

Chirps, temps-fréquence et ondes gravitationnelles

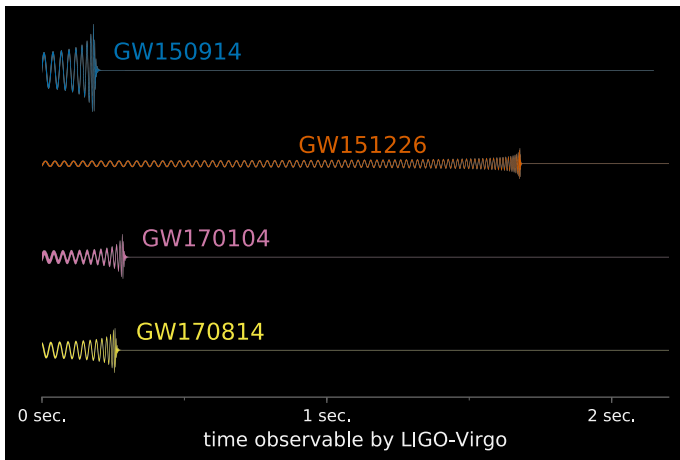
Patrick Flandrin

CNRS & École normale supérieure de Lyon



JOGLY — Lyon, 16 oct. 2019

les 4 premiers événements détectés



décrire

► modèle de “chirp”

$$x(t) = a(t) \cos \varphi(t) = \operatorname{Re} (z(t) = a(t) \exp\{i\varphi(t)\})$$

avec :

- $a(t) \geq 0$ l'amplitude instantanée
- $\dot{\varphi}(t)/2\pi$ la fréquence instantanée

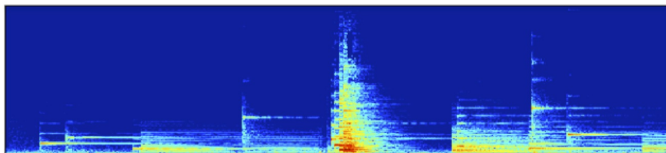
lorsque $z(t)$ est analytique ([Gabor, '46; Ville, '48])

- des chirps “partout” : sonars animaux, musique, Doppler, phénomènes critiques, . . .
- au-delà de Fourier : temps-fréquence

temps-fréquence



fréquence



temps

modèle simplifié pour les coalescences de binaires

► modèle de chirp

$$x(t; t_0, d) = A(t_0 - t)^{-1/4} \cos \left(2\pi d (t_0 - t)^{5/8} + \varphi \right) \mathbf{1}_{(-\infty, t_0[}(t),$$

avec :

- t_0 **instant** de coalescence
- $d \propto \mathcal{M}_{\odot}^{-5/8}$; $\mathcal{M}_{\odot} = (m_1 + m_2)^{2/5} (m_1^{-1} + m_2^{-1})^{-3/5} / M_{\odot}$
“**chirp mass**” réduite (rapportée à la masse solaire $M_{\odot}$)
- $A \propto \mathcal{M}_{\odot}^{5/4} / R$; R **distance** terre-binaire

► fréquence instantanée

$$f_x(t) = \frac{5d}{8} (t_0 - t)^{-3/8} \mathbf{1}_{(-\infty, t_0[}(t)$$

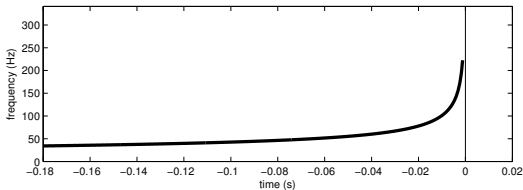
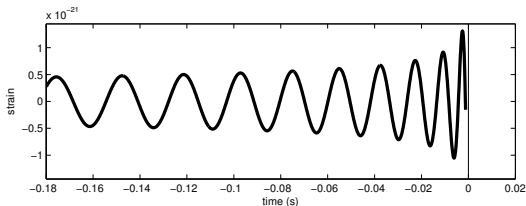
► limitation

- **divergence** lorsque $t \rightarrow t_0$ (**chirp ?**)
- complétion par “ring down”

modèle simplifié pour les coalescences de binaires

► exemple inspiré de GW150914 :

- masses individuelles de $30 M_{\odot}$
- distance de 800 Mpc



chirps et temps-fréquence

► interprétation

- chirp = **trajectoire** dans le plan temps-fréquence

► représentations localisées ?

- **solution exacte** pour les chirps en lois de puissance [Bertrand & Bertrand, '88] mais :
 - représentation quadratique (à la Wigner)
 - calcul prohibitif
- **solution approchée**
 - spectrogramme réalloué [Kodera *et al.*, '76; Auger & F., '95, Chassande-Mottin & F., '99]
- **autres**
 - ondelettes [Innocent & Torresani, '97]
 - “synchrosqueezing” [Daubechies & Maes, '94]

chirps et temps-fréquence

- ▶ **interprétation**

- ▶ chirp = trajectoire dans le plan temps-fréquence

- ▶ **représentations localisées ?**

- ▶ solution exacte pour les chirps en lois de puissance [Bertrand & Bertrand, '88] mais :
 - ▶ représentation quadratique (à la Wigner)
 - ▶ calcul prohibitif
 - ▶ solution approchée
 - ▶ **spectrogramme réalloué** [Kodera *et al.*, '76; Auger & F., '95, Chassande-Mottin & F., '99]
 - ▶ autres
 - ▶ ondelettes [Innocent & Torresani, '97]
 - ▶ “synchrosqueezing” [Daubechies & Maes, '94]

“revisiter” le spectrogramme

► classiquement

- spectrogramme = $|\text{TFCT}|^2$
- $\text{TFCT} = \langle x, \mathbf{T}_{t,f} h \rangle$, avec h **fenêtre à court-terme** et $\mathbf{T}_{t,f}$ opérateur de **translation** temps-fréquence

► de façon alternative

- spectrogramme = $\iint W_x(s, \xi) W_h(s - t, \xi - f) ds d\xi$
- W distribution de Wigner(-Ville) = $\langle x, \Pi_{t,f} x \rangle$, avec $\Pi_{t,f}$ opérateur de **parité locale**

► interprétation

- **spectrogramme = Wigner lissée**
- W parfaitement localisée sur les chirps **linéaires** unimodulaires
- h gaussienne $\Rightarrow W_h$ à **lissage minimal** dans le plan

corollaire

► analogie mécanique

- distribution d'énergie par $W_x \sim$ distribution de masse
- spectrogramme = masse totale sur le support de W_h
- valeur affectée au **centre géométrique** de la cellule de lissage

► principe de réallocation [Kodera *et al.*, '76]

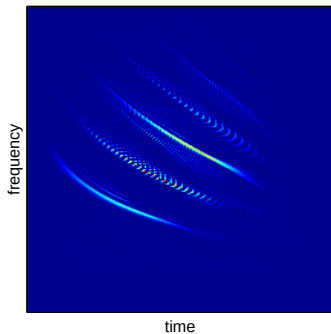
- réaffecter la valeur au **centre de gravité**
- information contenue dans la **phase** de la TFCT

► en pratique [Auger & F., '95]

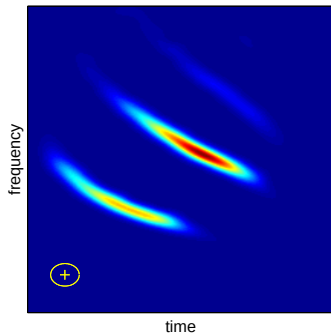
- calcul **implicite** des centres de gravité locaux en utilisant 3 TFCT basées sur $h(t)$, $t h(t)$ et $(dh/dt)(t)$
- codes Matlab disponibles à tftb.nongnu.org

réallocation

Wigner-Ville

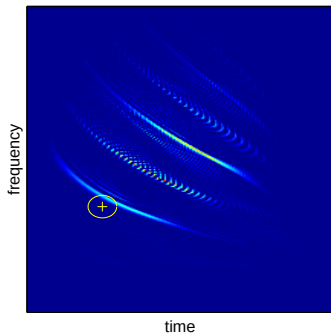


spectrogram

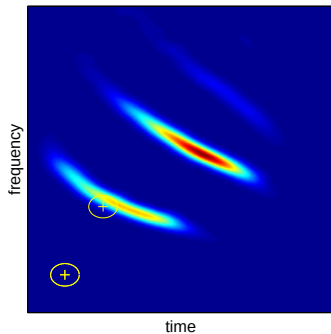


réallocation

Wigner-Ville

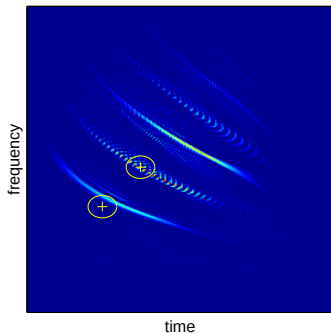


spectrogram

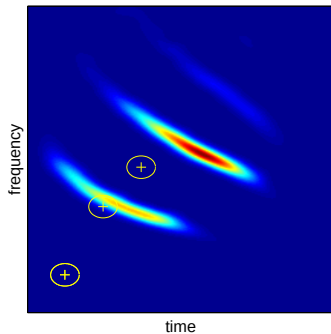


réallocation

Wigner-Ville

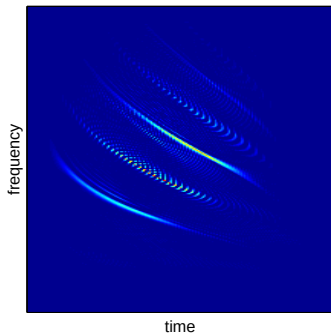


spectrogram

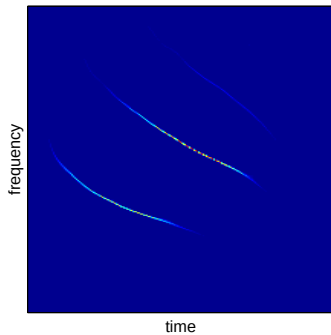


réallocation

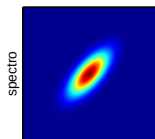
Wigner-Ville



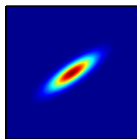
reassigned spectrogram



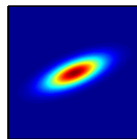
quelle fenêtre ?



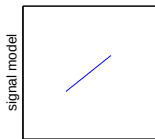
window = 21



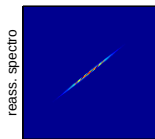
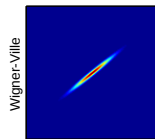
63



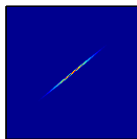
127 points



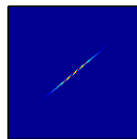
128 points



window = 21

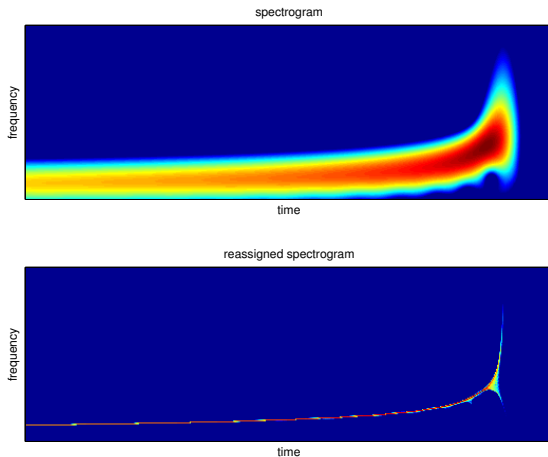


63



127 points

retour sur le modèle inspiré de GW150914



détecter/estimer

► avec modèle

- “chirp” de forme connue, dépendant de paramètres physiques du système
- filtrage adapté

► sans modèle

- excès local d'énergie dans le plan temps-fréquence et coïncidence entre détecteurs
- “Coherent Wave Burst” (S. Klimenko *et al.*)
- filtrage par zéros

détecter/estimer

▶ avec modèle

- ▶ “chirp” de forme connue, dépendant de paramètres physiques du système
- ▶ **filtrage adapté**

▶ sans modèle

- ▶ excès local d'énergie dans le plan temps-fréquence et coïncidence entre détecteurs
- ▶ “Coherent Wave Burst” (S. Klimenko *et al.*)
- ▶ **filtrage par zéros**

analyse avec modèle : filtrage adapté

► hypothèses

- structure imposée (filtrage **linéaire**)
- signal **connu** dans bruit **blanc**

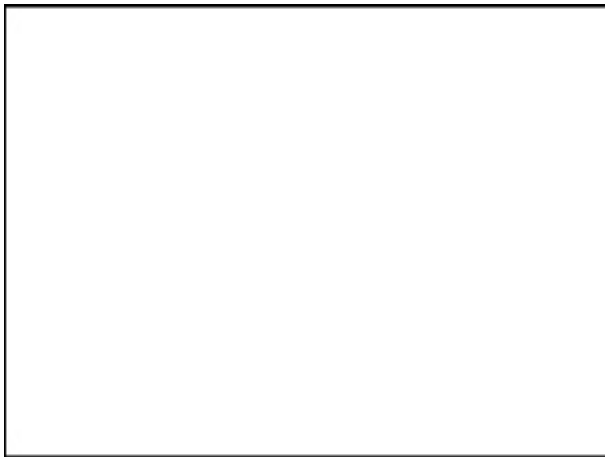
► optimalité

- mesure de contraste = **SNR** en sortie du filtre
- réponse impulsionnelle = signal **retourné dans le temps**

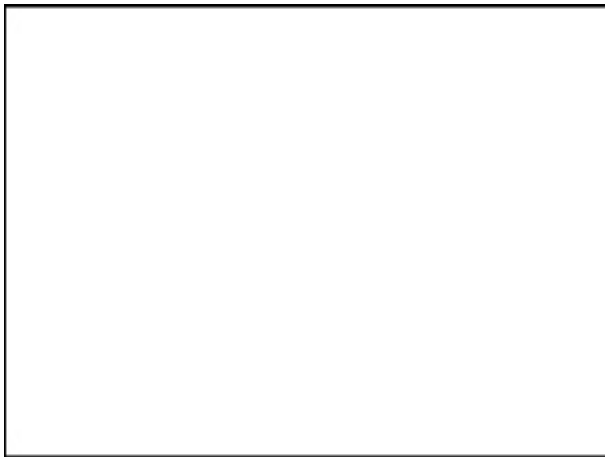
► en pratique

- détection : **corrélation** observation-signal attendu + seuil
- estimation : autant de **gabarits** que de paramètres

filtrage adapté (sans bruit)

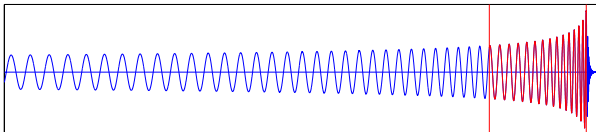


filtrage adapté (avec bruit)

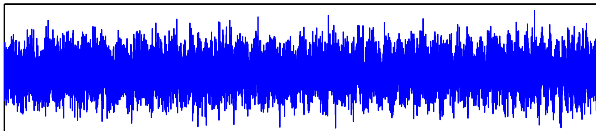


filtrage adapté et modèle simplifié

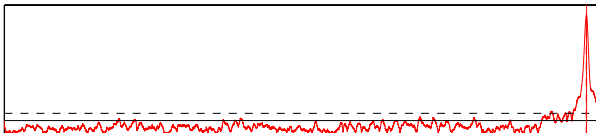
chirp de binaire coalescente + reference pour le filtre adapte



observation bruitée, SNR = -10 dB



enveloppe de la sortie du filtre adapte



filtrage adapté temps-fréquence

- **choix d'une distribution temps-fréquence ρ idéalement**

- **unitaire** : $|\langle x, r \rangle|^2 = \langle \langle \rho_x, \rho_r \rangle \rangle$
- **localisée** : $\rho_r(t, f) = \tilde{a}_r^2(t) \delta(f - f_r(t))$

- **stratégie approchée** [Chassande-Mottin & F., '99]

- $\rho = \tilde{S}$, **spectrogramme réalloué**
- filtrage adapté = **intégration de chemin** dans le plan temps-fréquence

- **pour le modèle simplifié à 2 paramètres t_0 et $\mathcal{M}_\odot$**

$$(\hat{t}_0, \hat{\mathcal{M}}_\odot) = \arg \max_{(t_0, \mathcal{M}_\odot)} \int_{\mathcal{L}(t_0, \mathcal{M}_\odot)} \tilde{S}_y(t, f) f^{-2/3},$$

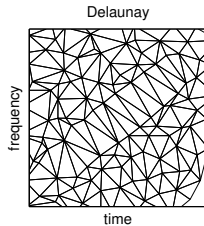
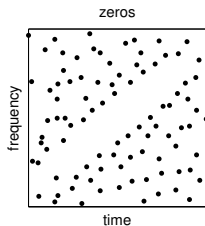
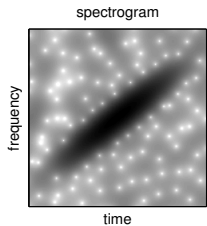
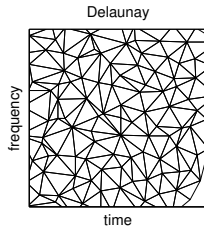
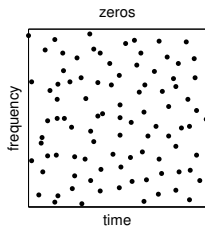
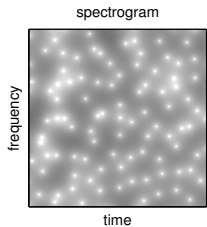
avec

$$\mathcal{L}(t_0, \mathcal{M}_\odot) = \left\{ (t, f) \mid t_0 - t = 6.35 \times 10^5 \mathcal{M}_\odot^{-5/3} f^{-8/3} \right\}.$$

analyse sans modèle : une vue *a contrario*

- ▶ **approche usuelle à l'idée de composante**
 - ▶ s'intéresser aux **grandes** valeurs temps-fréquence
 - ▶ leur associer une organisation **cohérente**
- ▶ **alternative** [F., '15]
 - ▶ s'intéresser aux **minima** plutôt qu'aux maxima
 - ▶ identifier des domaines **entre zéros**
- ▶ **substrat théorique**
 - ▶ transformée de **Bargmann** et factorisation de Weierstrass-Hadamard
 - ▶ propriétés des zéros des **"Gaussian Analytic Functions"** [Hough *et al.*, '09]

triangulation de Delaunay basée sur les zéros

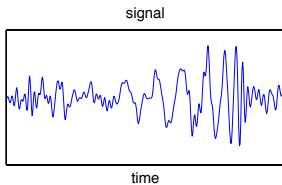


Algorithme [F., '15]

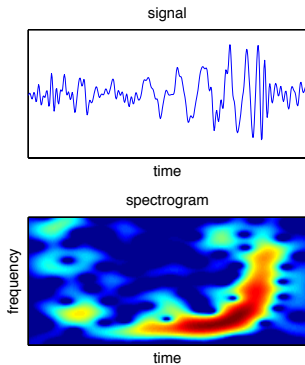
1. Calculer la **TFCT à fenêtre gaussienne circulaire** $F_x^{(g)}(t, f)$ et le spectrogramme associé
2. Localiser les **zéros du spectrogramme**
3. Calculer la **triangulation de Delaunay** associée
4. Identifier les triangles **anormaux** % longueur des côtés
5. Garder les triangles avec **au moins un côté anormal**
6. Former des **domaines connexes** $\mathcal{D}_j$ avec de tels triangles adjacents
7. **Reconstruire** les composantes correspondantes selon, par exemple,

$$x_j(t) = \frac{1}{g(0)} \int_{f \in \mathcal{D}_j | t} F_x^{(g)}(t, f) df$$

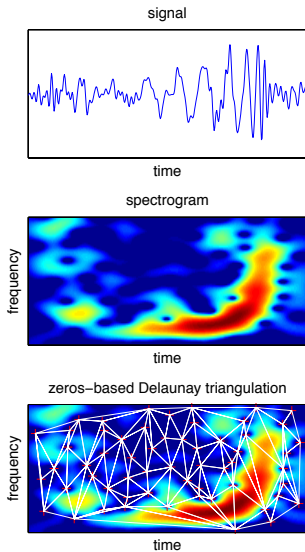
chirp de GW10914 (Hanford)



spectrogramme

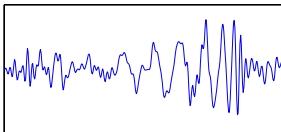


zéros et triangulation de Delaunay



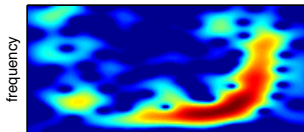
domaines temps-fréquence

signal



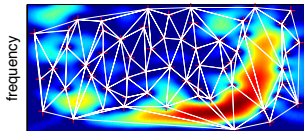
time

spectrogram



time

zeros-based Delaunay triangulation



time

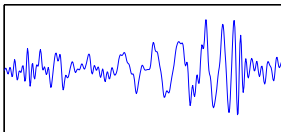
zeros-based Delaunay domains



time

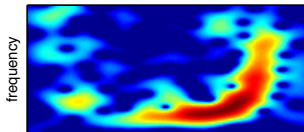
spectrogramme masqué 1/0

signal



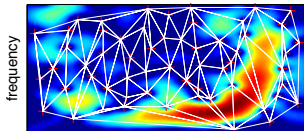
time

spectrogram



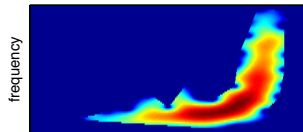
time

zeros-based Delaunay triangulation



time

masked spectrogram



time

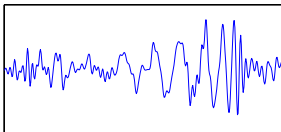
zeros-based Delaunay domains



time

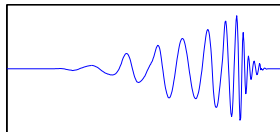
reconstruction filtrée

signal



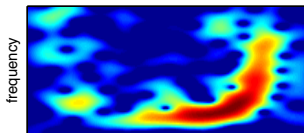
time

filtered signal



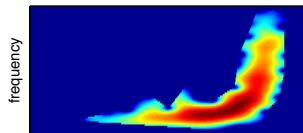
time

spectrogram



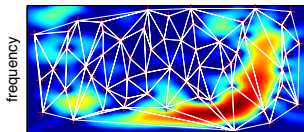
time

masked spectrogram



time

zeros-based Delaunay triangulation



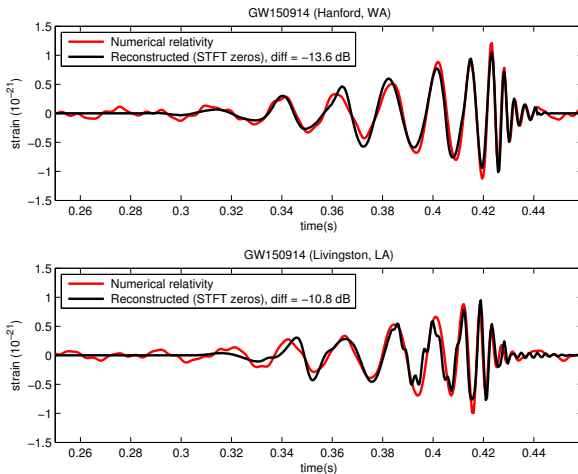
time

zeros-based Delaunay domains

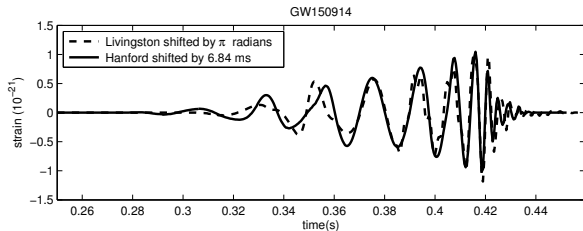
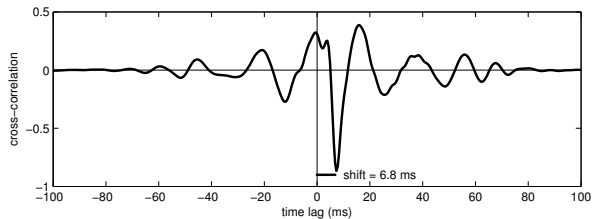


time

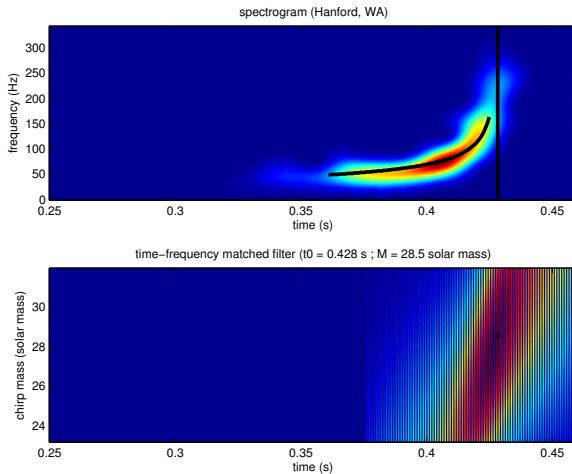
observations filtrées vs. modèles (élaborés)



de Livingston à Hanford

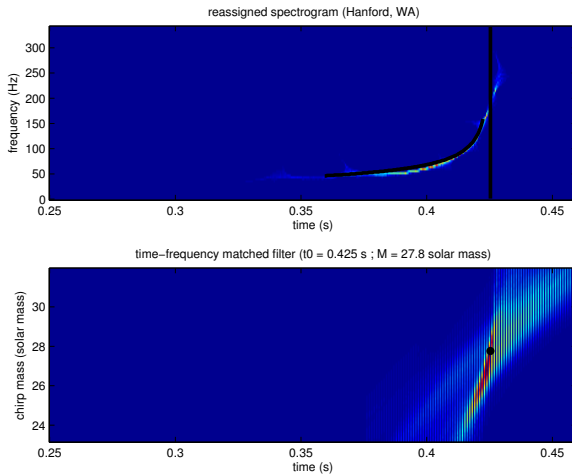


filtrage adapté temps-fréquence



([Abbott *et al.*, '16] : $m_1 = 36$ et $m_2 = 29 \Rightarrow \mathcal{M}_\odot = 28$)

filtrage adapté temps-fréquence



([Abbott *et al.*, '16] : $m_1 = 36$ et $m_2 = 29 \Rightarrow \mathcal{M}_\odot = 28$)

pour conclure

► temps-fréquence

- espace “naturel” pour les chirps d’ondes gravitationnelles
- possibilités de **détection** et d’**estimation**
- **faisabilité** conceptuelle mais **beaucoup** reste à faire

► quelques références

- E. Chassande-Mottin, P. Flandrin, “On the time-frequency detection of chirps,” *Appl. Comp. Harm. Anal.*, Vol. 6, No. 2, pp. 252–281, 1999.
- P. Flandrin, F. Auger, and E. Chassande-Mottin, “Time-frequency reassignment — From principles to algorithms,” in *Applications in Time-Frequency Signal Processing* (A. Papandreou-Suppappola, ed.), Chapter 5, pp. 179–203, Boca Raton, FL: CRC Press, 2003.
- P. Flandrin, , “Time-frequency filtering from spectrogram zeros,” *IEEE Signal Proc. Lett.*, Vol. 22, No. 11, pp. 2137–2141, 2015.
- P. Flandrin, “A note on the time-frequency analysis of GW150914,” Research report, <https://hal-ens-lyon.archives-ouvertes.fr/ensl-01370441>, 2016.
- P. Flandrin, *Explorations in Time-Frequency Analysis*, Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 2018.

► (p)reprints et contact

- `perso.ens-lyon.fr/patrick.flandrin`
- `flandrin@ens-lyon.fr`