Intégrale chemin dans la mécanique quantique et l’effet Aharonov-Bohm

Outline

- L’intégrale chemin
  - Introduction du concept
  - Exemple de la particule libre
  - Espace multiconnexe et intégrale chemin
- L’effet Aharonov-Bohm
  - Introduction
  - Calculs par opérateur
  - Appréhension par l’intégrale chemin
- Conclusion
- Bibliographie

L'intégrale chemin

Introduction du concept

- Objet mathématique introduit par Richard Feynman en 1948
- Permet de calculer l'amplitude de transition d'un système physique
- Intégrale fonctionnelle très utilisée en mécanique quantique
- Notamment utilisée en théorie quantique des champs et ses applications

Exemple de la particule libre

Hamiltonien : $H = T + V = \frac{p^2}{2m} + U(x)$

Amplitude de transition : $G(x_f, t; x_i) =< x_f \ |e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|x_i >$

$$G(x_f, t; x_i) = \lim_{N\to\infty} \int dx_1 \dots dx_{N-1} \sqrt{\frac{mN}{2\pi\lambda\hbar^2}} \exp\left(\frac{i\varepsilon}{\hbar} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{m}{2} \left(\frac{x_{j+1} - x_j}{\varepsilon}\right)^2 - V(x_j) \right)$$

$$G(x_f, t; x_i) = \int D[x] e^{-\frac{i}{\hbar}S(x)}$$

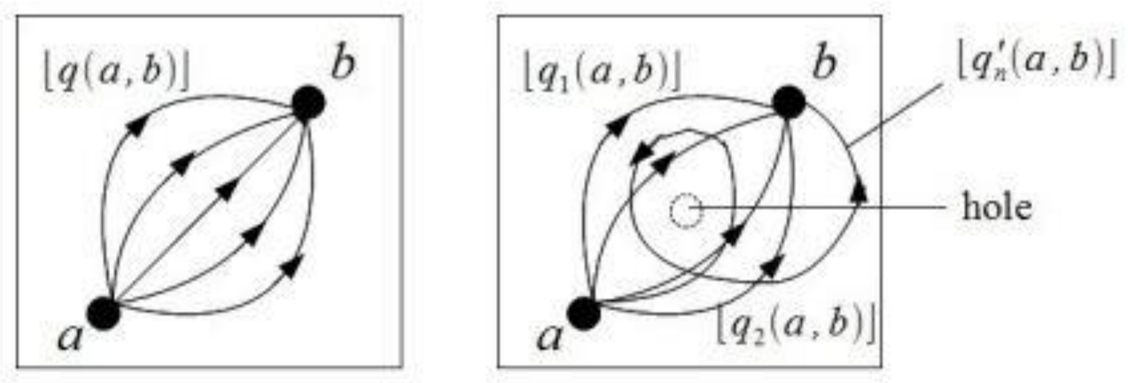
Espace multiconnexe et intégrale chemin

- Soit X un espace topologique. On dit que X est connexe s'il n'existe pas de partition de X en deux ouverts non vides (espace en un seul « tenant »)

- Une espace topologique est une généralisation des espaces euclidiens qui favorise la théorie des ensembles

- Une classe d'homotopie est une classe d'équivalence des chemins par relation d'homotopie (déformation continue des chemins)

Espace multiconnexe et intégrale chemin



- Pour calculer l'intégrale chemin, on somme toutes les contributions des chemins dans toutes les classes d'homotopie

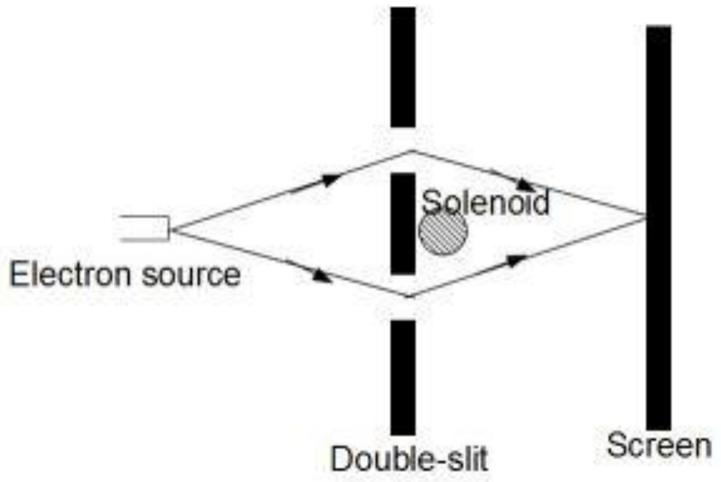
- On a le propagateur suivant : $G(\varphi'', t''; \varphi', t') = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n G_n(\varphi'', t''; \varphi', t')$

L'effet Aharonov-Bohm

Introduction

- Expérience de pensée décrite par David Bohm et Yakir Aharonov en 1959

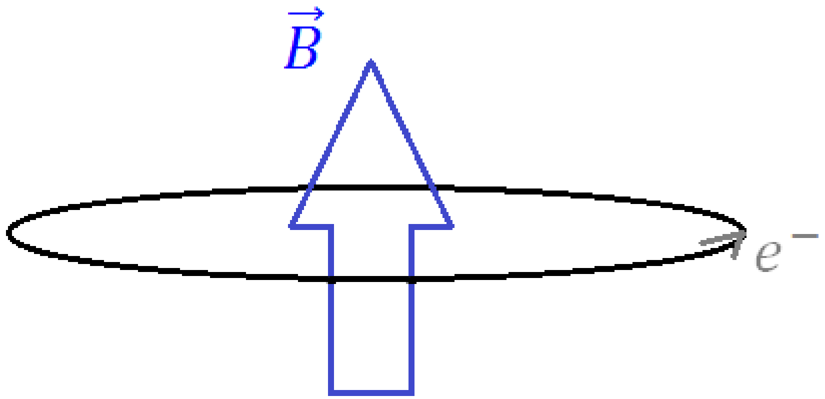
- Phénomène quantique qui montre que la dynamique d'une particule chargée est modifiée même si le champ magnétique est confiné



Calculs par opérateur

- $H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2$ Particule dans un champ magnétique

- $H = \frac{\vec{p}^2}{2m}$ Particule sans champ magnétique



- Physique dans un espace périodique en présence d'un champ magnétique est équivalente à la physique dans un espace non périodique sans champ magnétique

Appréhension par l'intégrale chemin

- Notion d'interférences présente qu'en mécanique quantique
- Un état pur en mécanique quantique est une réalité virtuelle
- La particule sur le cercle est en interférence avec elle-même
- Les fonctions d'onde diffèrent à un facteur de phase près

Conclusion

- L'intégrale chemin est très utilisée en mécanique quantique
- Supprime les propriétés du point de vue de l'analyse
- Permet d'avoir une compréhension plus intuitive

Bibliographie

- « Path integration in Quantum Mechanics » - Janos Polonyi
  http://www.iphc.cnrs.fr/IMG/pdf/pint.pdf
- Techniques and Applications of Path Integration – L. S. Schulman
- Path-Integral Methods and their Applications – Khandekar, Lawande, Bhagwat
- Intégrale de chemin en mécanique quantique : introduction – J. Zinn-Justin
- « Homotopy and Path Integrals » - Fumika Suzuki
  https://arxiv.org/pdf/1107.1459.pdf