UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

LAPTh

Plan

Introduction à la relativité générale

Principes et formalisme

Tests expérimentaux

Difficultés

Richard Taillet
Juillet 2022

Université Savoie Mont Blanc
LAPTh (Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique Théorique)

Principes

Nécessité d'une théorie relativiste de la gravitation

L'interaction gravitationnelle ne peut pas être instantanée

Elle doit prendre en compte la relativité restreinte

Programme mené à bien par Albert Einstein en 1915

(avec la participation de Marcel Grossman et David Hilbert)

Principes

Quelques rappels de mécanique newtonienne

Principes

Universalité de la chute libre :

« Les objets lancés ou lâchés de la même façon et soumis à la gravitation tombent de la même façon, indépendamment de leur masse »

$$m_i \, \vec{a} = m_g \, \vec{g}$$

égalité de la masse grave et de la masse inertielle

Principes

$$\vec{a} = \qquad \vec{g}$$

égalité de la masse grave et de la masse inertielle

Principes

Dans le référentiel en chute libre

$$m\,\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_i$$

$$m\,\vec{a} = m\vec{g} - m\vec{a}_e = \vec{0}$$

Principe d'équivalence :

« Les lois de la physique,
pour un observateur en chute libre dans un champ gravitationnel,
sont localement identiques à celles en l'absence de gravitation »

Principes

une autre façon de raconter l'histoire

Principes

Dans un référentiel en chute libre $m_i \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$

Dans le référentiel qui nous intéresse (le laboratoire)

$$m_i \overrightarrow{a} = - m_i \overrightarrow{a}_e$$

Principes

Dans un référentiel en chute libre $\cancel{m_i}\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$

Dans le référentiel qui nous intéresse (le laboratoire)

$$\cancel{m_i}\overrightarrow{a} = -\cancel{m_i}\overrightarrow{a}_e$$

Principes

Dans un référentiel en chute libre $\vec{a} = \vec{0}$

Dans le référentiel qui nous intéresse (le laboratoire)

$\vec{a} = -$ $\vec{a}_e = \vec{g}$

Principes

Qu’est-ce que ça donne en relativité restreinte ?

Principes

Dans un référentiel en chute libre $\vec{a} = \vec{0}$

Dans le référentiel qui nous intéresse (le laboratoire)

$$\vec{a} = -\vec{a}_e = \vec{g}$$

Principes

Dans un référentiel en chute libre

$$\vec{a} = \vec{0}$$

$$\frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2} = 0$$

Dans le référentiel qui nous intéresse (le laboratoire)

$$\xi^\mu \to x^\mu(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$$

$$\vec{a} = -\vec{a}_e = \vec{g}$$

$$\sum_{\alpha=0}^{3}\sum_{\beta=0}^{3}\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}$$

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

Principes

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

Principes

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

où $\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \sum_{\sigma=0}^{3} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\sigma}\frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\sigma}\frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$$

c’est la **connexion affine**

Elle décrit les forces d’inertie

Principes

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

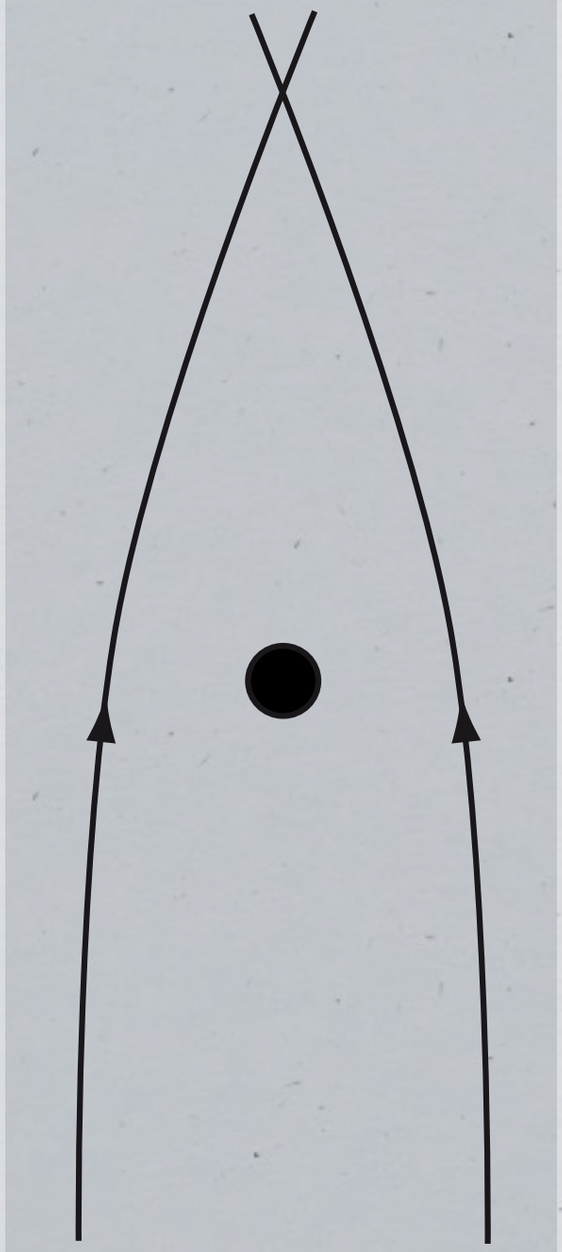
c’est l’**équation des géodésiques**

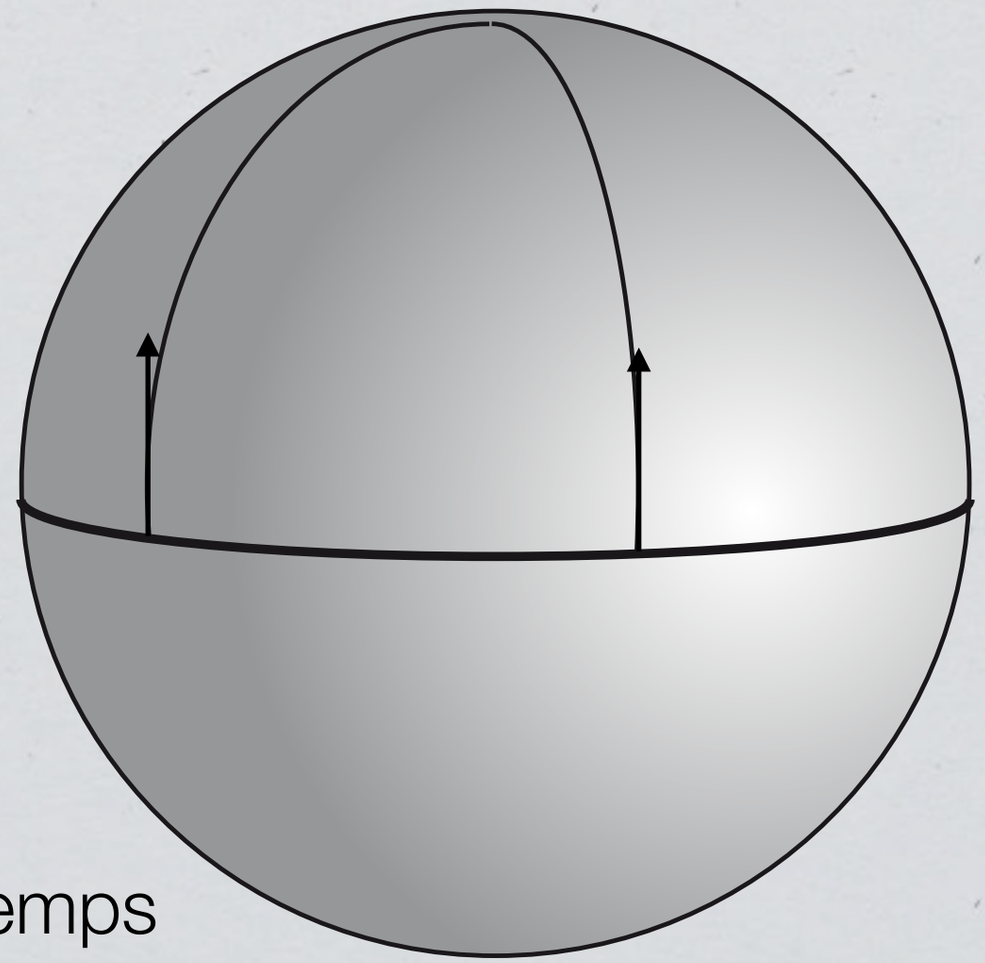
Elle donne l’équation des lignes droites dans n’importe quel système de coordonnées

Elle donne l’équation des chemins les plus courts sur des surfaces courbes

Principes

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$





la gravitation est une
manifestation de la
courbure de l’espace-temps

Principes

La courbure de l’espace-temps : géométrie

Principes

Dans l'espace-temps usuel (plat) de la RR, l'**intervalle** est défini par

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

cette relation définit la géométrie de l'espace-temps

Trajectoires des particules sans masse : $ds^2 = 0$

Principes

Dans l'espace-temps usuel (plat) de la RR, l'**intervalle** est défini par

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

réécriture compacte

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, d\xi^\mu\, d\xi^\nu$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

tenseur métrique

$g_{\mu\nu}$

Dans un référentiel accéléré ou
dans un espace-temps courbe

détermine la relation entre
coordonnées et « distances »
(géométrie)

Principes

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, d\xi^\mu\, d\xi^\nu$$

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$$

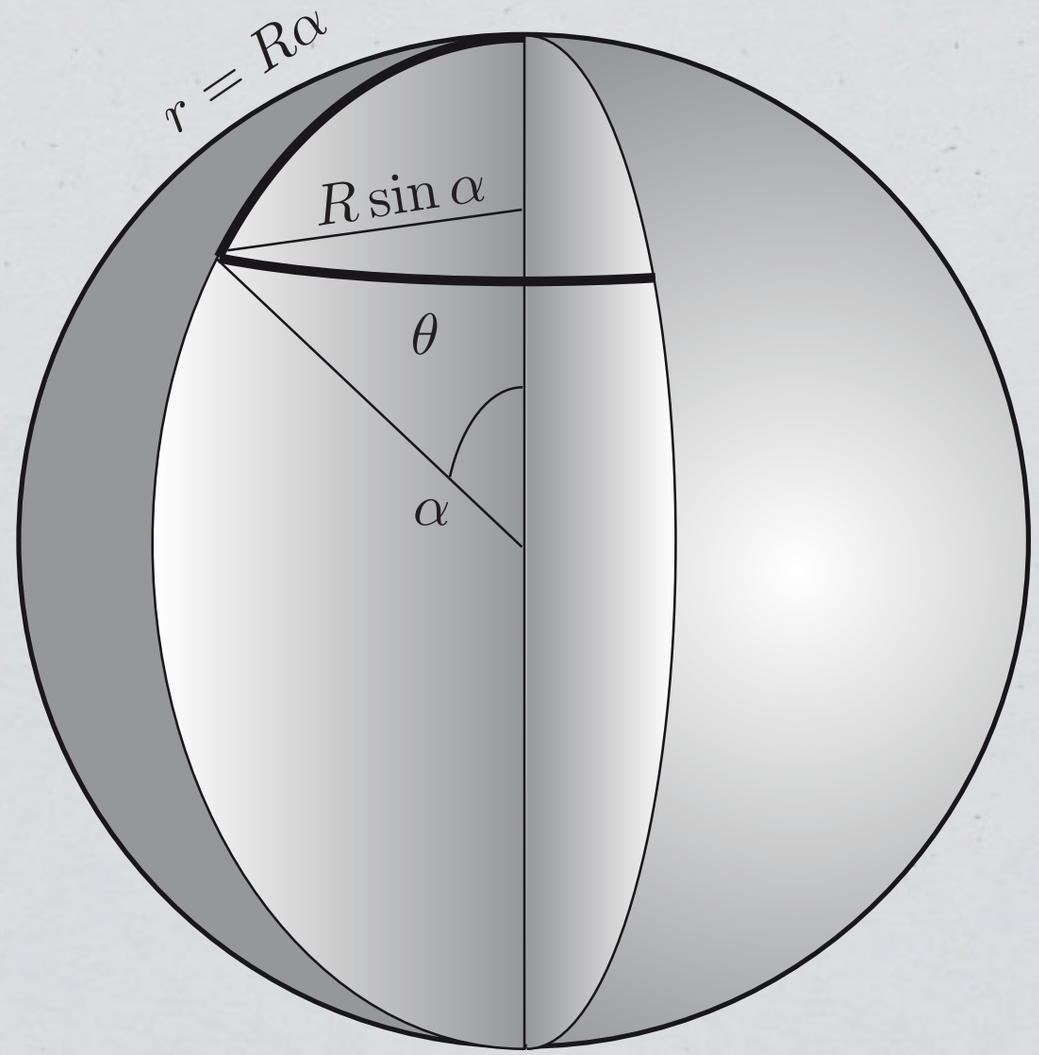
$g_{\mu\nu}$

Principes

Dans un référentiel accéléré ou dans un espace-temps courbe

détermine la relation entre coordonnées et « distances » (géométrie)

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$$



$$d\ell^2 = R^2\, d\alpha^2 + R^2 \sin^2\alpha\, d\theta^2$$

$$d\ell^2 = dr^2 + R^2 \sin^2\left(\frac{r}{R}\right)\, d\theta^2$$

$g_{\mu\nu}$

Principes

Dans un référentiel accéléré ou
dans un espace-temps courbe

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$$

c’est aussi un potentiel gravitationnel

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}$$

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\sigma\mu}\left(\frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma}\right)$$

$g_{\mu\nu}$

$g_{\mu\nu}$

La gémunustique, sport de l’extrême !

Principes

Remarques

Remarque #1 sur le potentiel gravitationnel

La présence d'un champ gravitationnel
affecte les distances et les durées

$$ds^2 = g_{00}\,dt^2 + 2\,g_{10}\,dt\,dx + 2\,g_{20}\,dt\,dy + 2\,g_{30}\,dt\,dz$$
$$+ g_{11}\,dx^2 + 2\,g_{12}\,dx\,dy + 2\,g_{13}\,dx\,dz + 2\,g_{23}\,dy\,dz + g_{33}\,dz^2$$

MATTHEW McCONAUGHEY

ANNE HATHAWAY

JESSICA CHASTAIN

MICHAEL AND CAINE

A FILM BY CHRISTOPHER NOLAN

INTERSTELLAR

THE END OF EARTH WILL NOT BE THE END OF US.

WARNER BROS. PICTURES AND PARAMOUNT PICTURES PRESENT
IN ASSOCIATION WITH LEGENDARY PICTURES A SYNCOPY/LYNDA OBST PRODUCTIONS PRODUCTION A FILM BY CHRISTOPHER NOLAN "INTERSTELLAR"
MATTHEW McCONAUGHEY ANNE HATHAWAY JESSICA CHASTAIN BILL IRWIN ELLEN BURSTYN AND MICHAEL CAINE COSTUMES DESIGNED BY MARY ZOPHRES
MUSIC BY HANS ZIMMER EDITOR LEE SMITH, A.C.E. PRODUCTION DESIGNER NATHAN CROWLEY DIRECTOR OF PHOTOGRAPHY HOYTE VAN HOYTEMA, F.S.F., N.S.C.
EXECUTIVE PRODUCERS JORDAN GOLDBERG JAKE MYERS KIP THORNE THOMAS TULL WRITTEN BY JONATHAN NOLAN AND CHRISTOPHER NOLAN
PRODUCED BY EMMA THOMAS CHRISTOPHER NOLAN LYNDA OBST DIRECTED BY CHRISTOPHER NOLAN

LEGENDARY

twitter.com/InterstellarUK

NOVEMBER 7

facebook.com/Interstellarmovie

WARNER BROS. PICTURES
©2014 Warner Bros. All Rights Reserved

Remarque #2 sur le potentiel gravitationnel

$\frac{GM}{r}$ a la dimension physique de v^2

La gravitation n'introduit pas de nouvelle grandeur physique

$\frac{GM}{c^2}$ a la dimension physique d'une longueur

Principes

Rayon de Schwarzschild

$$r_s \equiv \frac{2GM}{c^2} \approx \left(\frac{M}{M_\odot}\right) \times 2{,}97\ \mathrm{km}$$

environ 3 km pour le Soleil,

environ 1 cm pour la Terre,

quelques millions de km pour un trou noir supermassif

Principes

La courbure détermine le mouvement

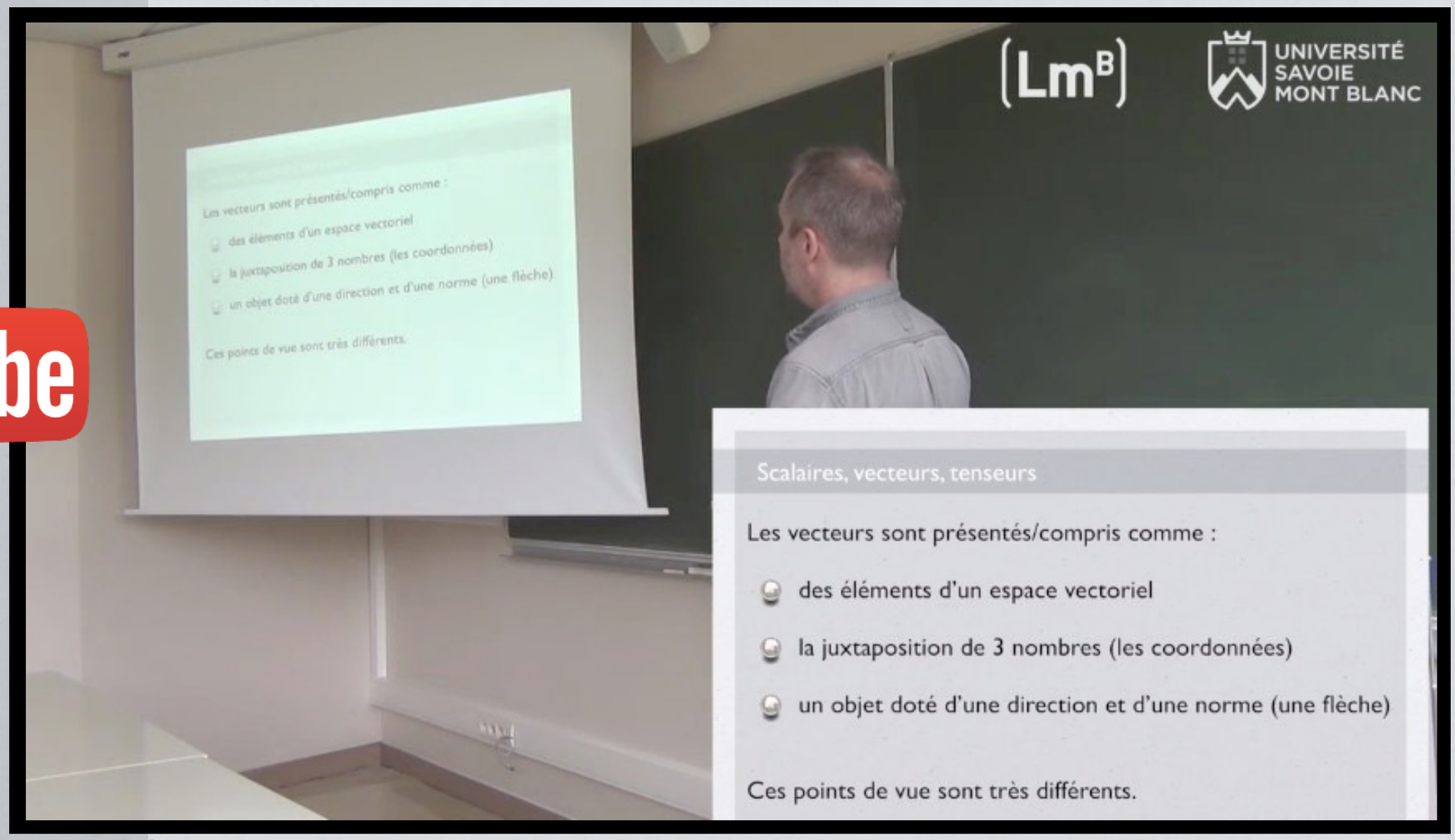
La courbure (la métrique) est déterminée par le contenu de l'univers

Principes

Covariance

Principes

« Conférence sur les grandeurs physiques »



YouTube

https://www.youtube.com/watch?v=Z1Ii_c7-D1k

Principes

Métrique de Schwarzschild

dans le vide

pas de charge électrique

distribution de masse à symétrie sphérique

isotropie

conditions aux limites plates

coordonnées sphériques

constante cosmologique nulle

Métrique de Schwarzschild

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{r_s}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$$\frac{r_s}{r} = \frac{2GM}{rc^2} = \frac{2\phi}{c^2}$$

$\frac{r_s}{r} \approx 10^{-9}$ à la surface de la Terre

$\frac{r_s}{r} \approx 10^{-6}$ à la surface du Soleil

Principes

Remarque sur la géométrie

$$ds^2 = \cancel{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2} - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - \cancel{r^2 \sin^2\theta d\phi^2}$$

temps fixé

plan équatorial

$$d\ell^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2\, d\theta^2$$

distance radiale entre deux points

$$\Delta\ell_{AB} \approx r_B - r_A + \frac{1}{2} r_s \ln\left(\frac{r_B}{r_A}\right)$$

circonférence d'un cercle de rayon-coordonnée r

$$\mathscr{C} = 2\pi r$$

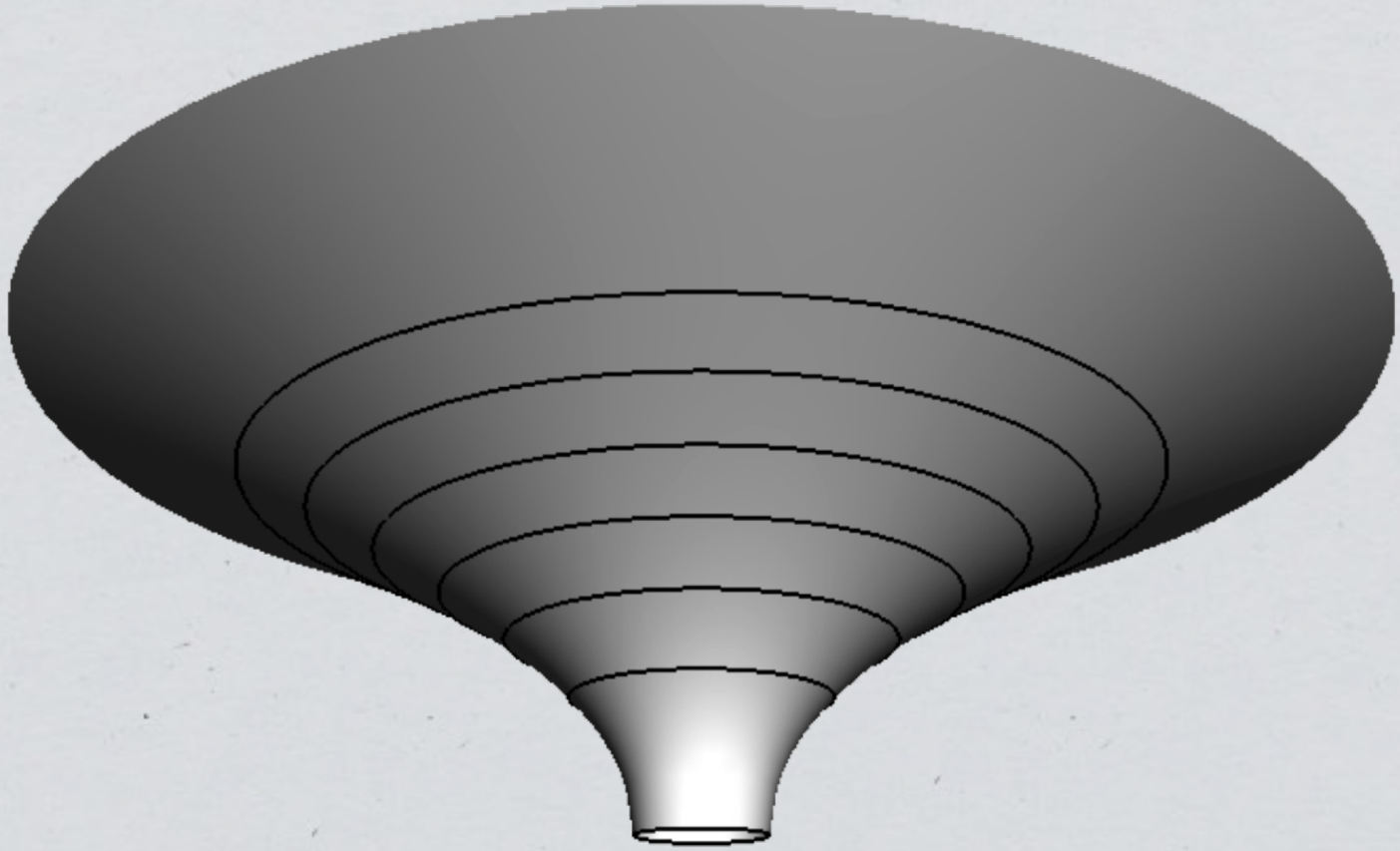
Remarque sur la géométrie

pour la métrique de Schwarzschild, dans le plan équatorial :

$$\Delta \ell_{AB} \approx r_B - r_A + \frac{1}{2} r_s \ln\left(\frac{r_B}{r_A}\right)$$

$$\mathscr{C} = 2\pi r$$

paraboloïde de Flamm



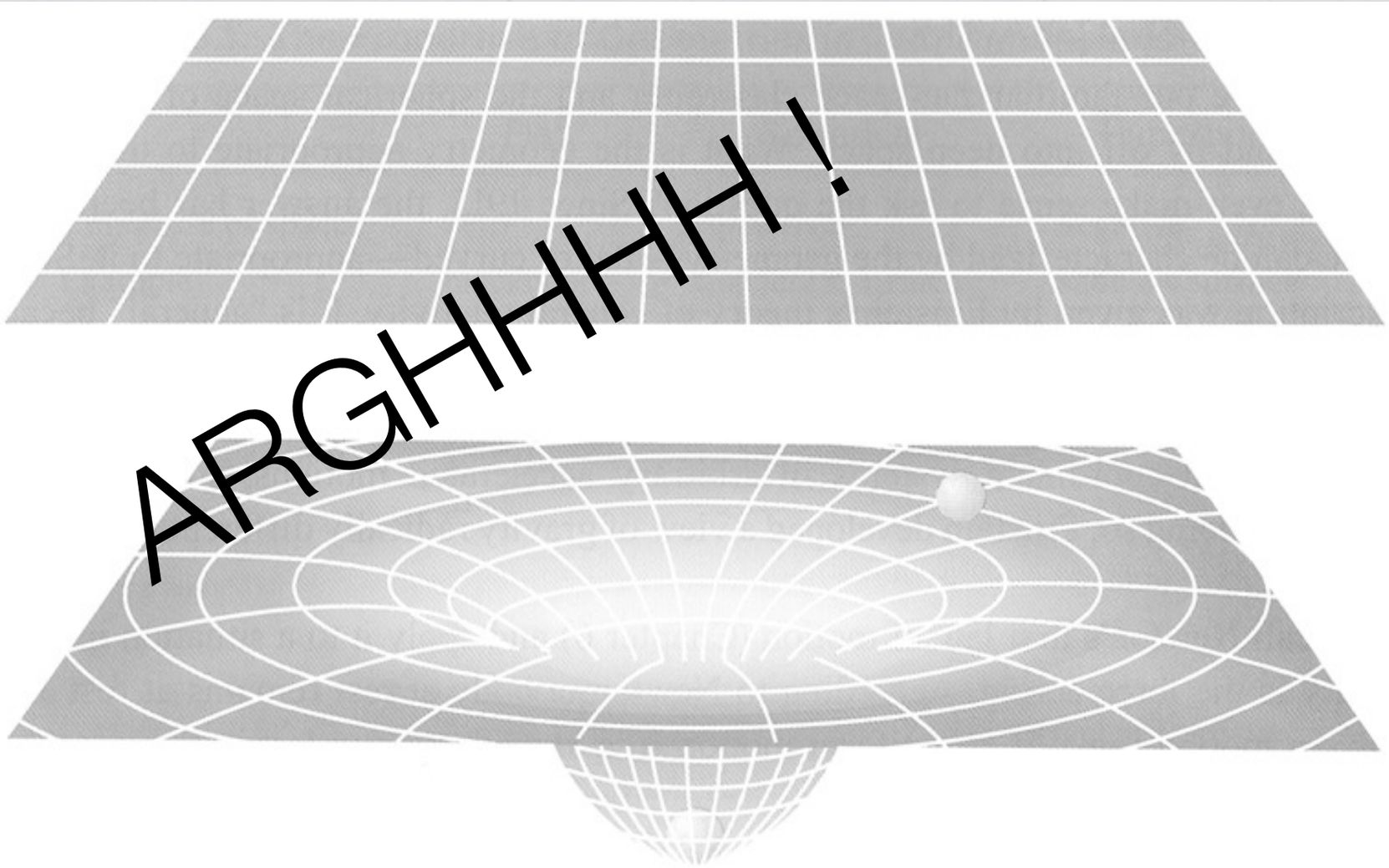
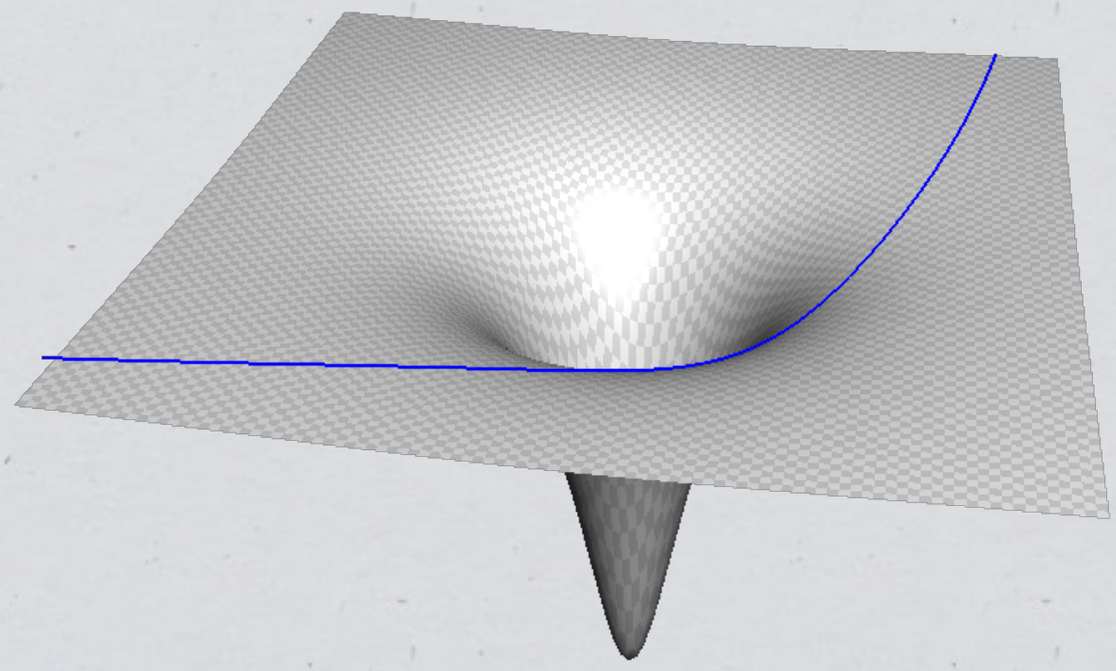
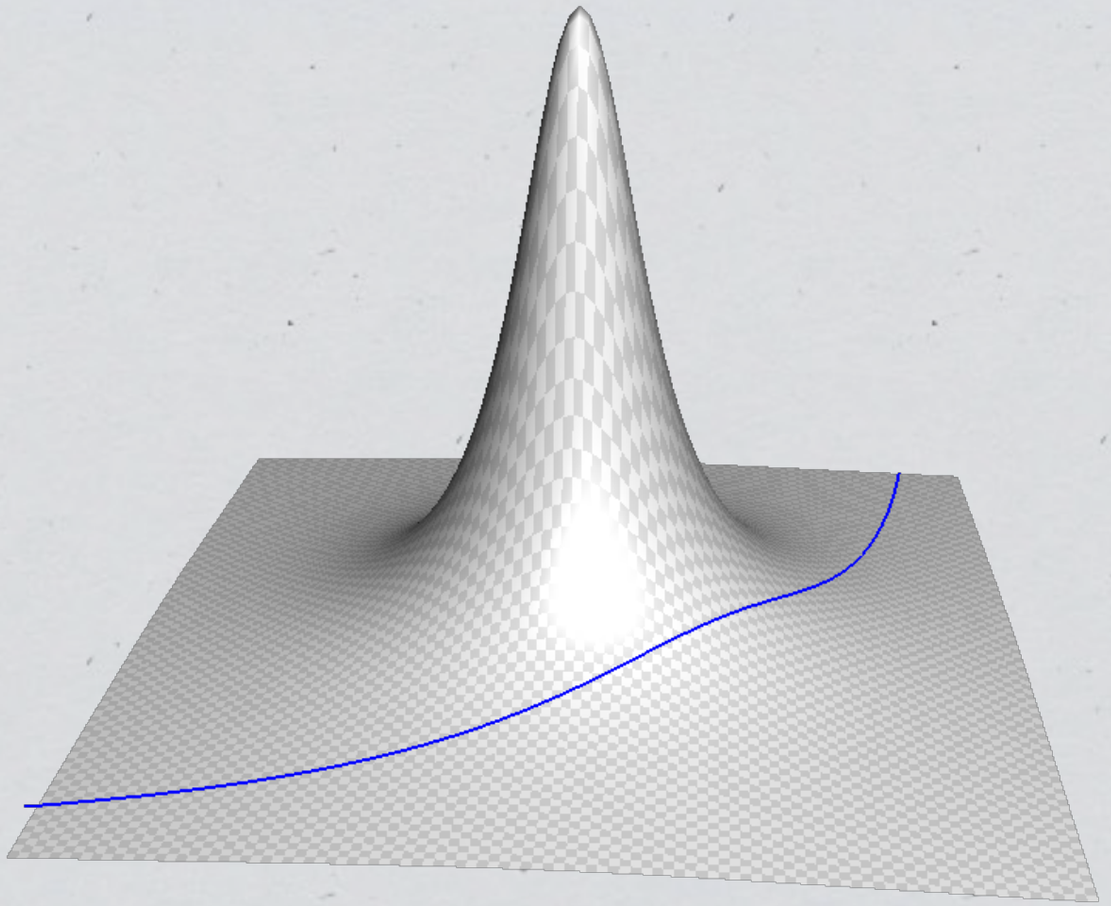


Figure 15.7. The figure suggests how flat spacetime (the uniformly spaced grid) would be distorted by the presence of a mass. Since it is the curvature of spacetime that determines how objects move, all objects, regardless of their mass, would "fall" toward the massive object at the same rate.

Principes





Dessine-moi un trou noir !

08.12.2013 | par Richard Taillet | Regards

| **Richard Taillet**

| À propos de ce blog

| Page d'accueil du blog

Chercher dans Signal sur | Chercher

Dans de nombreuses présentations de la relativité générale au grand public (et parfois à des étudiants), au moment d'expliquer que la gravitation est due à la courbure de l'espace-temps, on voit très souvent présenté le schéma suivant.

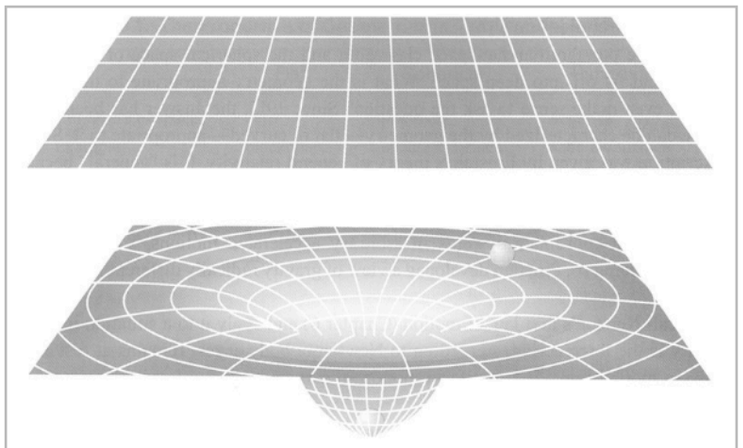


Figure 15.7. The figure suggests how flat spacetime (the uniformly spaced grid) would be distorted by the presence of a mass. Since it is the curvature of spacetime that determines how objects move, all objects, regardless of their mass, would "fall" toward the massive object at the same rate.

Articles récents

- Parcours sup, et après ? Épisode 2 : l'accueil des « oui si » à l'université

Principes

Bref…

La métrique de Schwarzschild permet de calculer
les mouvements autour d’une masse à symétrie sphérique

Tests expérimentaux

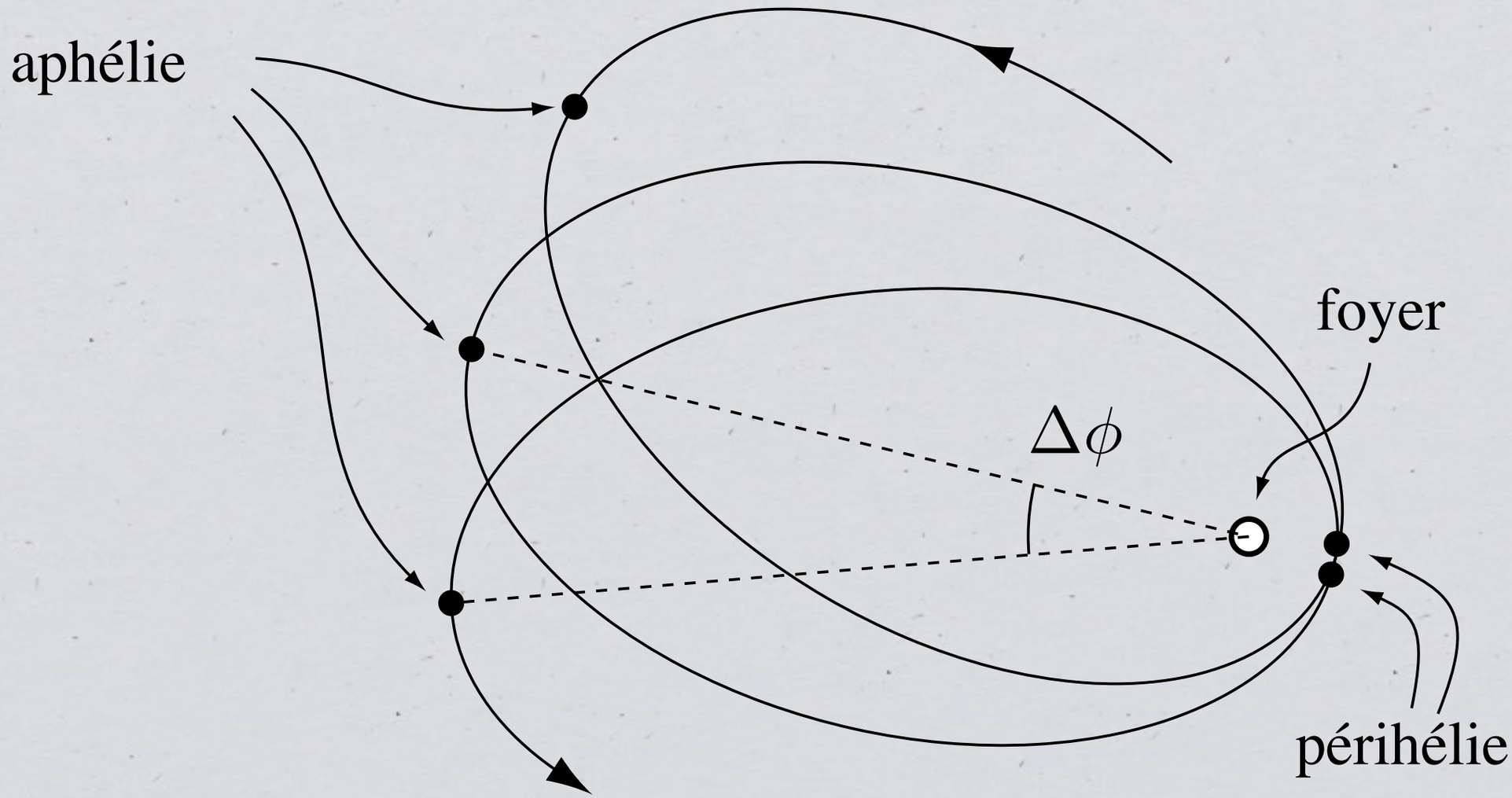
#0 *Tests expérimentaux*

Succès théorique :

on peut formuler une théorie relativiste de la gravitation !

#1 *Tests expérimentaux*

Avance du périhélie de Mercure (1915)



#1 *Tests expérimentaux*

Avance du périhélie de Mercure (1915)

$$\Delta\phi = \frac{3\pi r_s}{a(1-e^2)}$$

Avance observée : 5600"/siècle

Contribution purement astronomique : 5026"/siècle

Perturbations gravitationnelles : 531"/siècle

Anomalie : 43"/siècle

Remarque : mesuré pour d’autres corps (3,8"/siècle pour la Terre)

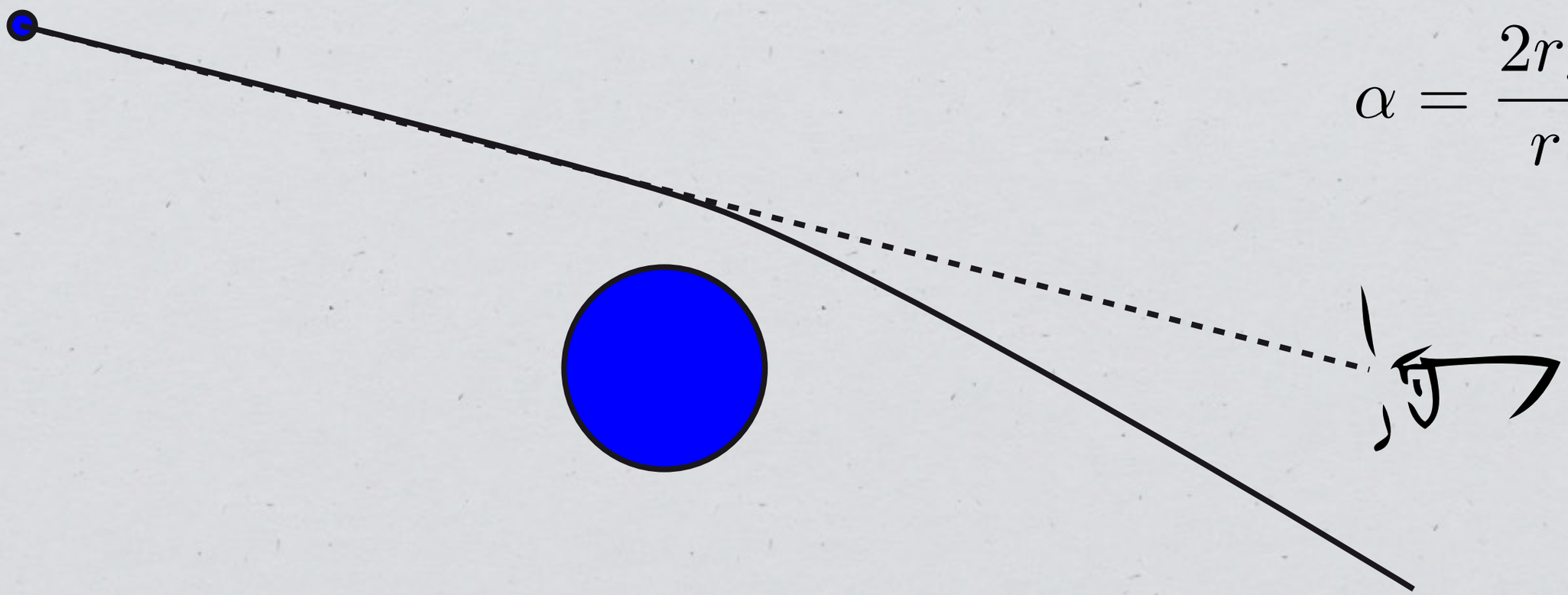
#2 *Tests expérimentaux*

Déviation gravitationnelle des rayons lumineux (1919)

#2 *Tests expérimentaux*

Déviation gravitationnelle des rayons lumineux (1919)

$$\alpha = \frac{2r_s}{r}$$

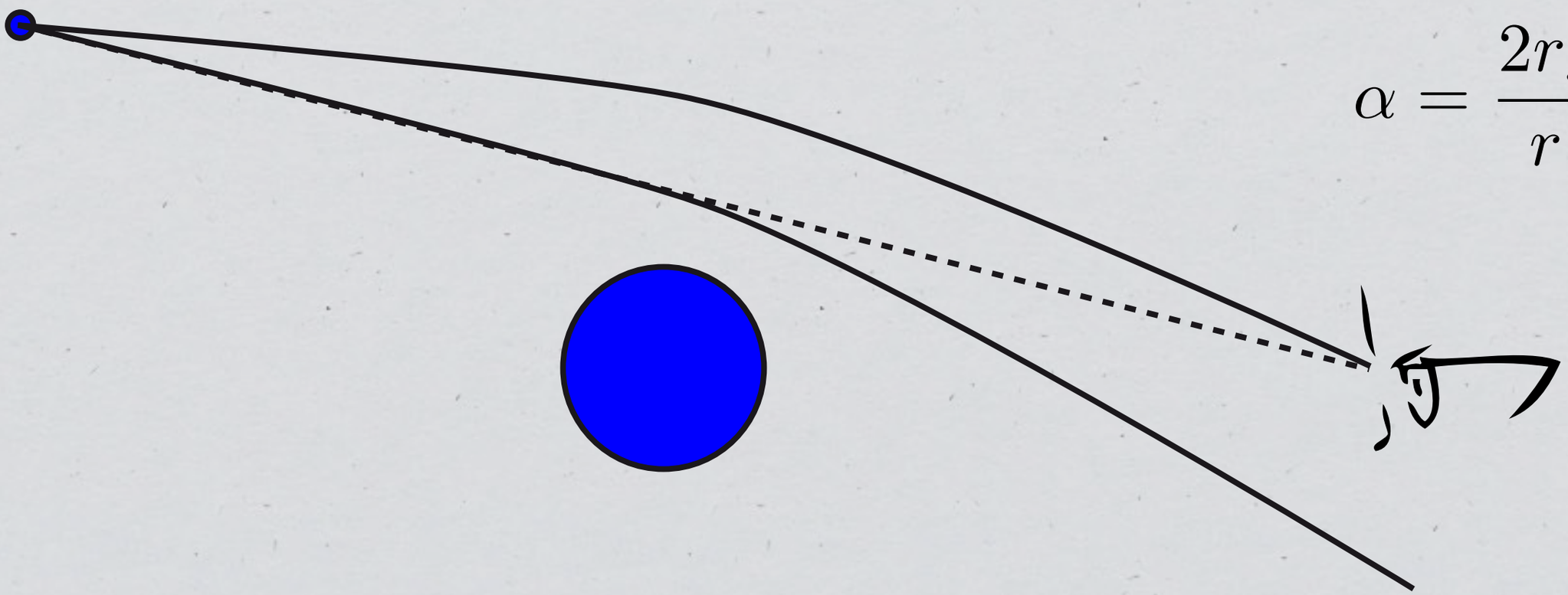


1,75 seconde d’arc pour le bord du Soleil

#2 *Tests expérimentaux*

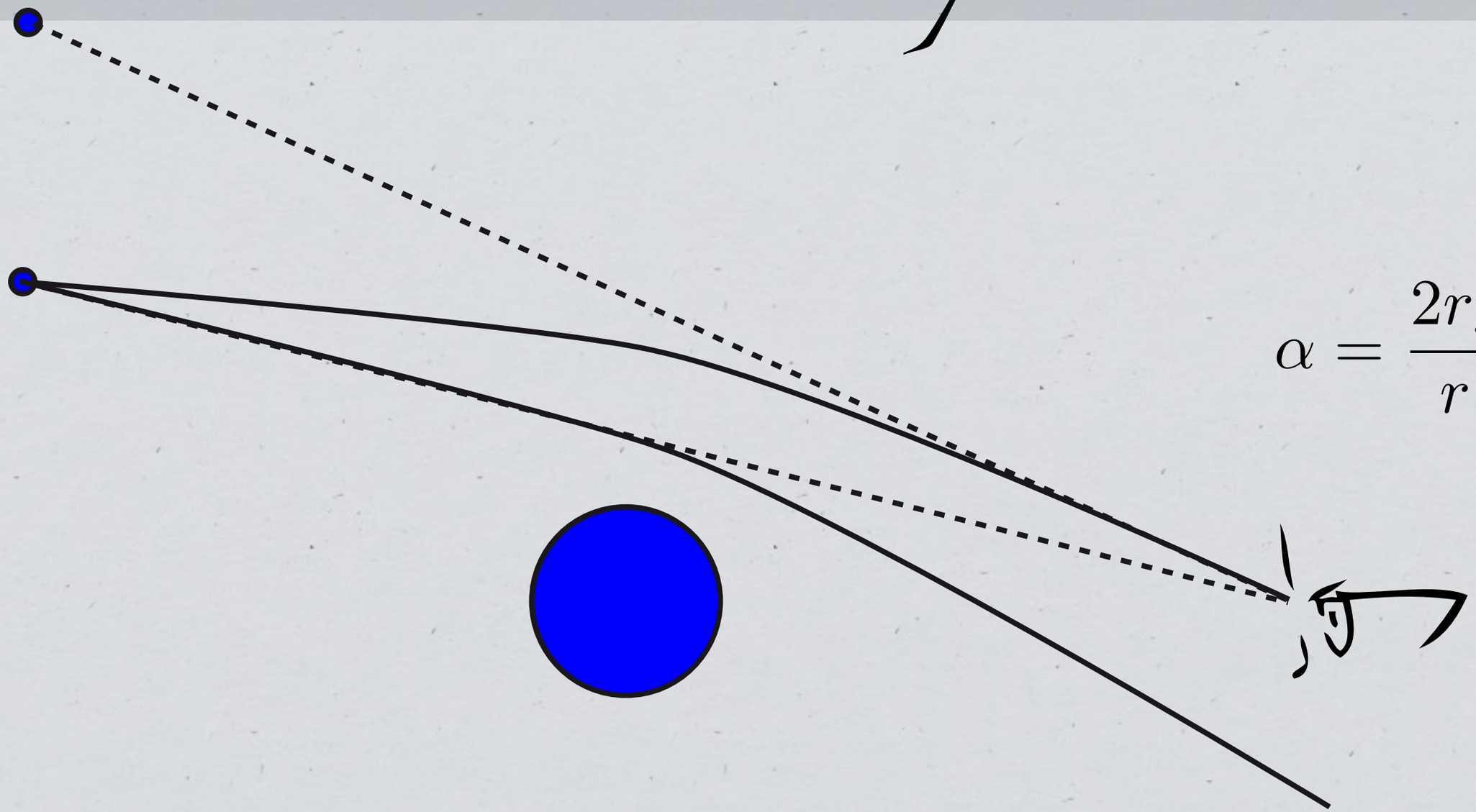
Déviation gravitationnelle des rayons lumineux (1919)

$$\alpha = \frac{2r_s}{r}$$



1,75 seconde d’arc pour le bord du Soleil

#2 *Tests expérimentaux*

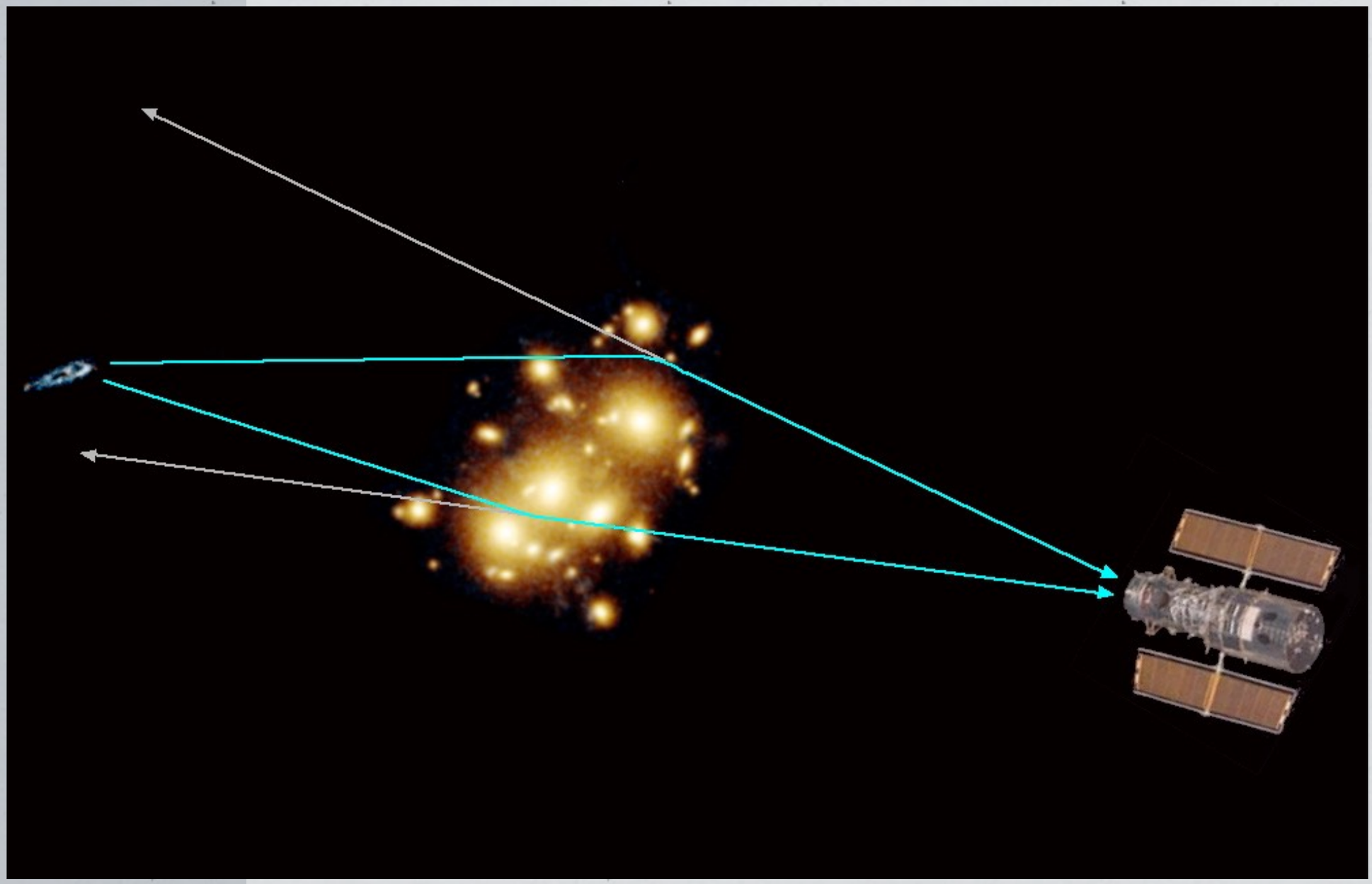


$$\alpha = \frac{2r_s}{r}$$

1,75 seconde d’arc pour le bord du Soleil

#2

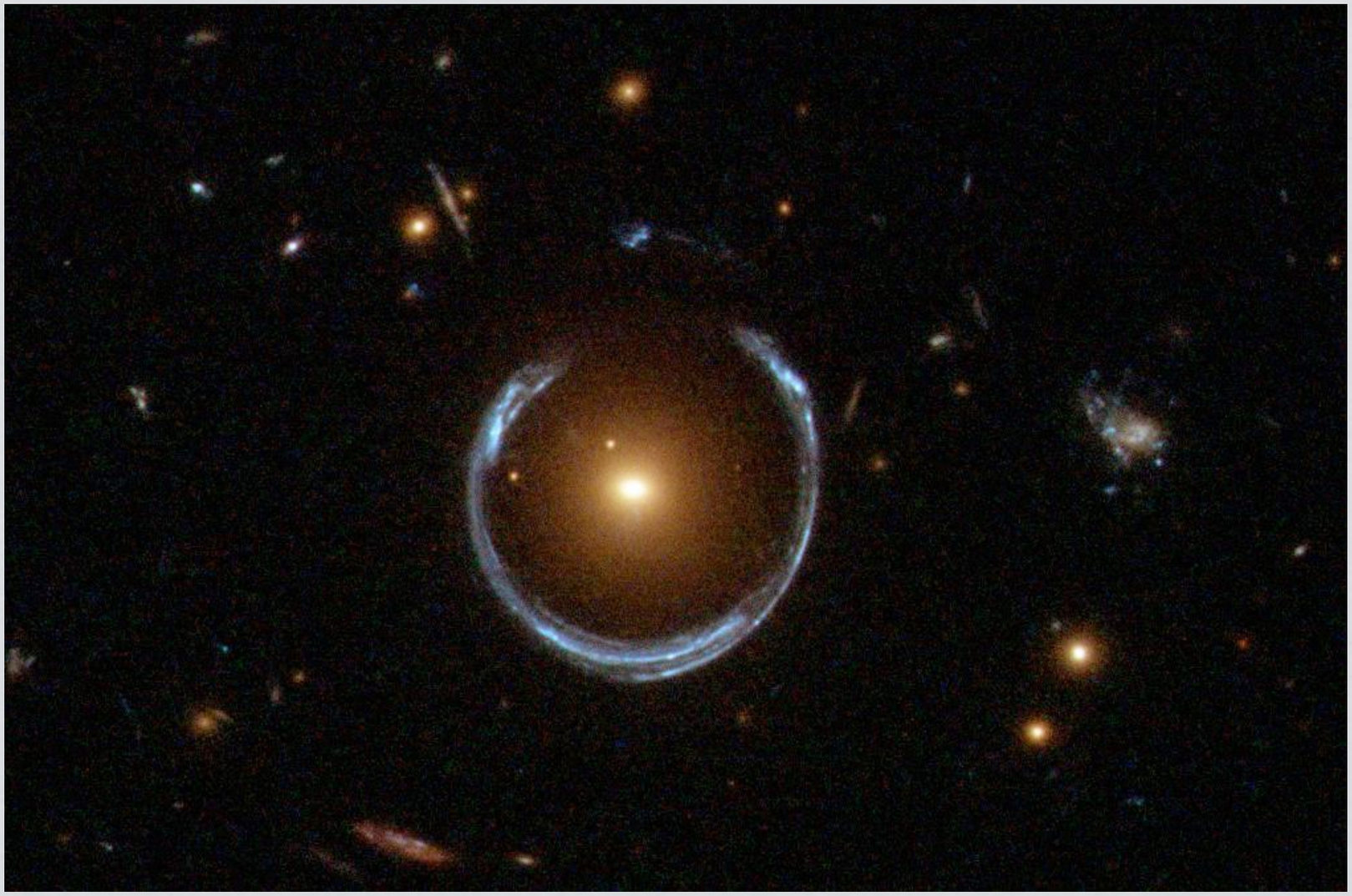
Tests expérimentaux



#2

Tests expérimentaux

Lentilles gravitationnelles



#3 *Tests expérimentaux*

Expérience de Pound et Rebka (1959)

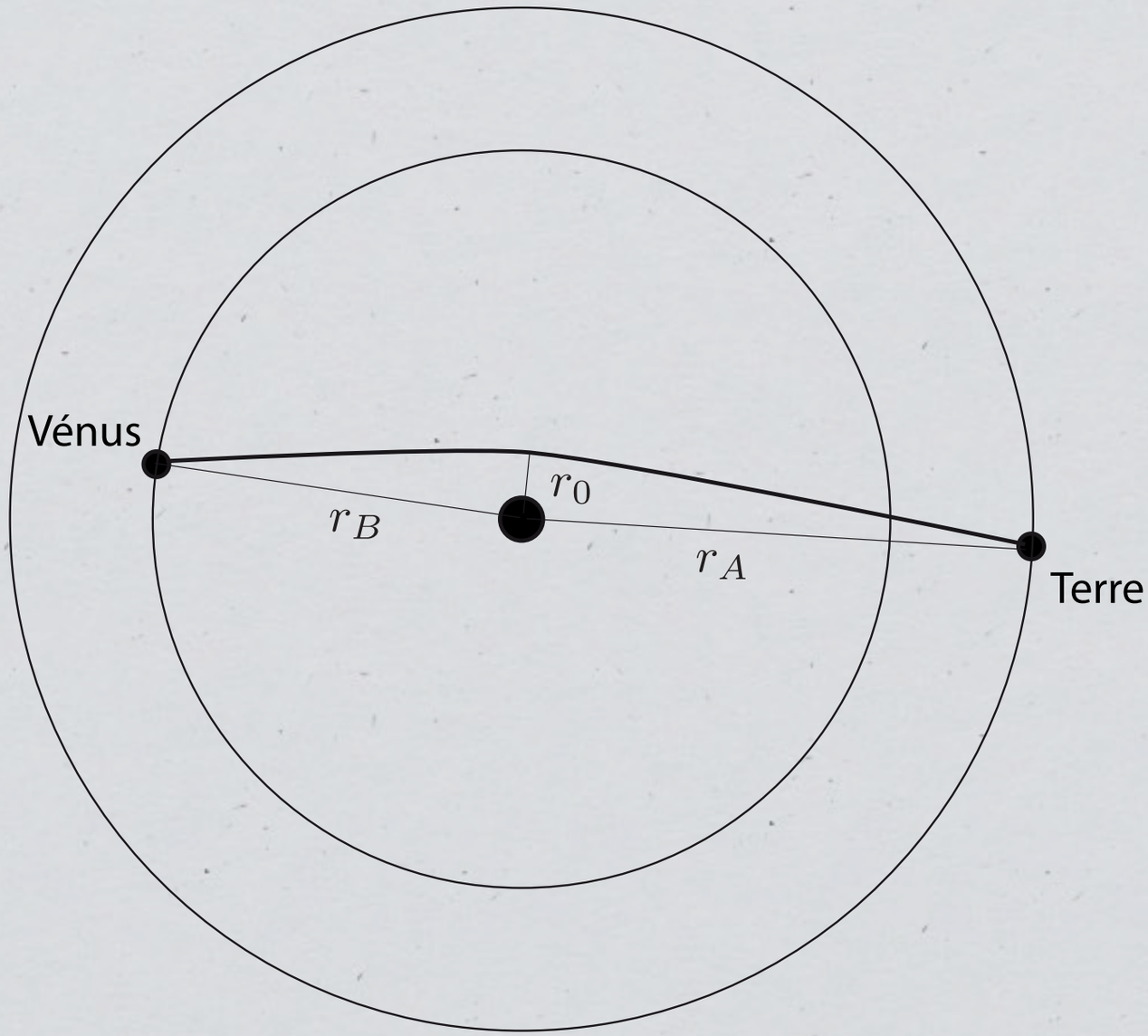
$$\frac{\Delta f}{f} \approx \frac{1}{2}\frac{r_s}{r}\frac{\Delta r}{r} \approx 2{,}5 \times 10^{-15}$$

Expérience de Hafele & Keating (1971)

GPS (Global Positioning System)

#4 *Tests expérimentaux*

Retard de l'écho radar : effet Shapiro (prédit 1964 - mesuré 1968)



#4

Tests expérimentaux

#4 *Tests expérimentaux*

Retard de l'écho radar : effet Shapiro (prédit 1964 - mesuré 1968)

$$\Delta t = \frac{r_s}{c}\left[1 + \ln\left(\frac{4r_1 r_2}{r_0^2}\right)\right]$$

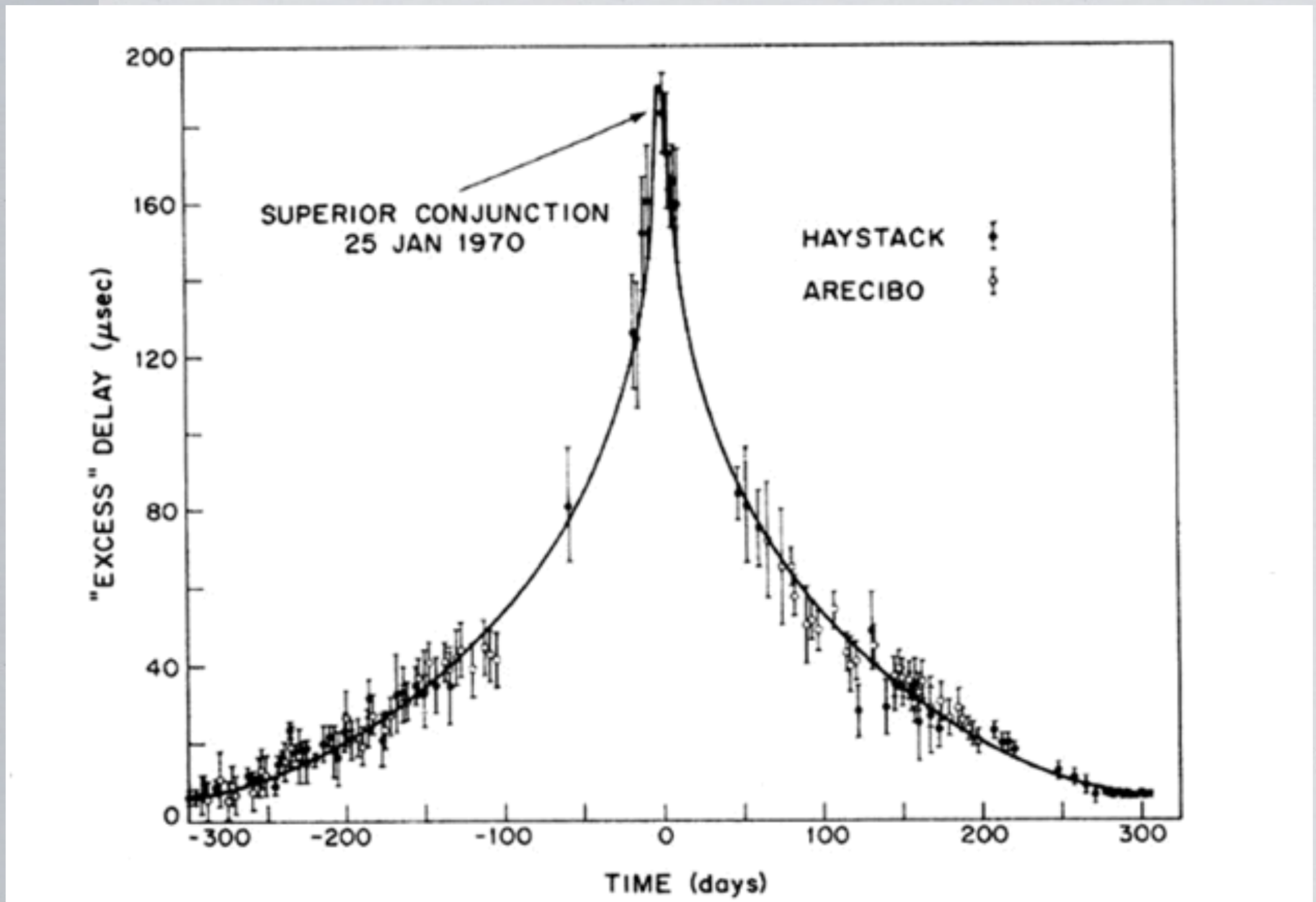
$$r_s/c \approx 10\ \mu\mathrm{s}$$

Quelques centaines de microsecondes pour Vénus et Mercure.

On utilise aussi les sondes du Système solaire.

#4

Tests expérimentaux



Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society 4 (1963) p. 347

Planetary Radar

J. H. Thomson

(A Council Report on the Progress of Astronomy)

Summary

The discussion is confined to radar studies of the planets, lunar and solar radar being excluded. There are two limiting cases of radar systems, pulse and continuous wave; the former enables the range and angular power spectrum of the target planet to be measured, the latter the line of sight velocity and the frequency spectrum. Actual radar systems are often a combination of the two. Methods are described for measuring the rotation of the target, and for mapping its surface. The probable strength of echoes is discussed; present techniques allow the three inner planets to be detected. Necessary computational and electronic techniques are discussed. The history of the subject since 1958 is recorded. Obser-

#5 *Tests expérimentaux*

Effet Einstein-de Sitter ou précession géodétique (1916/1988)

$$\Omega \approx \frac{3c}{2r}\left(\frac{r_s}{2r}\right)^{3/2}$$

quelques arcsec/siècle

vérifié en 1988 (système Terre-Lune)

puis en 2011 par Gravity Probe B

#6 *Tests expérimentaux*

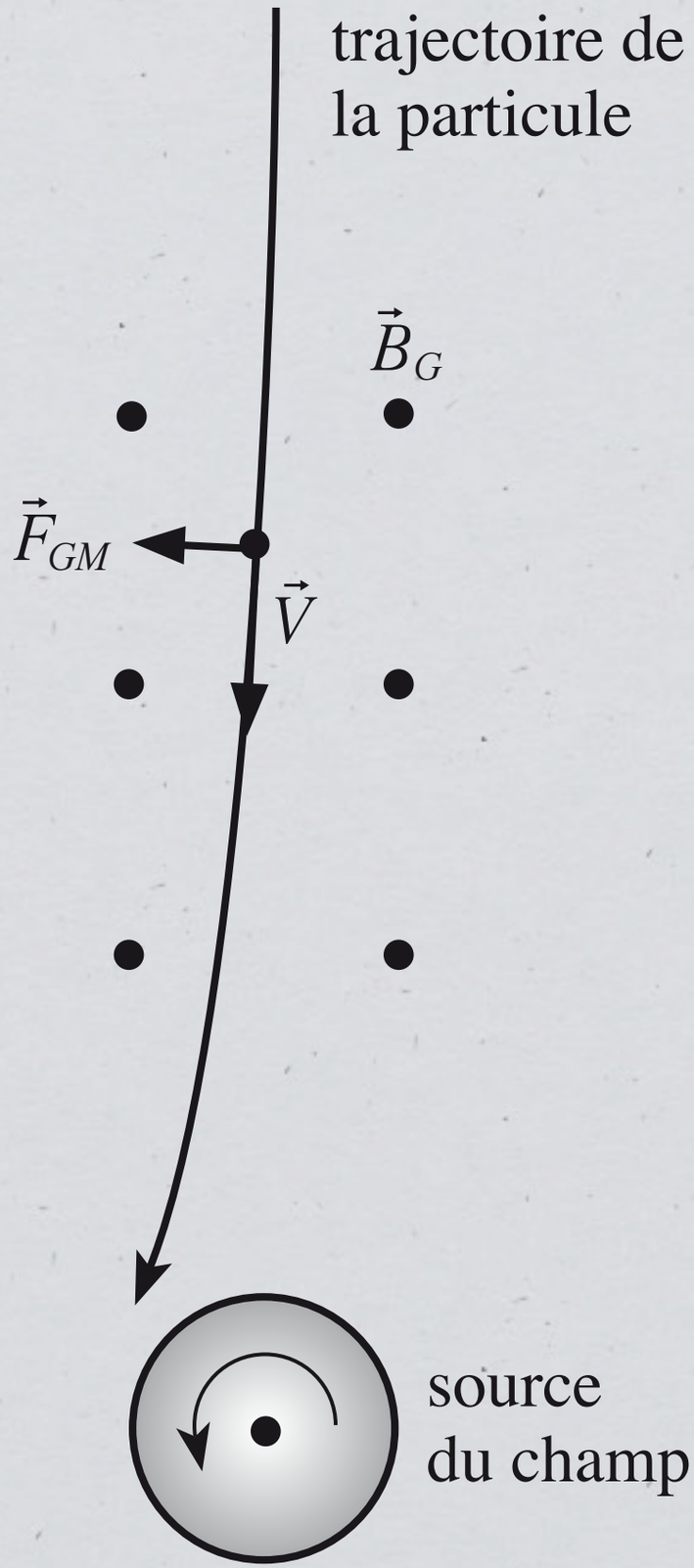
Entraînement des référentiels : effet Lense-Thirring (1918/2004)

gravitomagnétisme

$$\vec{F} = m(\vec{E_G} + \vec{v} \wedge 4\vec{B_G})$$

$$\vec{E_G} \equiv -\vec{\nabla}\Phi_G - \frac{\partial \vec{A}_G}{\partial t} \qquad \Phi_G = -\iiint \frac{G\rho_0}{r}\, d^3V$$

$$\vec{B_G} \equiv \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_G \qquad A_G^i = -\iiint \frac{GJ_i}{r}\, d^3V$$


trajectoire de
la particule
$\vec{B}_G$
$\vec{F}_{GM}$
$\vec{V}$
source
du champ

#6 *Tests expérimentaux*

Entraînement des référentiels : effet Lense-Thirring (1918/2004)

$$\vec{\Omega} \approx \frac{r_s}{2r^3} \frac{3(\vec{J} \cdot \vec{u}_r) - \vec{J}}{M}$$

vérifié par LAGEOS en 2004

#7 *Tests expérimentaux*

Ondes gravitationnelles

dit rapidement : ondes dans la structure de l'espace-temps

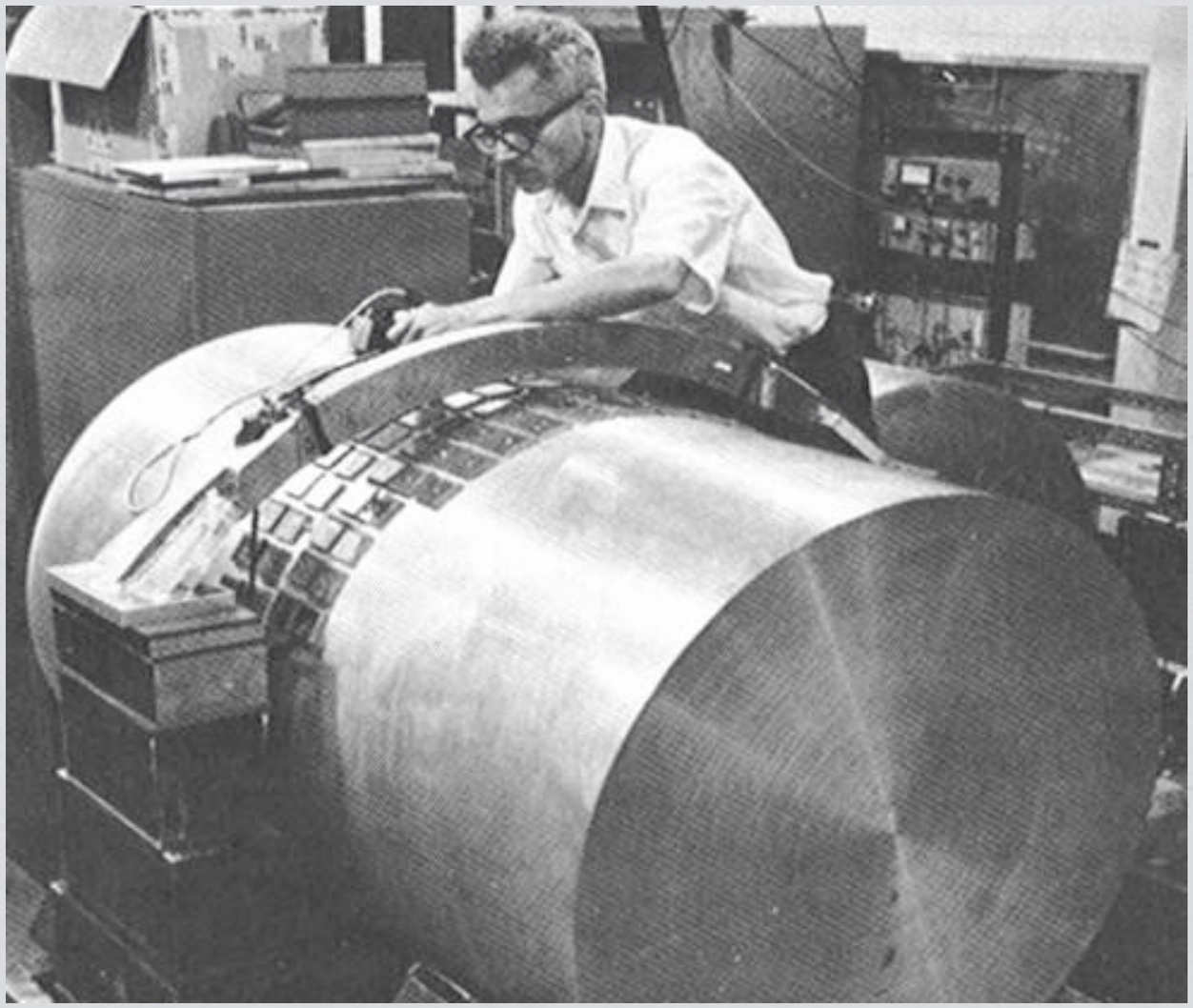
En fait, c'est subtil. La notion d'énergie gravitationnelle est très délicate à définir en relativité générale.

Longue controverse historique sur la réalité physique de ces ondes

#7

ondes gravitationnelles

barres de Weber (années 1960)



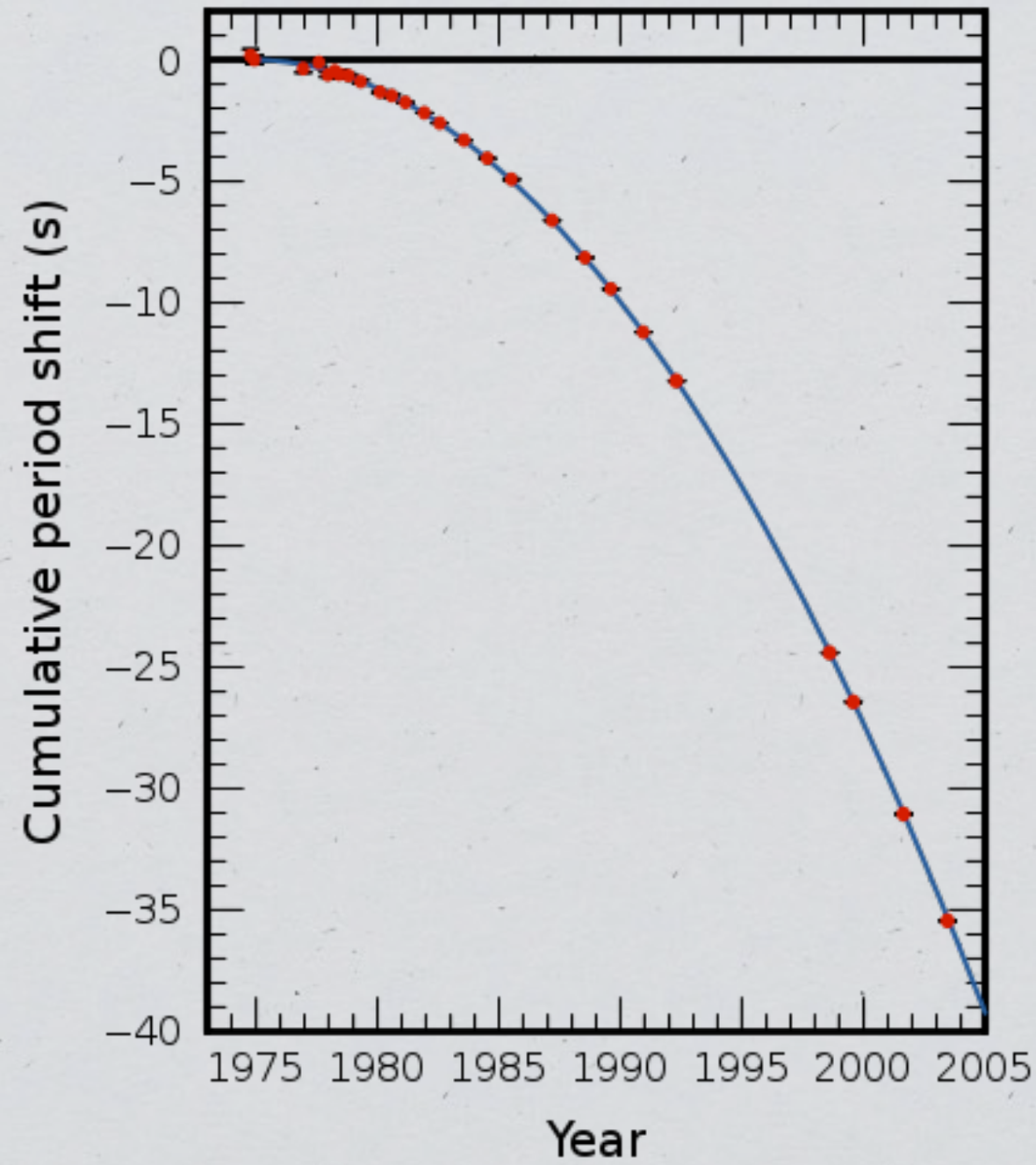
Bibliographie

Dictionnaire de physique

#7 *ondes gravitationnelles*

Détection indirecte dans le pulsar binaire PSR 1913+16

Hulse et Taylor (1974)



#7 *ondes gravitationnelles*

Virgo, Ligo, e-Lisa

#7 *ondes gravitationnelles*

Détection directe en 2016 par LIGO/Virgo

#8

Cosmologie

#8

Cosmologie

Principe cosmologique

« À grande échelle, l'Univers est homogène et isotrope »

Métrique de Robertson-Walker

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \, d\phi^2 \right)$$

#8

Cosmologie

Expansion de l'Univers

Histoire thermique

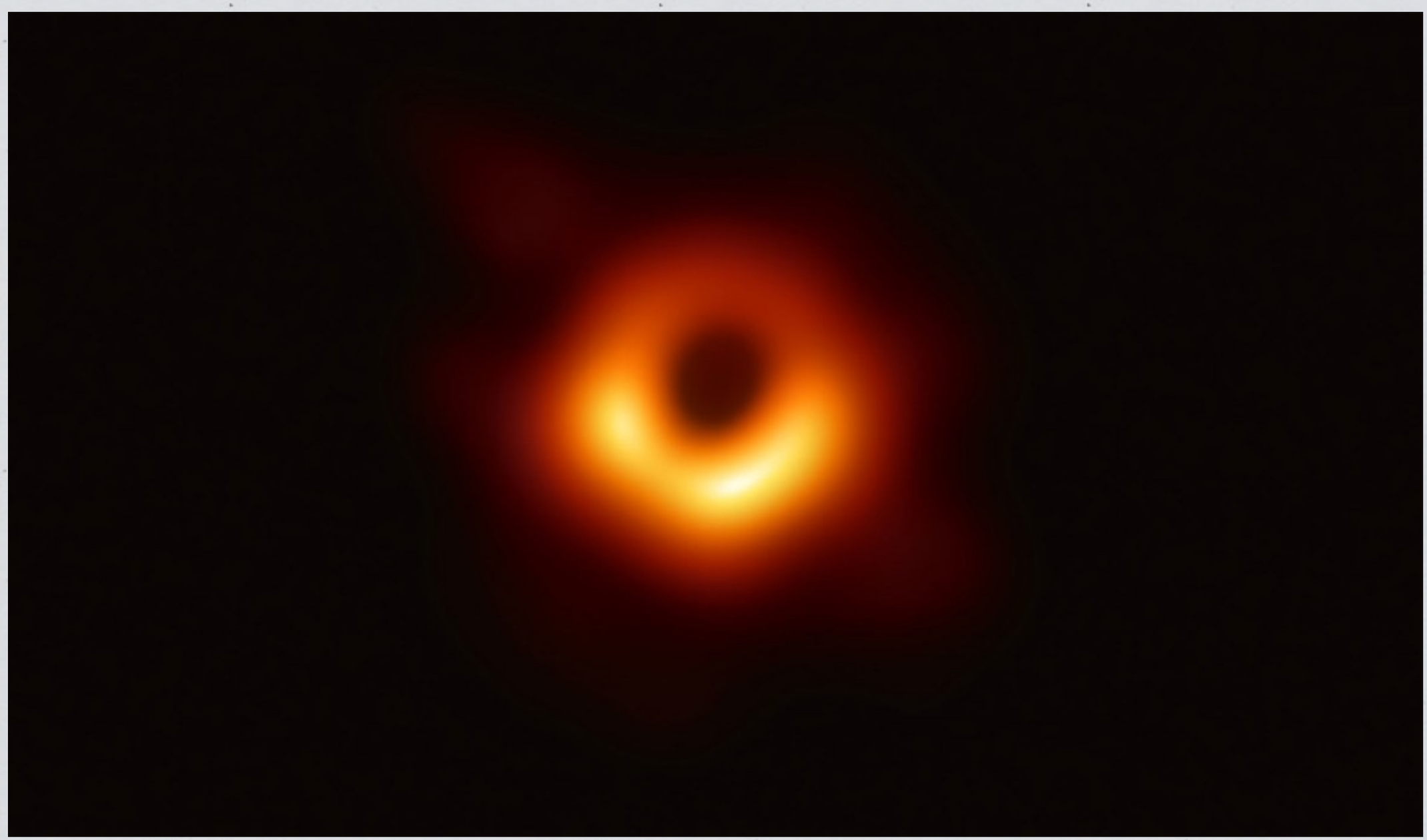
Nucléosynthèse primordiale

Formation des grandes structures

Rayonnement de fond cosmologique

#9

Trous noirs



Difficultés

Manipuler des tenseurs

Singularités

Interprétation des coordonnées

Singularités

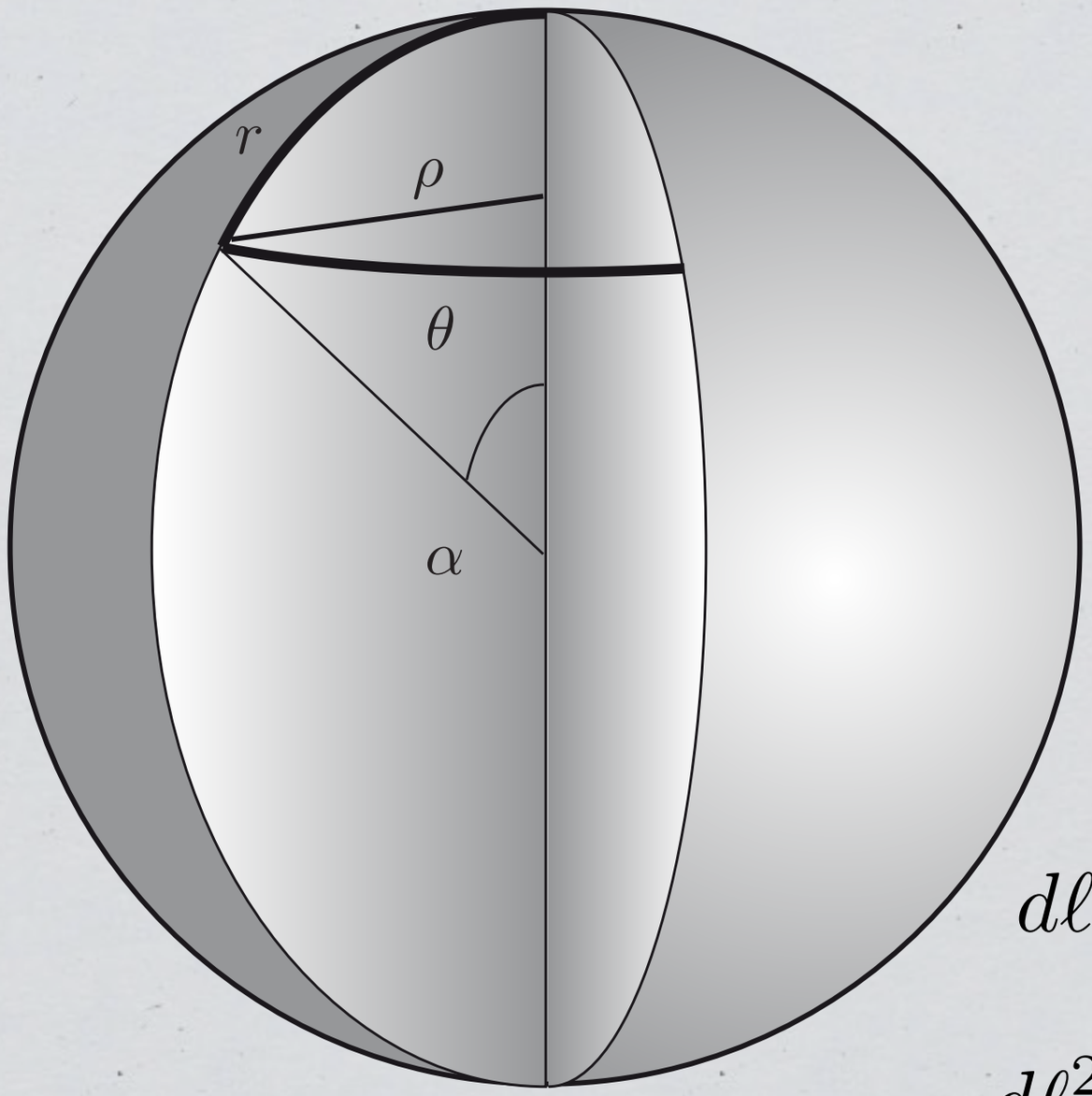
Métrique de Schwarzschild

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2$$

quantités singulières pour deux valeurs de r :

$$r = 0 \qquad\qquad r = r_s$$

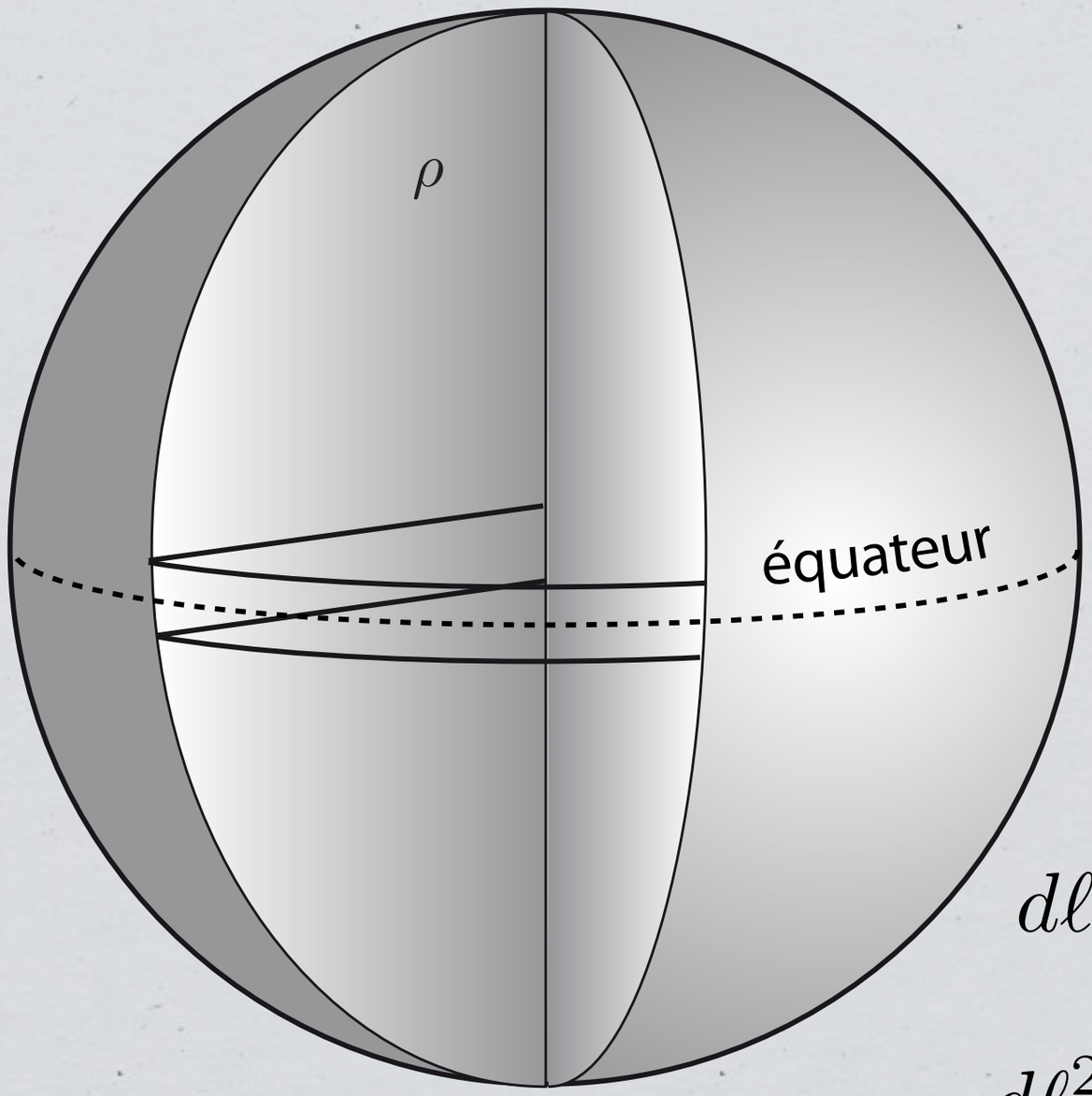
Singularités



$$d\ell^2 = R^2 d\alpha^2 + R^2 \sin^2\alpha \, d\theta^2$$

$$d\ell^2 = \frac{d\rho^2}{1 - \rho^2/R^2} + \big(\cdots\big)\, d\theta^2$$

Singularités



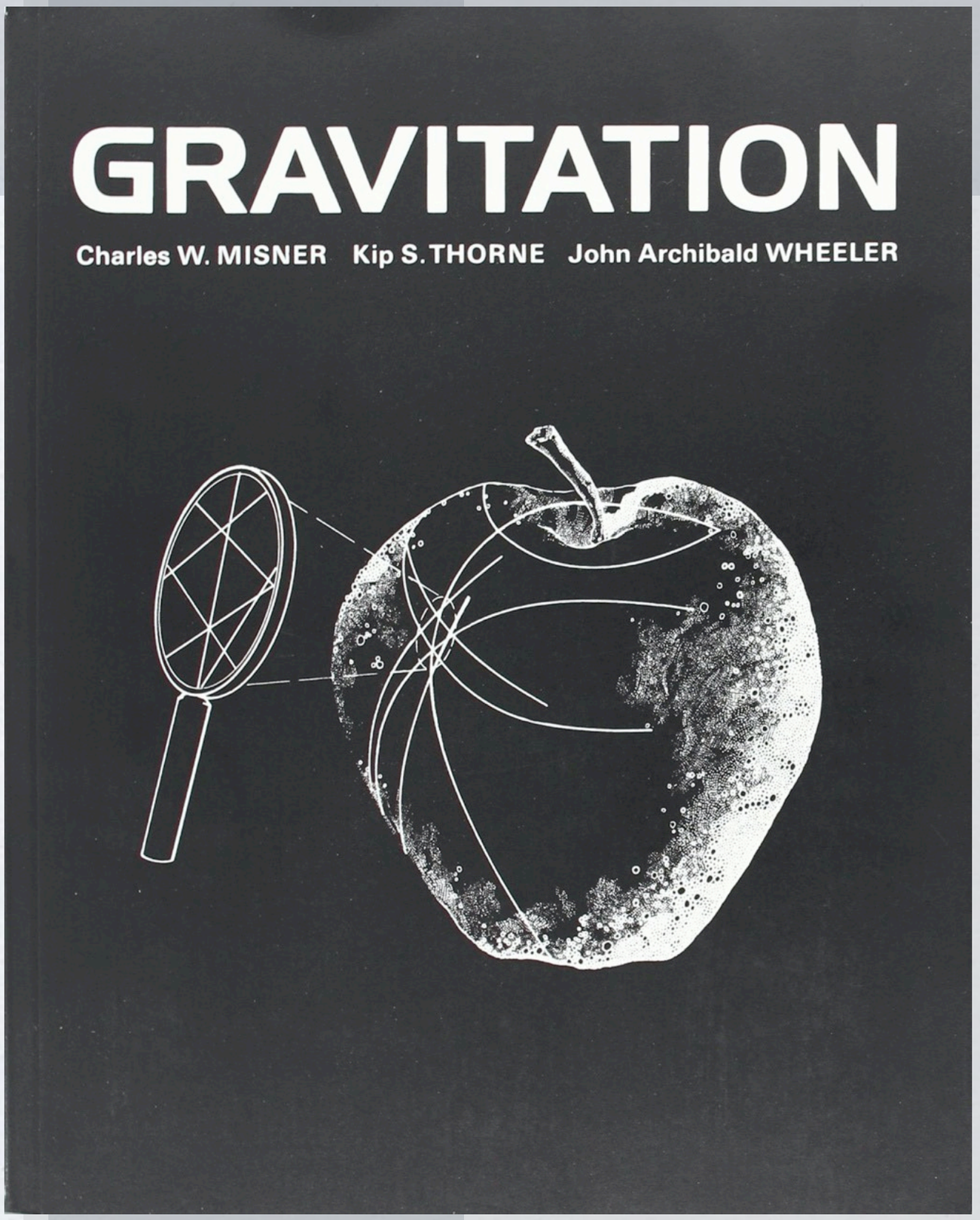
singularité de coordonnées

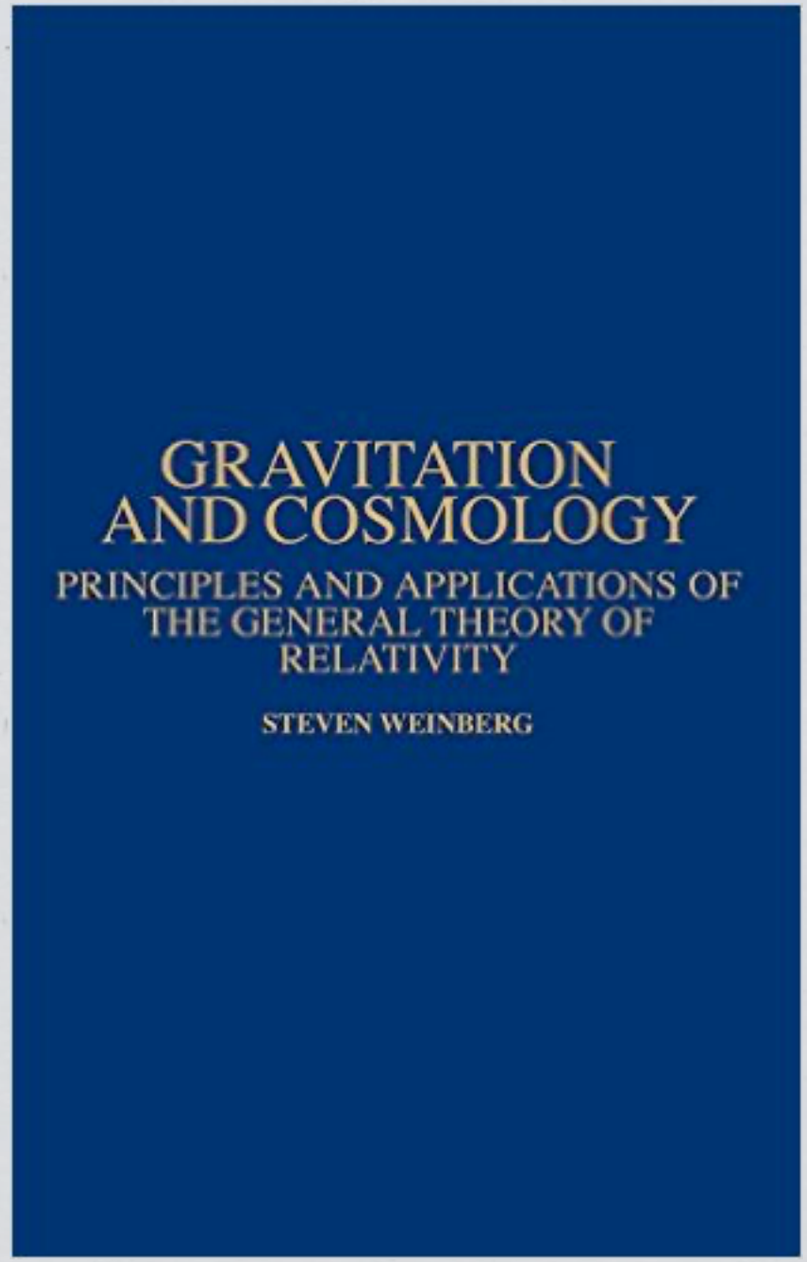
$$d\ell^2 = R^2 d\alpha^2 + R^2 \sin^2\alpha \, d\theta^2$$

$$d\ell^2 = \frac{d\rho^2}{1 - \rho^2/R^2} + \left(\cdots\right) d\theta^2$$

Références

Références


GRAVITATION
Charles W. MISNER Kip S. THORNE John Archibald WHEELER


GRAVITATION
AND COSMOLOGY
PRINCIPLES AND APPLICATIONS OF
THE GENERAL THEORY OF
RELATIVITY
STEVEN WEINBERG

Références

Moore
Relativité
générale
de boeck

Hobson | Efstathiou | Lasenby
Relativité
générale
de boeck

Références

« The Confrontation between General Relativity and Experiment »

Clifford M. Will

Living Reviews in relativity

http://relativity.livingreviews.org/Articles/lrr-2006-3/

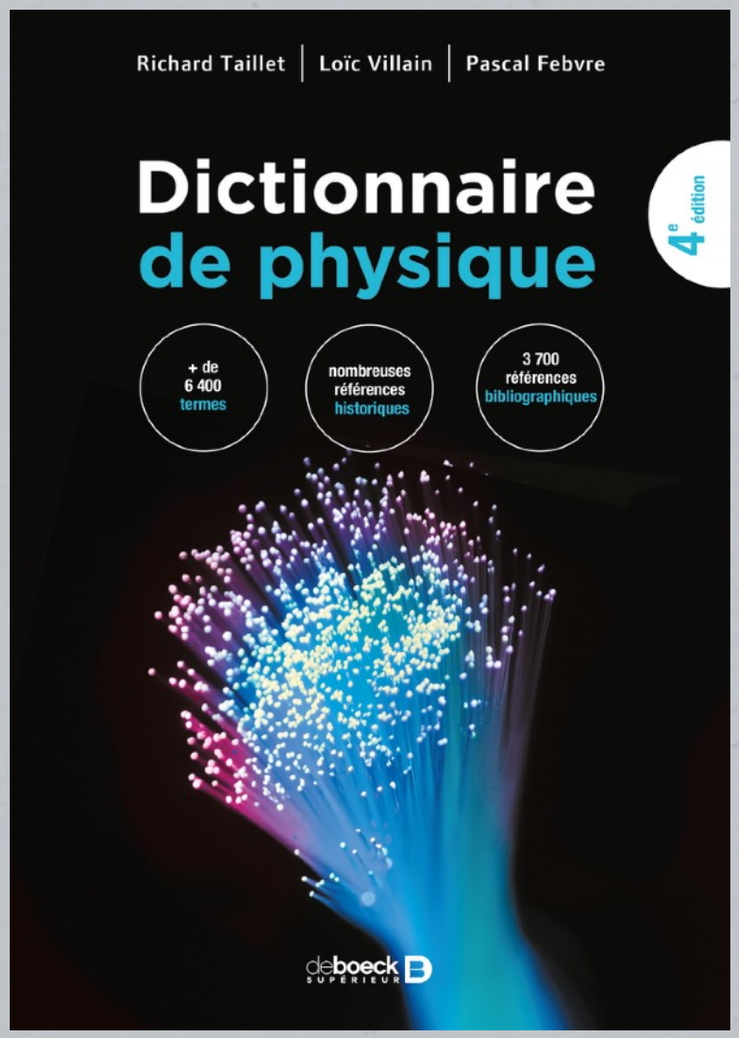
26 épisodes de 25 à 45 minutes (HD 720)

Références

http://podcast.grenet.fr/podcast/cours-dintroduction-a-la-relativite-generale/

Contact

taillet@lapth.cnrs.fr

Richard.Taillet@univ-savoie.fr

« Dictionnaire de physique »
sur Facebook