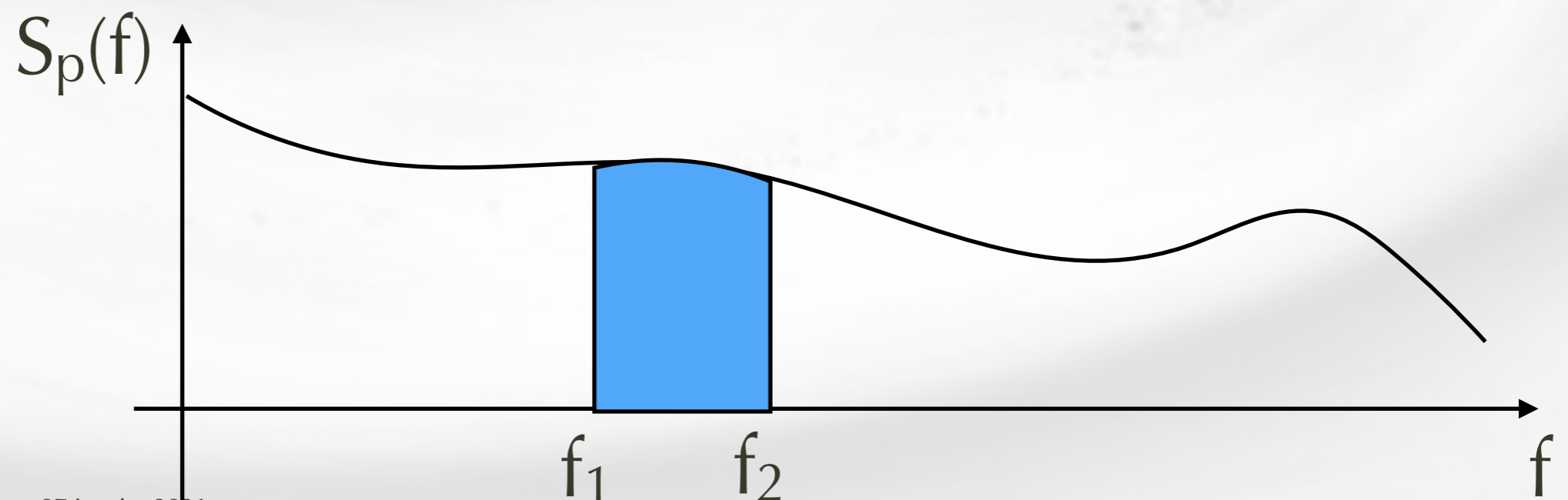
On suppose  $p(t)$  réel (!!!) donc la transformée de Fourier est paire (pas besoin des fréquences négatives) et on 'replie' la DSP sur les fréquences positives uniquement (DSP monolatérale)

$$S_p^{mono}(f) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} C_p(\tau) e^{-2i\pi f\tau} d\tau$$

🔗 si  $\langle p(t) \rangle = 0$  (cas usuel); on relie la DSP à la variance (puissance) de  $p(t)$  par:

$$\sigma_p^2 = C_p(0) = \int_0^\infty S_p^{mono}(f) df$$

- 🔗 On interprète donc  $S_p^{mono}(f)$  comme la répartition (densité) de la puissance de bruit en fonction de la fréquence
- 🔗 On peut interpréter l'intégrale de  $S_p^{mono}(f)$  entre  $f_1$  et  $f_2$  comme la variance de  $p(t)$  après passage dans un filtre parfait de réponse unitaire entre  $f_1$  et  $f_2$  et nul ailleurs.
- 🔗 L'unité de  $S_p^{mono}(f)$  est en  $[p]^2/\text{Hz}$ 
  - 🔗 Si  $p$  représente une fréquence, sa DSP s'exprime donc en  $\text{Hz}^2/\text{Hz}$ .
- 🔗 On définit également la densité spectrale d'amplitude (DSA) comme  $\sqrt{\text{DSP}}$ , donc en  $[p]/\sqrt{\text{Hz}} \Rightarrow$  très utilisée dans LISA




$$C_p(\tau) = \langle p(t + \tau)p^*(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T p(t + \tau)p^*(t) dt \quad S_p^{mono}(f) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} C_p(\tau) e^{-2i\pi f\tau} d\tau$$

 Cette définition n'est pas 'fonctionnelle' pour calculer une DSP dans un cas réel

 On peut néanmoins relier la DSP à la transformée de Fourier de  $p(t)$ , sur un intervalle de longueur  $T$  :

$$S_p^{mono}(f) = 2 \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \|\mathcal{F}_T(p)(f)\|^2$$

$$\mathcal{F}_T(p)(f) = \int_{-T/2}^{T/2} p(t) e^{-2i\pi f t} dt$$

  $\int_0^{+\infty} \|\mathcal{F}_{+\infty}(p)(f)\|^2 df$  correspond à l'énergie totale du signal et est généralement infinie (p.ex. une sinusoïde), mais sa puissance ( $\int_0^{+\infty} S_p(f) df$ ) est supposée finie.

 Formule permettant de calculer des estimateurs de  $S_p(f)$

 En vrac : quelques propriétés des transformées de Fourier / DSP

 convolution  $\leftrightarrow$  produit

$$(h * s)(t) \Leftrightarrow \mathcal{H}(f) \cdot \mathcal{S}(f) \Rightarrow S_{h*p}(f) = \|\mathcal{H}(f)\|^2 S_p(f)$$

 Correlation et dépendance

si  $p_1$  et  $p_2$  sont indépendants :  $S_{p_1+p_2}(f) = S_{p_1}(f) + S_{p_2}(f)$












si  $p_1$  et  $p_2$  sont totalement corrélés ( $p_2 = \alpha p_1$ ):  $S_{p_1+p_2}(f) = (1 + \alpha)^2 S_{p_1}(f)$

 Intégration et dérivation

$$\text{si } p_2 = \frac{dp_1}{dt} : \mathcal{P}_2(f) = -2i\pi f \mathcal{P}_1(f) \Rightarrow S_{p_2}(f) = 4\pi^2 f^2 S_{p_1}(f)$$

 En particulier entre phase et fréquence :

$$\Delta\nu(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Delta\phi}{dt}(t) \Rightarrow S_{\Delta\nu}(f) = f^2 S_{\Delta\phi}(f)$$

-  En vrac : quelques propriétés des transformées de Fourier discrètes
  -  i.e. la transformée de Fourier d'un ensemble fini de valeurs régulièrement échantillonnées
    -  Un algorithme efficace pour calculer cette TF est la FFT (Fast Fourier Transform)
      -  N échantillons sur un temps T (soit une fréquence d'échantillonnage de  $f_s = N/T$ )
        -  En sortie de transformée de Fourier
          -   $N/2$  (ou  $N/2+1$  suivant la parité de N) points de fréquences  $\geq 0$
          -  Résolution fréquentielle :  $\Delta f = 1/T$
          -  Fréquence maximal (fréquence de Nyquist) :  $f_s/2$
          -  Les signaux à des fréquence  $> f_s/2$  sont 'repliés'
          -  Bin de fréquence nulle (premier bin) = moyenne du signal
-  Conséquence pour la DSP

$$\text{si } \mathcal{P}(f_k = k\Delta f) = \mathcal{P}_k \Rightarrow S_p(k\Delta f) = 2 \frac{\|\mathcal{P}_k\|^2}{T}$$

$$\sigma_p^2 = \sum_k \Delta f S_p(k\Delta f) = \frac{2}{T^2} \sum_k \|\mathcal{P}_k\|^2$$



 En vrac : quelques propriétés des transformées de Fourier discrètes

 Conséquence pour la DSP

$$\text{si } \mathcal{P}(f_k = k\Delta f) = \mathcal{P}_k \Rightarrow S_p(k\Delta f) = 2 \frac{\|\mathcal{P}_k\|^2}{T}$$

$$\sigma_p^2 = \sum_k \Delta f S_p(k\Delta f) = \frac{2}{T^2} \sum_k \|\mathcal{P}_k\|^2$$

 cas particulier sinusoidal

$$\text{si } s(t) = A \sin(2\pi ft)$$

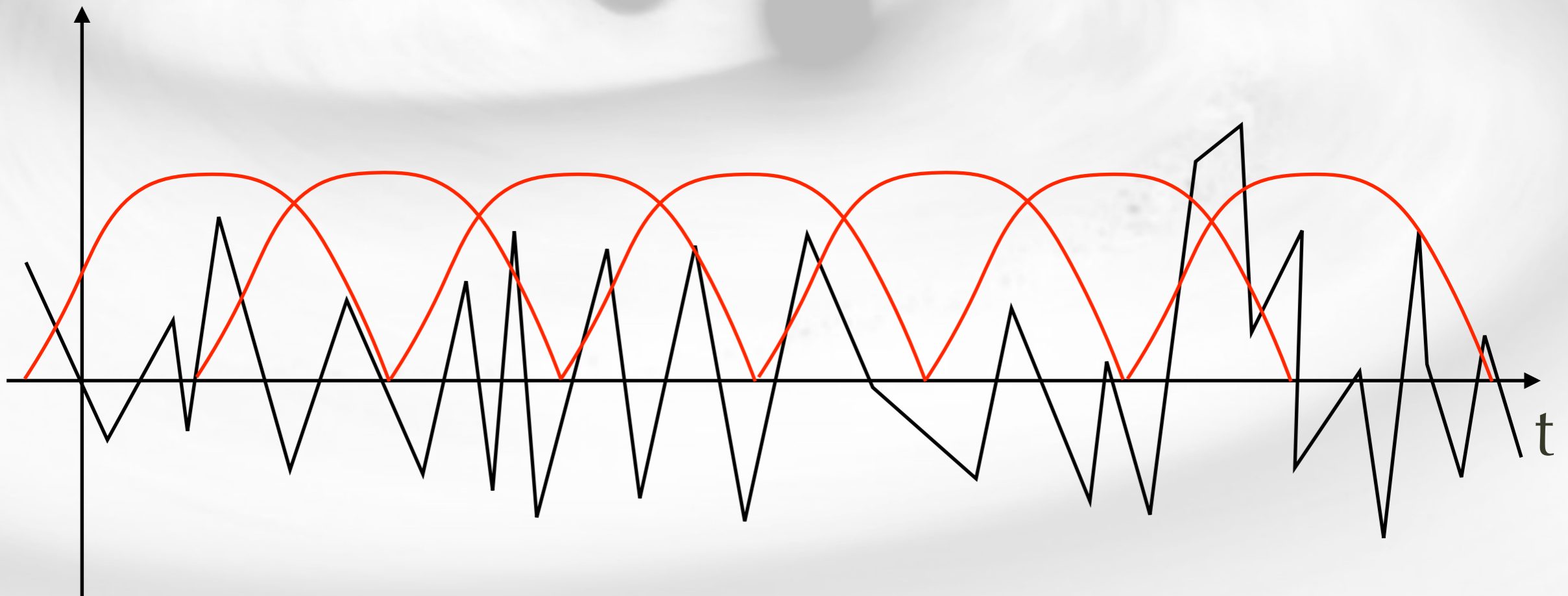
$$\Rightarrow \sigma_s^2 = \frac{A^2}{2} = \frac{2}{T} S_s(k\Delta f) \quad \text{avec } k ; k\Delta f \leq f < (k+1)\Delta f$$

$$\Rightarrow S_s(k\Delta f) = \frac{A^2 T}{4}$$

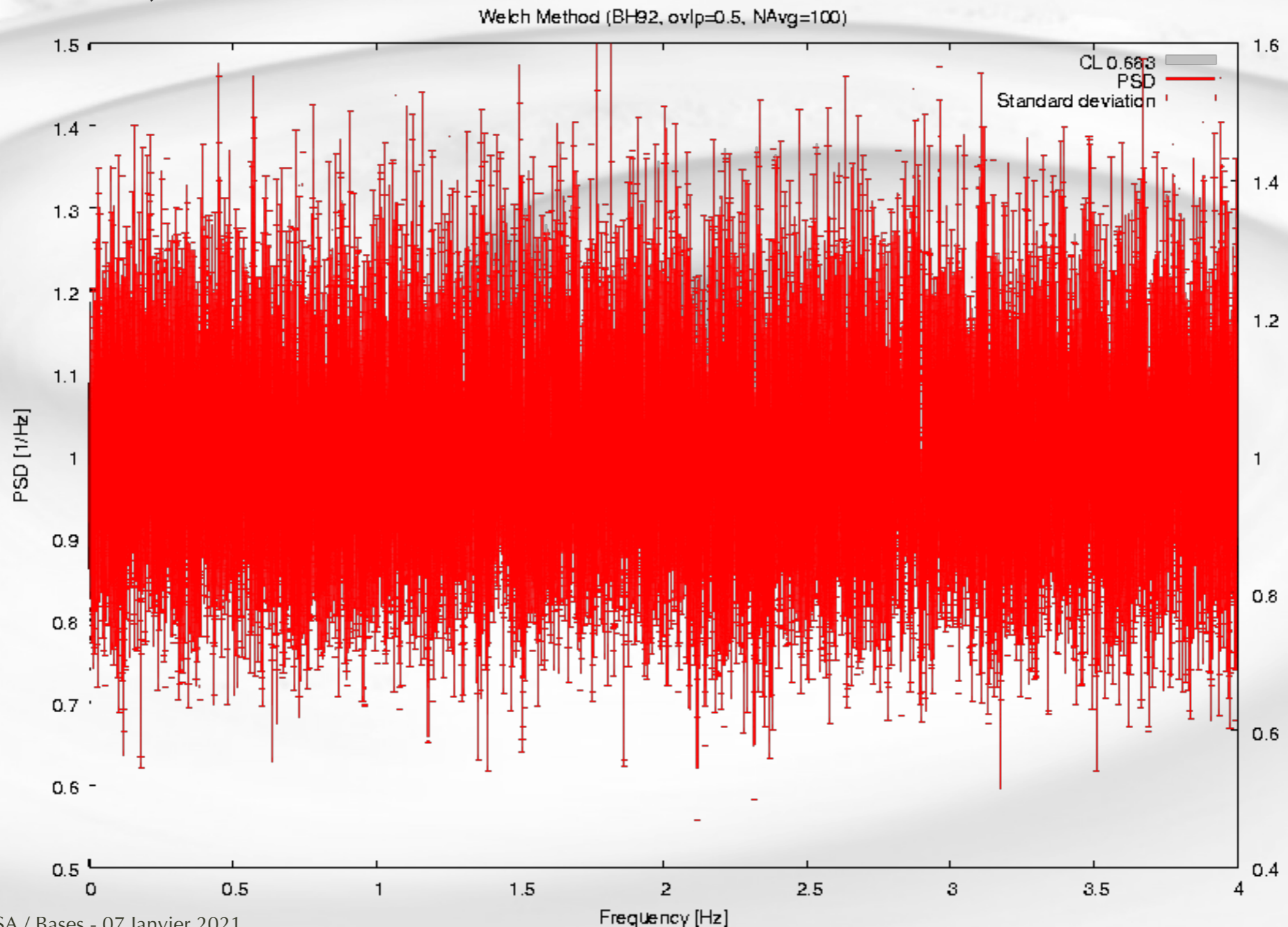
 => la 'densité' de puissance d'une sinusoïde augmente avec le temps d'acquisition

 Comme le niveau de bruit reste (normalement...) constant, le rapport signal à bruit augmente avec T.


- 🔗 Pour finir avec les maths : estimateur de DSP
- 🔗 Prendre la transformée de Fourier sur l'ensemble des points induit une très forte variabilité d'un point de fréquence à ses voisins
- 🔗 Méthode de Welch : moyenner des PSD prises sur plusieurs intervalles successifs se recouvrant
  - 🔗 => réduction de la variabilité au détriment de la résolution spectrale
  - 🔗 => La loi des grands nombres fait converger vers un estimateur gaussien
  - 🔗 => les fenêtres d'apodisation permettent de gérer le compromis entre localisation fréquentielle et étalement spectral
  - 🔗 => il existe une variante avec un nombre de moyennes dépendant de la fréquence, et gardant un échantillonnage régulier en échelle logarithmique (log-PSD)



 Réduction de la variance de l'estimateur (compromis biais-variance...)



## Fonctions de transfert

 Définition Wikipédia : « En traitement du signal, une **fonction de transfert** est un modèle mathématique de la relation entre l'entrée et la sortie d'un système linéaire, le plus souvent invariant. »

 Modélise dans le plan complexe (fréquentielle) le résultat d'un produit de convolution

 Temps continu -> transformée de Laplace

 passage fréquentiel (Fourier)  $\longleftrightarrow$  Laplace :  $p = i\omega = 2i\pi f$

$$y(t) = (h * x)(t)$$

$$\Leftrightarrow Y(p) = H(p) \cdot X(p)$$

 Temps discret (T-périodique)  $\longrightarrow$  transformée en z

 Passage fréquentiel  $\longleftrightarrow$  Transf. en z :  $z = e^{i\omega T} = e^{pT}$

$$y(n) = (h * x)(n)$$

 Donne les coefficient de récurrence entre 2 temps successifs

$$\Leftrightarrow Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$





 Transformation bilinéaire :  $z \approx (1+pT/2)/(1-pT/2)$  ;  $p \approx 2/T * (1-z^{-1})/(1+z^{-1})$

 Très utilisé pour la modélisation des systèmes linéaires, en particuliers pour les systèmes asservis

 Boucles de contrôle

 Filtres, etc.

## DSP croisée

-  Similaire à la DSP, mais sur 2 signaux distincts
-  Permet de quantifier la corrélation entre 2 signaux en fonction de la fréquence
-  avec les mêmes hypothèse que la PSD + linéarité de la relation entre les 2 signaux
-  Valeur complexe : amplitude et phase de la corrélation

$$C_{p,s}(\tau) = \langle p(t + \tau)s^*(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T p(t + \tau)s^*(t) dt \quad S_{p,s}^{mono}(f) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} C_{p,s}(\tau) e^{-2i\pi f\tau} d\tau$$

$$S_{p,s}^{mono}(f) = 2 \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} [\mathcal{F}_T(p)(f) \cdot \mathcal{F}_T^*(s)(f)]$$



-  —> mêmes algorithmes que pour le calcul de la DSP

## DSP et fonctions de transfert

 Supposons deux signaux aléatoires (stationnaires, ergodiques), dont l'un est issu de la convolution de l'autre par une fonction de transfert

$$\begin{aligned}
 s(t) &= (h * p)(t) \\
 \Leftrightarrow S(f) &= H(f) \cdot P(f) \\
 \Rightarrow S_{s,p}(f) &= 2 \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} [\mathcal{F}_T(s)(f) \cdot \mathcal{F}_T^*(p)(f)] \\
 &= 2 \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} [H(f) \mathcal{F}_T(p)(f) \cdot \mathcal{F}_T^*(p)(f)] \\
 &= H(f) S_p(f)
 \end{aligned}$$

 Utile pour :

-   $\rightarrow$  calculer une fonction de transfert à partir d'une excitation de bruit (p.ex. temperature)
-   $\rightarrow$  calculer la DSP d'un bruit après passage dans un système linéaire (p.ex. diffusion thermique)

 Notion liée : cohérence entre deux signaux

 Quantifie si 2 signaux (bruits) sont liés par une fonction de transfert

 Notion reliée : cohérence entre deux signaux

 Quantifie si 2 signaux (bruits) sont liés par une fonction de transfert

$$K_{s,p}(f) = \frac{\|S_{s,p}(f)\|^2}{S_s(f)S_p(f)}$$

$$\leq 1 \quad \text{dans tous les cas}$$

$$= 1 \quad \text{si } S(f) = H(f)P(f)$$

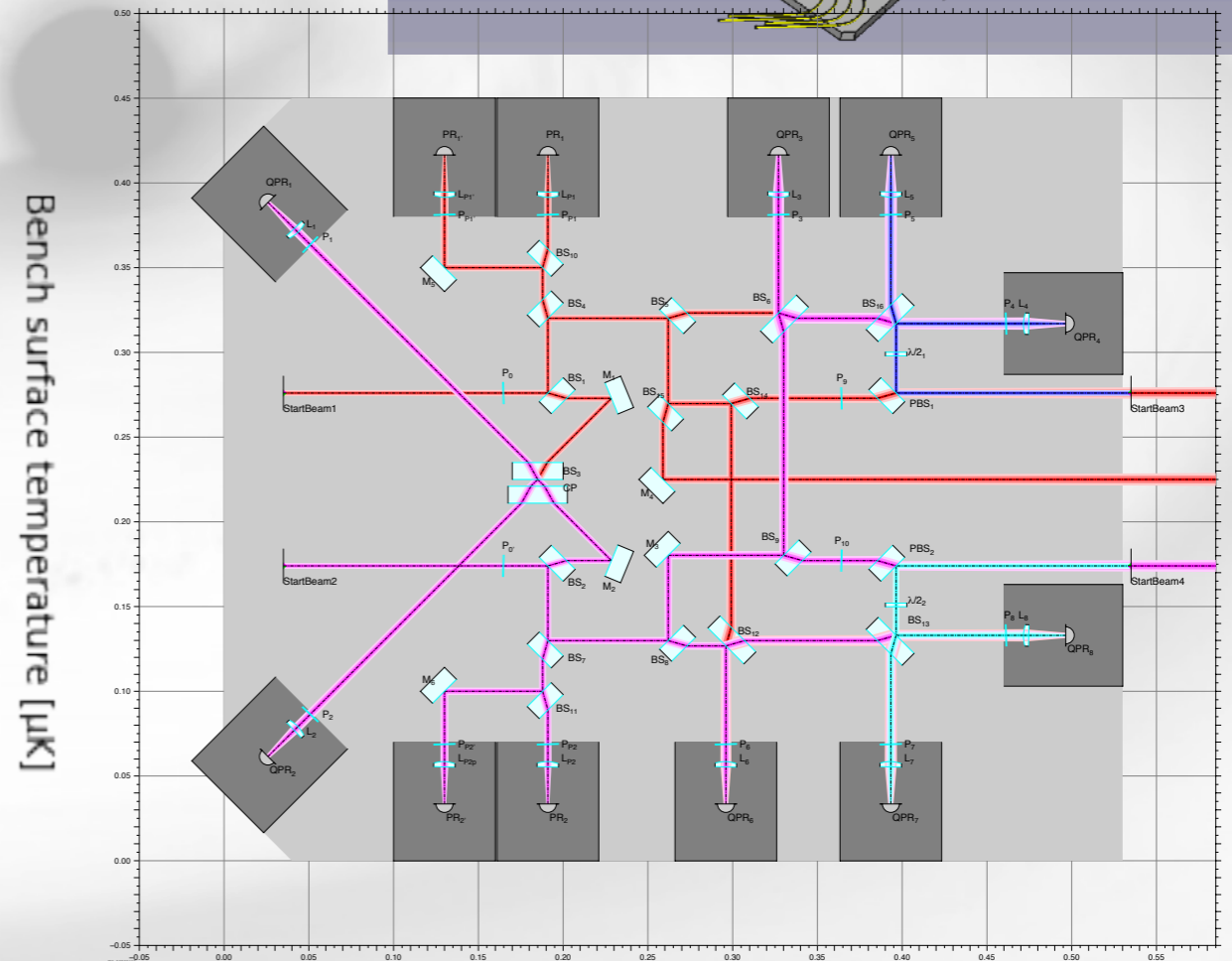
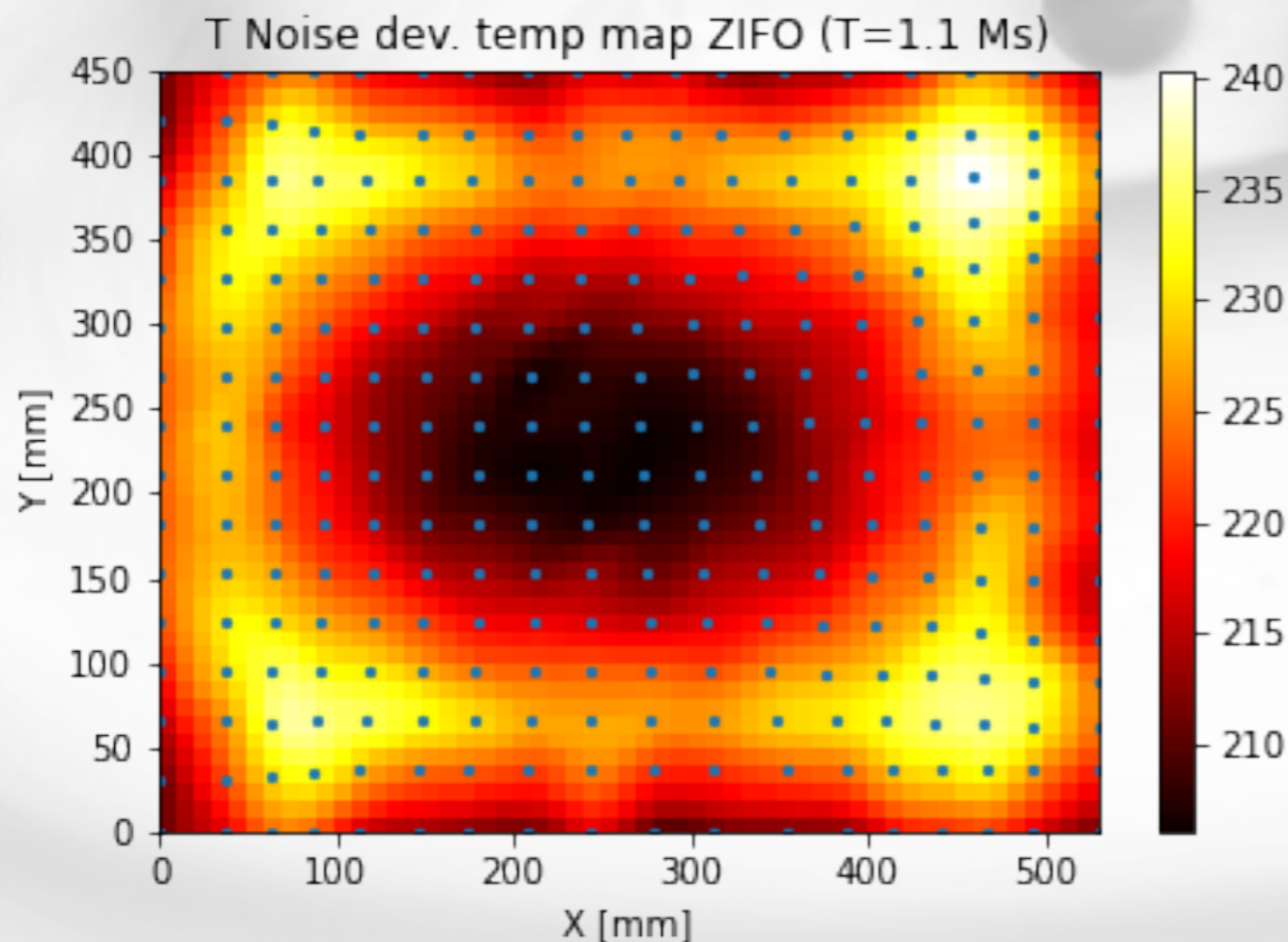
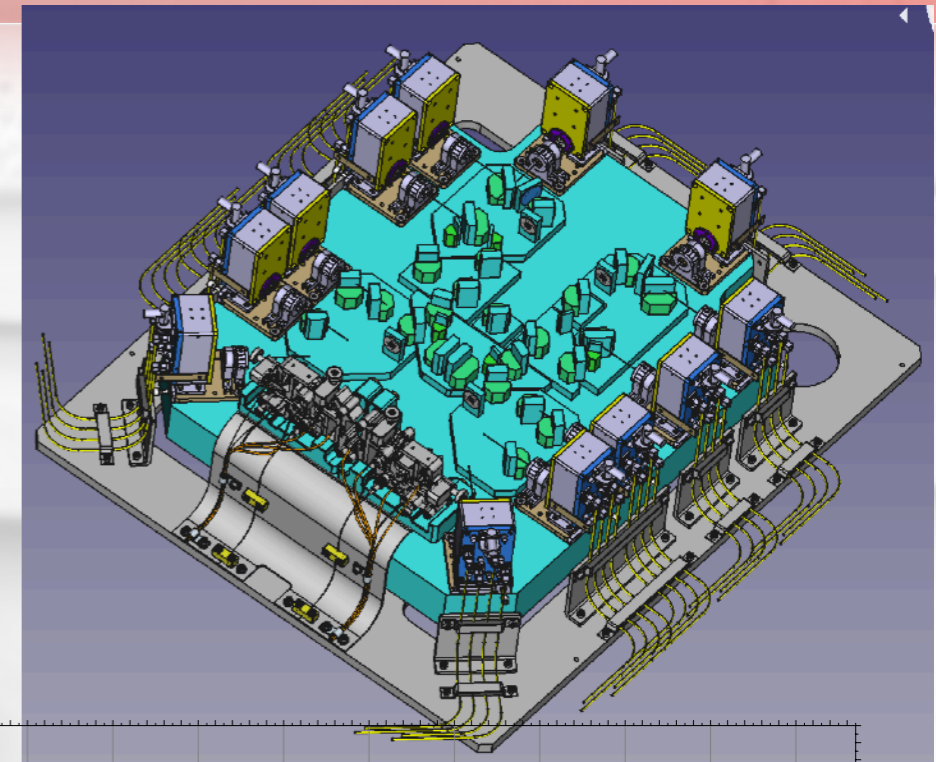
 Si  $K_{s,p}(f) \ll 1 \Rightarrow$  pas de corrélation

 Bruit additionnel, système non-linéaire, non stationnaire, ...

## Exemple : modélisation thermique ZIFO

### Modélisation éléments finis :

- Excitation par un bruit (blanc) thermique à une interface (ici : température de l'environnement externe)
- Calcul des déformations thermo-élastiques et variations de chemin optique induits

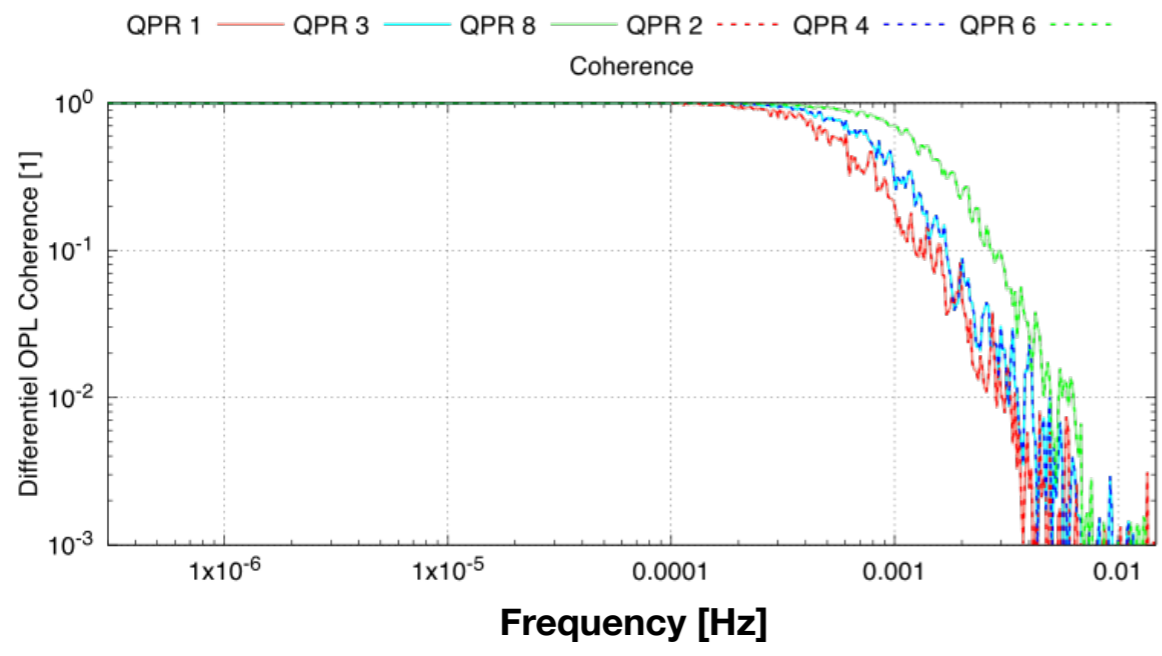
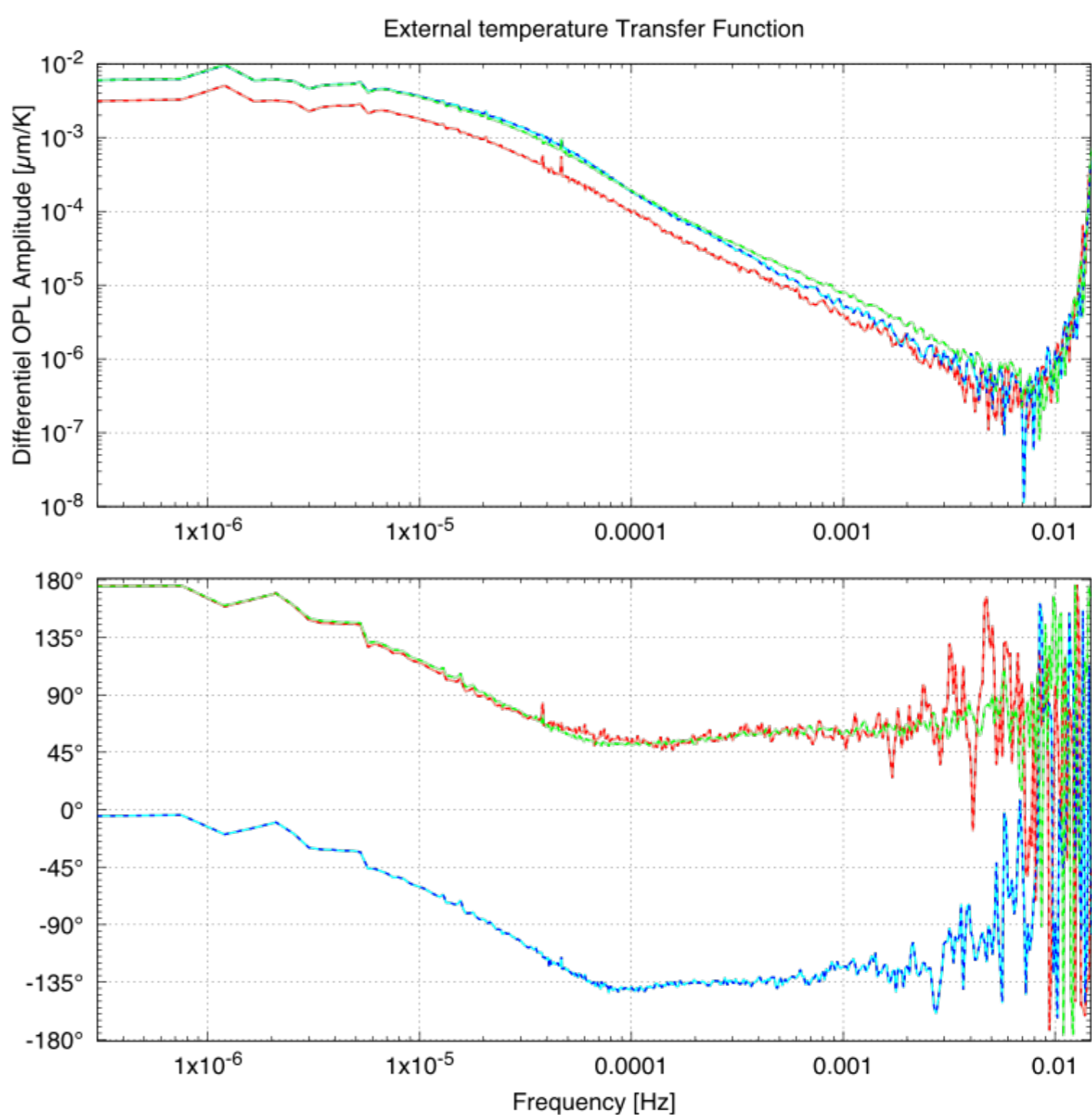








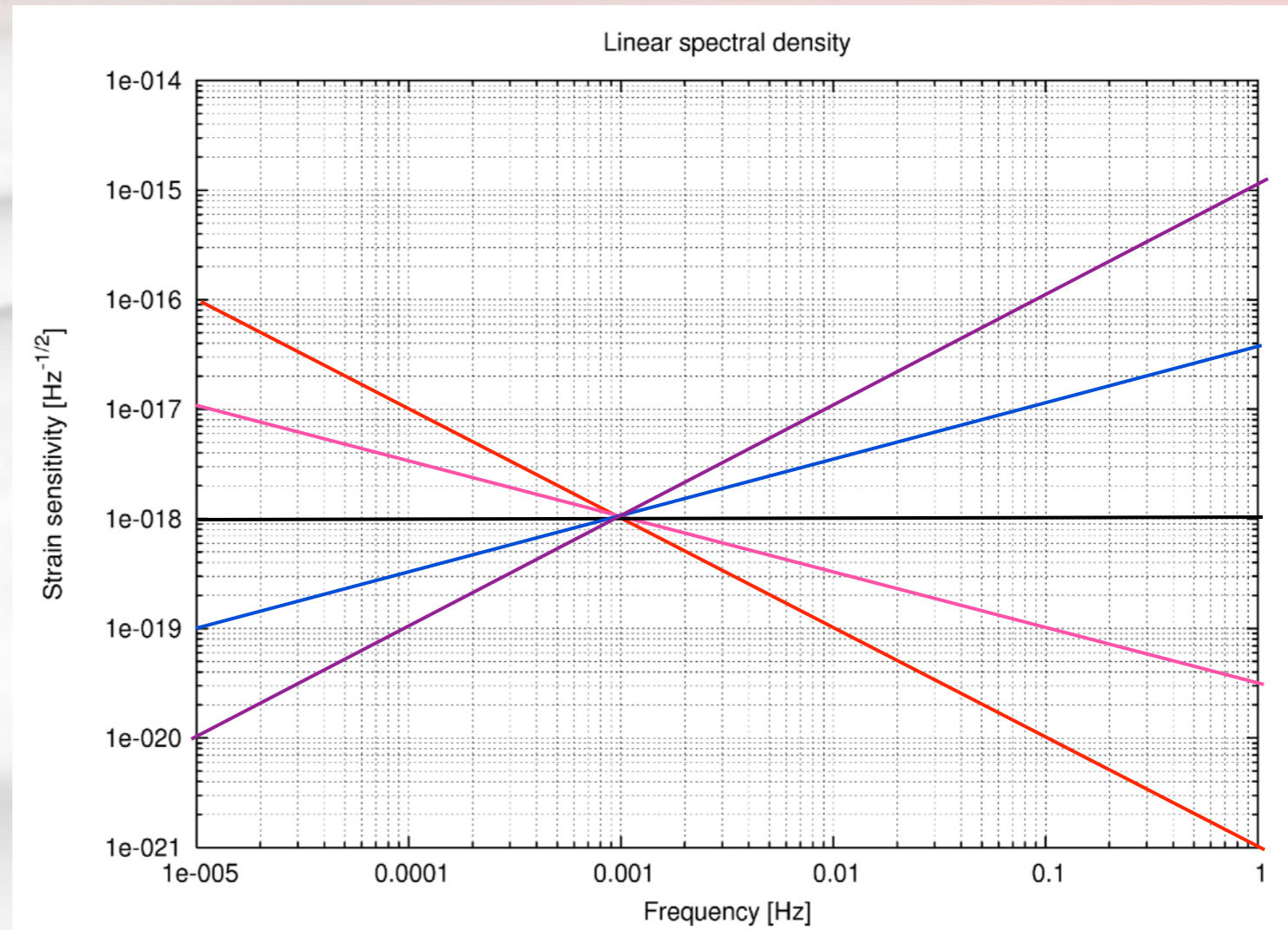
## Exemple : modélisation thermique ZIFO

### Modélisation éléments finis :

- Excitation par un bruit (blanc) à l'interface (ici : température de l'air externe)
- Calcul des déformations thermiques et des variations de chemin optique




- 
 Une autre caractéristique importante des bruits : ils sont le plus souvent supposés gaussiens, c.à.d que la distribution des valeurs de  $p(t)$  est gaussienne (centrée sur 0)
- 
 Hypothèse souvent requise pour les analyses de données
- 
 Généralement vrai ... mais pas toujours (en particulier lors de transformations non-linéaires)
  - 
 P.ex. le sinus d'un bruit gaussien n'est pas (généralement) gaussien
    - => non gaussianité des mesures due au perturbations de chemin optique (e.g. lumière parasite)
    - => Impact pour le traitement de données LISA : TBD ...




## — [Noise colors :

- ✓  $S(f) \propto f^{-2}$  : red (or Brownian) noise, result of a random walk or integration of white noise
- ✓  $S(f) \propto f^{-1}$  : pink (or '1/f', or flicker) noise, equal repartition of power in each decade, very common in any electronic system. It must be limited at very low frequency (otherwise infinite power) but was measured down to  $10^{-6}$  Hz... An universal model of the underlying physics remains unclear...
- ✓  $S(f) \propto f^0$  : white (or flat) noise, equal power in equal bandwidth. Sampled white noise is easily generated with a computer...
- ✓  $S(f) \propto f$  : blue noise
- ✓  $S(f) \propto f^2$  : violet noise, differentiation of white noise


 Quelques remarques sur le lien entre écart-type et pente du spectre :


  $S(f) \propto f^{-2} :$  
$$\int_{1/T}^{f_s/2} f^{-2} df = \left( T - \frac{2}{f_s} \right)$$

-  La variance (écart-type) diverge avec le temps d'acquisition
-  Converge quand la fréquence d'échantillonnage augmente

  $S(f) \propto f^{-1} :$  
$$\int_{1/T}^{f_s/2} f^{-1} df = \left( \ln(T) + \ln \frac{f_s}{2} \right)$$

-  La mesure d'écart-type n'est pas stable, ni avec T, ni avec  $f_s$  ...

  $S(f) \propto f^0 :$  
$$\int_{1/T}^{f_s/2} df = \frac{f_s}{2} - \frac{1}{T}$$

-  Diverge avec la fréquence d'échantillonnage
-  En pratique, le niveau de la DSP peut diminuer avec  $f_s$  pour maintenir la variance constante (e.g. bruit blanc gaussien échantillonné)

 Et tous les systèmes physiques sont *in fine* des passes-bas ...

## Standard quantum limit / shot noise

 The number of uncorrelated photons detected with a photodiode follow a Poisson statistics

$$\delta N = \sqrt{N} \quad (\text{Variance} = N \text{ for Poisson statistics})$$


$$N = \frac{P}{h\nu} \times \Delta t = \frac{P\lambda}{hc} \times \Delta t$$

$$\delta\Phi_{sn} \approx \frac{\delta N}{N} = \sqrt{\frac{hc}{P\lambda\Delta t}}$$

$$S_{\delta\Phi,sn}^{mono} = 2 \frac{hc}{P\lambda} \left[ \frac{\text{rad}^2}{\text{Hz}} \right]$$

$$S_{\delta x,sn}^{mono} = \frac{hc\lambda}{2\pi^2 P} \left[ \frac{\text{m}^2}{\text{Hz}} \right]$$

 White noise (phase or position)

 Sub-shot noise measurements are possible in a limited frequency range by using squeezed light (correlation between phase and amplitude)

 The Heisenberg uncertainty set a lower limit on the sensitivity

 Formulae not strictly valid for oscillating signals, but good enough

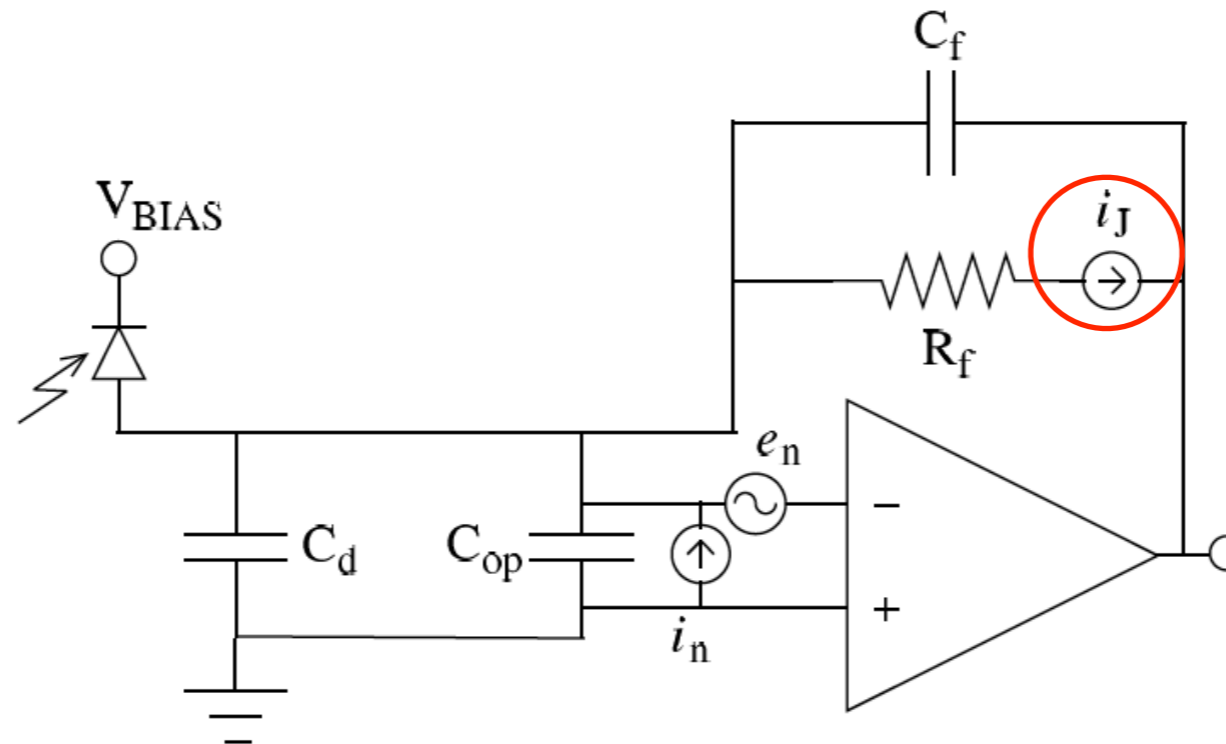


FIG. 2. Topology and noise model of photoreceiver TIA.

## Johnson noise in resistors

- due to thermal agitations of carriers in the conductor
- Induce voltage / current fluctuations in the circuit
- Current white noise






$$S_{i_J}(f) = \frac{4k_B T}{R_f} \text{ A}^2/\text{Hz}$$

- Trade-off with the amplification bandwidth, other electronic noise and optical shot noise

## Laser frequency stabilization

-  Frequency instability of a laser beam couples to phase noise for unequal armlength

$$\begin{aligned}\delta\Phi &= \Phi(t - 2L/c) - \Phi(t - 2(L - \Delta L)/c) \\ &\approx \frac{2\Delta L}{c} \frac{\partial\Phi}{\partial t}(t - 2L/c) = \frac{2\Delta L}{c} 2\pi\delta\nu \\ \Rightarrow \delta x &= \lambda \frac{\delta\Phi}{2\pi} = 2\Delta L \frac{\delta\nu}{\nu}\end{aligned}$$

-  For ground based interferometers :  $\delta\nu \sim 10^{-7} \text{ Hz.Hz}^{-1/2}$  (above 30 Hz)
  -  achieved by servo loops locking on 2 cavities : one short (pre-stabilization) + one long (one of the arm cavity)
-  For space-based detectors :  $\Delta L \sim 10\,000 \text{ km}$  (gravitational orbits)
-   $\Rightarrow \delta\nu \sim 10^{-6} \text{ Hz.Hz}^{-1/2}$  in the range [0.1 mHz : 10 Hz]
  -  Best 'transportable' stable laser at  $\sim 10 \text{ Hz.Hz}^{-1/2}$

## Power fluctuations of the lasers

For homodyne interferometry, dark fringe Michelson interferometers :  
mostly insensitive to power fluctuations (almost no output power)

$$\frac{\delta P}{P} \approx h \frac{\delta L_{fringe}}{L_{arm}} \quad \text{with } \delta L \text{ the offset from the ideal dark fringe position } (\delta L \approx 10^{-13} \text{ m})$$

$$\frac{\delta P}{P} \lesssim 10^{-7} \quad 1/\sqrt{\text{Hz}} \quad \text{at } \approx 300 \text{ Hz for ground based detectors}$$

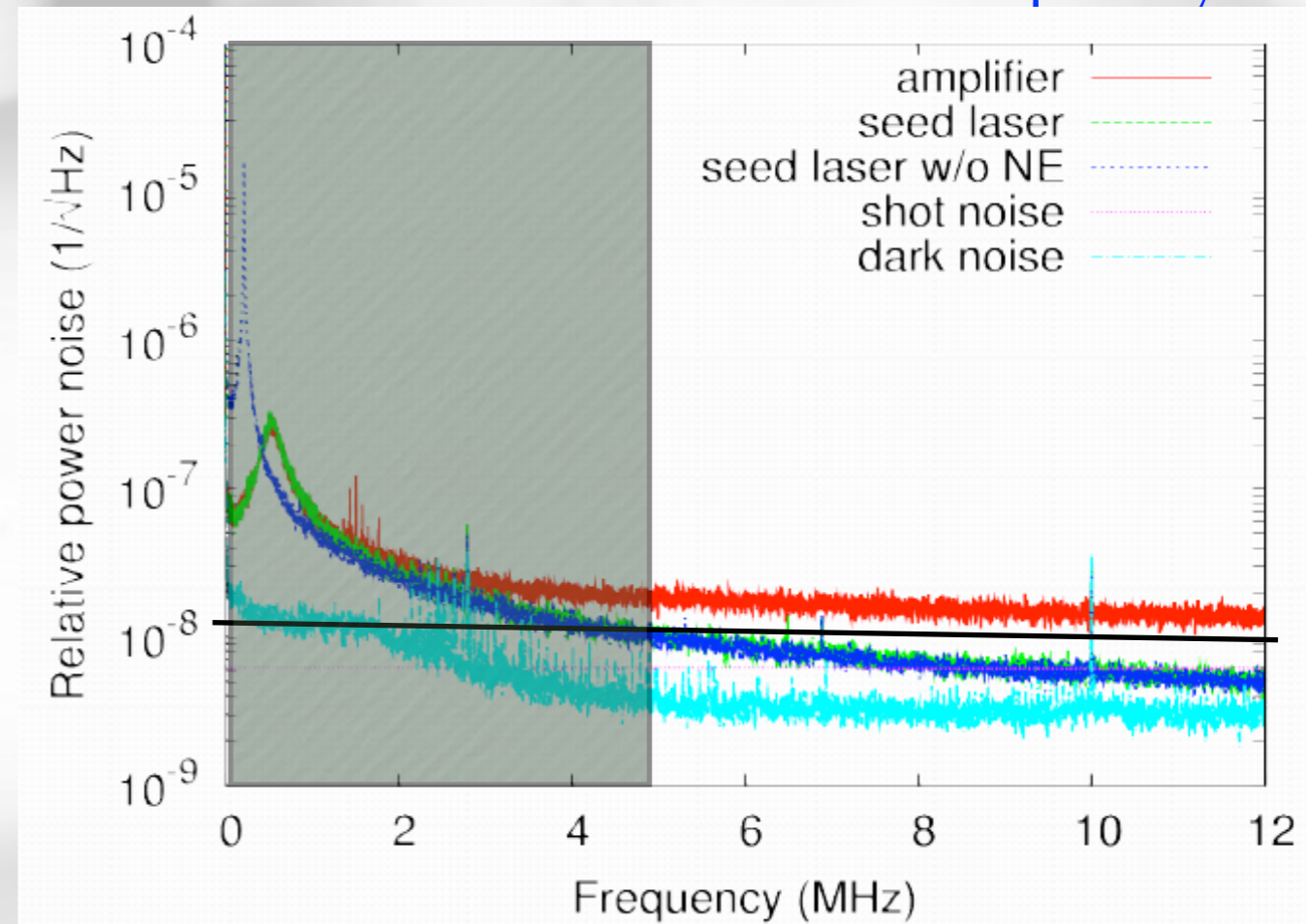
For heterodyne interferometers : relative fluctuations at the beat frequency

Canceled if balance detection

$$\frac{\delta P}{P} \approx \delta \Phi \sqrt{\frac{I_{AC}}{I_{DC}}}$$

$$\frac{\delta P}{P} \approx \frac{2\pi h L}{\lambda} \sqrt{\frac{I_{AC}}{I_{DC}}}$$

$$\frac{\delta P}{P} \approx 10^{-8} \quad 1/\sqrt{\text{Hz}} \quad \text{at } \approx 5 \text{ MHz for eLISA}$$



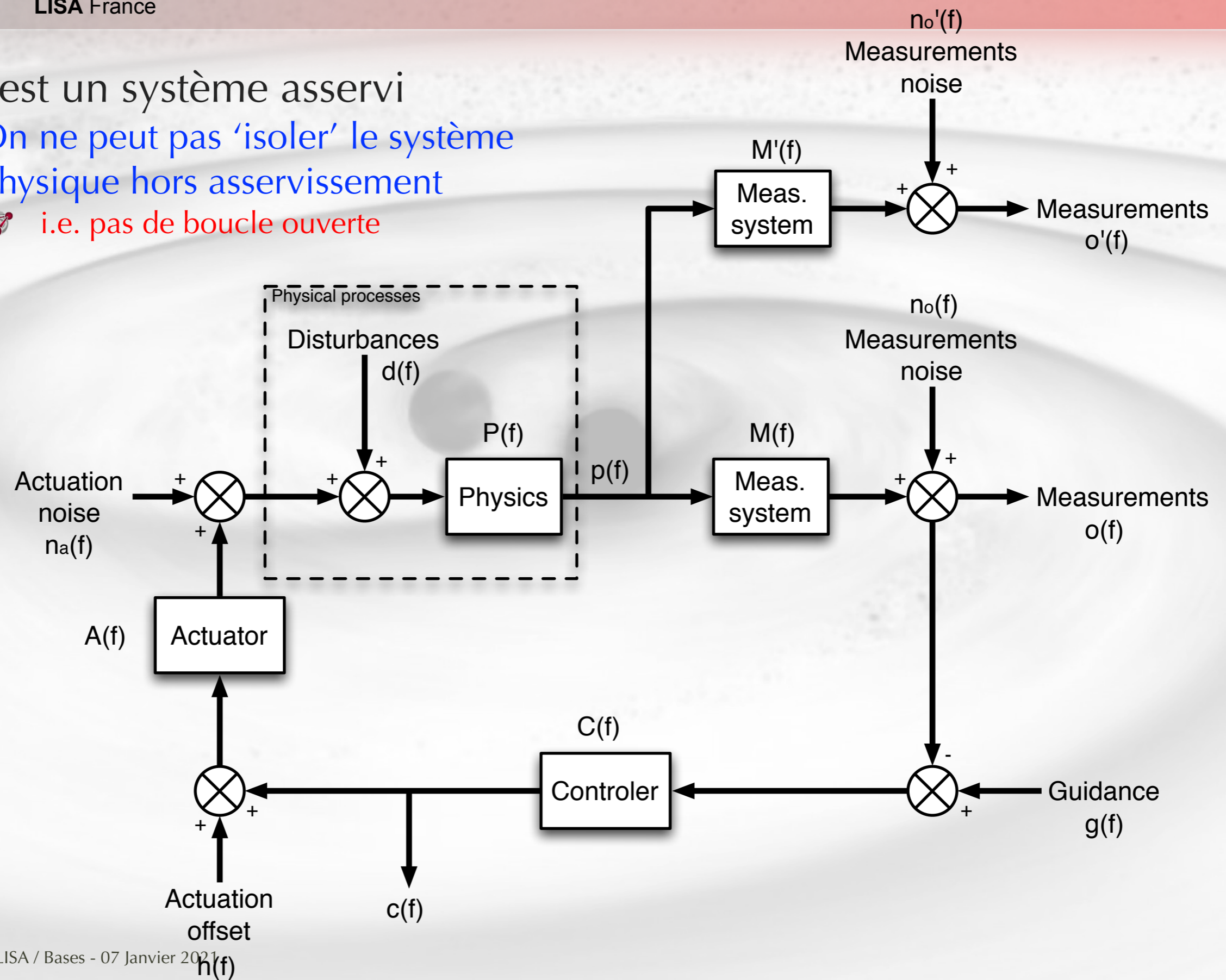




# Systemes asservis

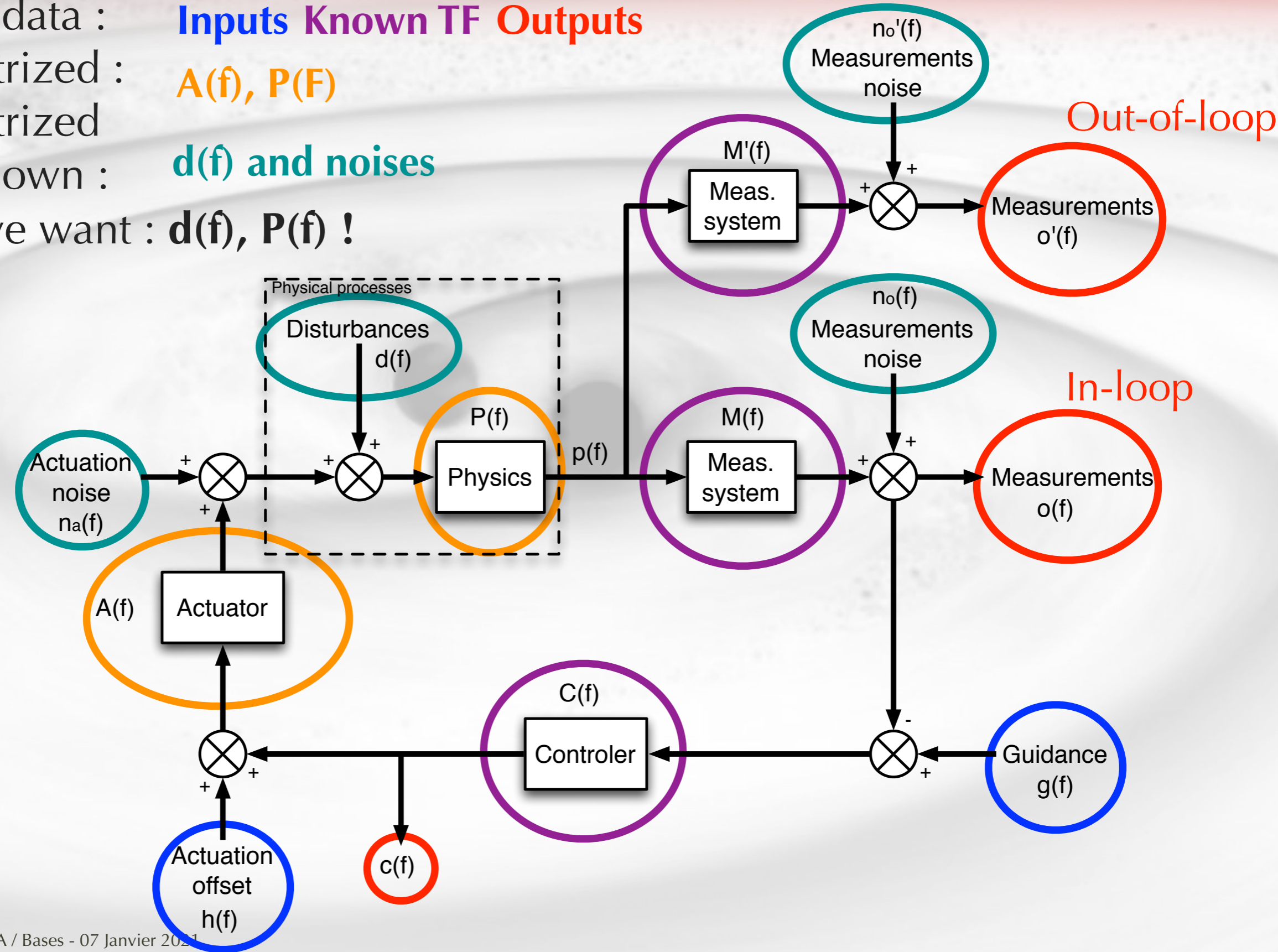
# Schéma général système asservi

- LISA est un système asservi
- On ne peut pas 'isoler' le système physique hors asservissement
- i.e. pas de boucle ouverte



# Characterizing a controlled system

- Known data : **Inputs Known TF Outputs**
- Parametrized :  **$A(f), P(f)$**
- Parametrized or unknown :  **$d(f)$  and noises**
- What we want :  **$d(f), P(f)$  !**



## Equations ...

All variables and TF are complex and frequency dependent

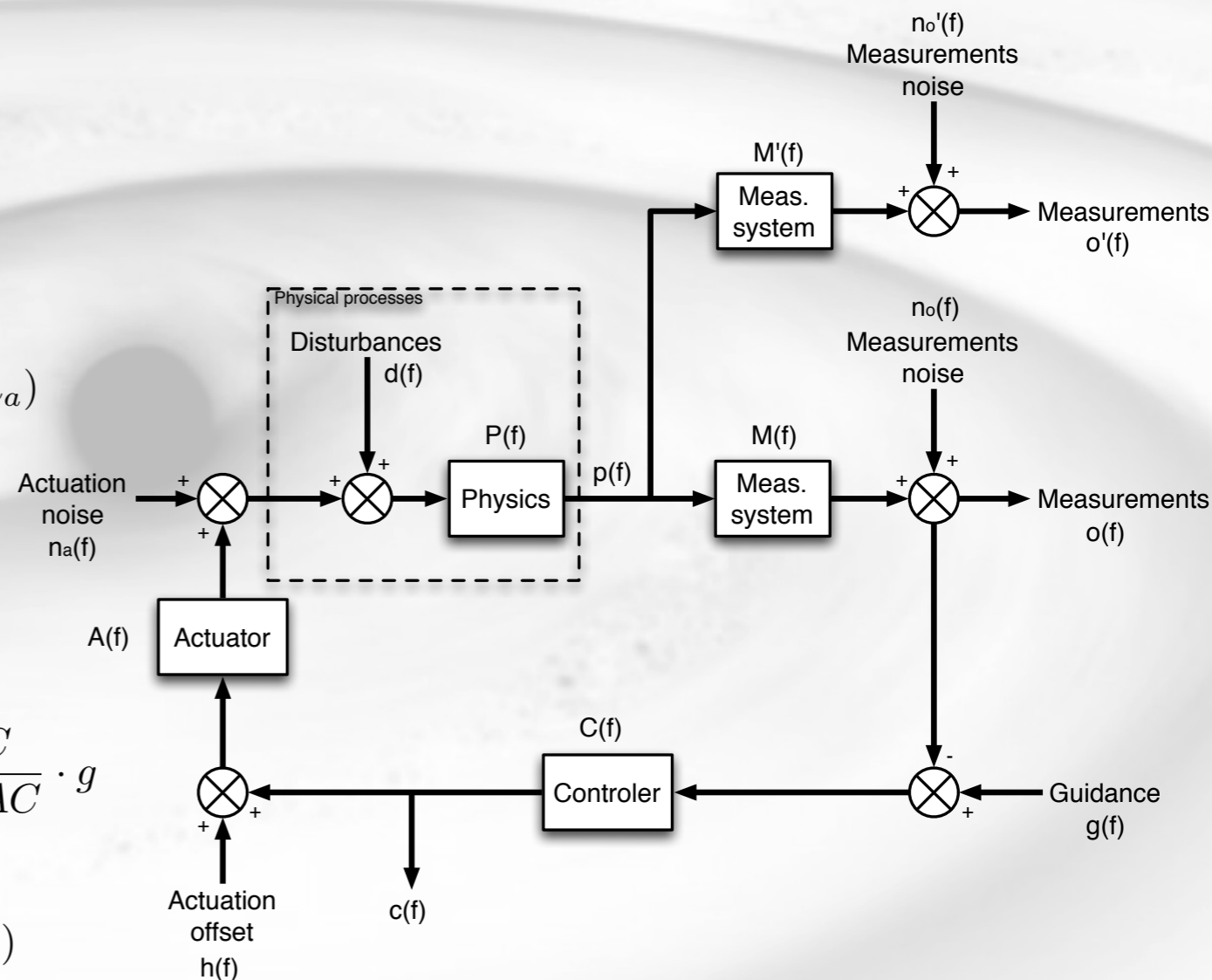
$$o = n_o + MP [d + n_a + A [h + C(g - o)]]$$


$$\Leftrightarrow o = \frac{1}{1 + MPAC} \cdot n_o + \frac{MP}{1 + MPAC} \cdot (d + n_a) + \frac{MPA}{1 + MPAC} \cdot h + \frac{MPAC}{1 + MPAC} \cdot g$$

$$p = (o - n_o) / M = -\frac{PAC}{1 + MPAC} \cdot n_o + \frac{P}{1 + MPAC} \cdot (d + n_a) + \frac{PA}{1 + MPAC} \cdot h + \frac{PAC}{1 + MPAC} \cdot g$$

$$o' = M' \cdot p + n'_o = n'_o - \frac{M'PAC}{1 + MPAC} \cdot n_o + \frac{M'P}{1 + MPAC} \cdot (d + n_a) + \frac{M'PA}{1 + MPAC} \cdot h + \frac{M'PAC}{1 + MPAC} \cdot g$$

$$c = C \cdot (g - o) = -\frac{C}{1 + MPAC} \cdot n_o - \frac{MPC}{1 + MPAC} \cdot (d + n_a) - \frac{MPAC}{1 + MPAC} \cdot h + \frac{C}{1 + MPAC} \cdot g$$




 In the controlled bandwidth, we generally have  $|MPAC| \gg 1$  :

$$o \approx \frac{n_o}{MPAC} + \frac{d + n_a}{AC} + \frac{h}{C} + g$$

$$p \approx \frac{g - n_o}{M} + \frac{d + n_a}{MAC} + \frac{h}{MC}$$

$$o' \approx n'_o + \frac{M'}{M} \cdot (g - n_o) + \frac{M'}{MAC} \cdot (d + n_a) + \frac{M'}{MC} \cdot h$$

$$c \approx \frac{g - n_o}{MPA} - \frac{d + n_a}{A} - h$$

 If normalized to dimensionless quantities, we also often have  $|AC| \gg 1$ ,  $M \sim M'$ ,  $n_o \ll 1$ ,  $n'_o \ll 1$ ,  $n_a \ll 1$  :


$$o \approx \frac{d}{AC} + \frac{h}{C} + g$$

$$p \approx \frac{g - n_o}{M} + \frac{d}{MAC} + \frac{h}{MC}$$

$$o' \approx n'_o + g - n_o + \frac{d}{AC} + \frac{h}{C}$$

$$c \approx \frac{g - n_o}{MPA} - \frac{d + n_a}{A} - h$$

 Case 1: large guidance ( $\gg$  disturbances)

  $g \gg n_0, n_a, d ; h = 0$

 from  $c$  : calibration of  $A$ , or  $P$  (or  $PA...$ )


$$o \approx \frac{d}{AC} + \frac{h}{C} + g$$

$$p \approx \frac{g - n_a}{M} + \frac{d}{MAC} + \frac{h}{MC}$$

$$o' \approx n'_o + g - n_o + \frac{d}{AC} + \frac{h}{C}$$

$$c \approx \frac{g - n_a}{MPA} - \frac{d + n_a}{A} - h$$

 Case 2 : large actuation offset

  $h/C \gg n_0, n_a, d ; g = 0$

 from  $o$  or  $o'$  : calibration of the controller transfer function

$$o \approx \frac{d}{AC} + \frac{h}{C} + g$$

$$p \approx \frac{g - n_0}{M} + \frac{d}{MAC} + \frac{h}{MC}$$

$$o' \approx n_0' + g - n_0 + \frac{d}{AC} + \frac{h}{C}$$

$$c \approx \frac{g - n_0}{MPA} - \frac{d + n_a}{A} - h$$

Case 3 : no injection, small disturbances, negligible actuation noise

- $h=g=0; n_a \ll d \ll 1$
- The in-loop signal ( $o$ ) is almost 0...
- If the (statistical) properties of  $n_o$  and  $n_o'$  are related, then they can be computed from  $o'$  (out-of-loop signal)
- Disturbance value from  $c$

$$\begin{aligned}
 o &\approx \frac{d}{AC} + \frac{h}{C} + g \\
 p &\approx \frac{g - n_o}{M} + \frac{d}{MAC} + \frac{h}{MC} \\
 o' &\approx n_o' + g - n_o + \frac{d}{AC} + \frac{h}{C} \\
 c &\approx \frac{g - n_o}{MPA} - \frac{d + n_a}{A} - h
 \end{aligned}$$