Introduction à la supersymétrie

Rémi PASQUIER, Romain DEFRANOUX

Encadré par *Michel Rausch de Traubenberg, IPHC*

2019

Introduction

- Nouvelle symétrie : partenaire fermionique à tout boson et inversement
- Doit décrire les phénomènes prédits par le modèle standard

→ Algèbre supersymétrique, Superespace, Superchamps

→ Lagrangiens supersymétriques

→ Modèle Standard Minimal Supersymétrique (MSSM)

Algèbre de Lorentz

- Algèbre associée au Groupe de Lorentz $SO(1,3)$, notée $\mathfrak{so}(1,3)$
- En posant $J^{\mu\nu}$ les tenseurs de bases antisymétriques :

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} + \eta^{\nu\sigma} J^{\rho\mu} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma} J^{\rho\nu}$$

- Représentations : sous la forme $(i_1 ; i_2) \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$
- Représentations $(\frac{1}{2}, 0)$ et $(0, \frac{1}{2})$: **Spineurs**

Algèbre de Poincaré

- Algèbre associée au groupe de Poincaré $ISO(1,3)$, notée $\mathfrak{iso}(1,3)$
- Contient l'algèbre de Lorentz.
- En posant P_μ les générateurs de translations, on a :

$$[J^{\rho\sigma}, P^\mu] = \eta^{\sigma\mu} P^\rho - \eta^{\rho\mu} P^\sigma$$

$$[P^\mu, P^\nu] = 0$$

- On peut poser $L^{\mu\nu} = x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu$ et $P_\mu = -\partial_\mu$: mêmes relations.

Algèbre de Clifford

- Relation de Commutation : $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$
- Tenseurs γ (de Dirac) définis ainsi.
- Tenseurs $\gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ génèrent l'algèbre de Lorentz :

  \- Éléments de la représentation associée : <u>**Bispineurs de Dirac**</u>
- Bispineurs sous la forme (Notation de <u>**Van der Waerden**</u>) :

$$\begin{pmatrix} \lambda_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$$

λ_α <u>**gaucher**</u>, $\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}$ <u>**droitier**</u> (conjugués complexes)

- Majorana : $\begin{pmatrix} \lambda_\alpha \\ \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$ $\quad (\lambda_\alpha)^* = \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}$

Superalgèbre de Poincaré

- Superalgèbre de Poincaré : $\mathfrak{g} = iso(1,3) \oplus \mathfrak{g}_1$
- $\mathfrak{g}_1$: partie fermionique, générée par spineur de Majorana Q_α (Superchage) :

$$[L^{\mu\nu}, Q_\alpha] = \sigma^{\mu\nu}{}_\alpha{}^\beta Q_\beta$$

$$\left\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right\} = -2i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu$$

(le reste s’annule)

Superespace

- Espace paramétrisé par $(x^\mu, \theta, \bar{\theta})$, noté $\mathbb{R}^{4|4}$
- θ Spineur de Majorana particulier : **Variable de Grassmann** :

  - Vérifie la relation $\{\theta_\alpha, \theta_\beta\} = 0$ ($\Longleftrightarrow$ fermions)

  - Dérivée associée : $\{\partial_\alpha, \theta^\beta\} = \delta_\alpha{}^\beta$

  - Dérivée covariante : $D_\alpha = \partial_\alpha - i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu$

- Expression des transformations :

$$G(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) = e^{x^\mu P_\mu + i(\theta_\alpha Q^\alpha + \bar{Q}^{\dot{\alpha}})}$$

Superchamp

- Champ Φ sur les variables $(x^\mu, \theta, \bar{\theta})$
- Or $\theta^3 = 0$: développement exact.
- Cas importants :

  - Superchamps chiraux : $\bar{D}^{\dot{\alpha}}\Phi = 0$

  - Superchamps réels : $V^\dagger = V$
- Servir à décrire les particules.

Lagrangiens supersymétriques

Doivent satisfaire :

- Invariance par transformation supersymétrique
- Invariances de jauge

→ Termes cinétiques : Lagrangien libre de Wess-Zumino

→ Forme générale

→ Invariance de jauge : abélienne

→ Invariance de jauge : non abélienne

Lagrangien libre de Wess-Zumino

- Lagrangien le plus simple envisageable :
  - 1 boson, 1 fermion
  - Non massifs
  - Pas d'interaction

Φ Chiral → $\Phi\Phi^\dagger$ chiral, donc $\Phi\Phi^\dagger{}_{|\theta^2\bar{\theta}^2}$ est invariant par transformations supersymétriques

Bon candidat

Lagrangien libre de Wess-Zumino

Développement : le lagrangien s'exprime

$$L_0 = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + \frac{i}{2}(\psi \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi} - \partial_\mu \psi \sigma^\mu \bar{\psi}) + F^\dagger F$$

- Contient les lagrangiens de Klein-Gordon, de Dirac (non massifs).
- Terme en F : champs auxiliaires

  → Sans impact sur équations du mouvement

  → Équilibre les degrés de libertés hors CM

Lagrangien supersymétrique : interactions

Contrainte : invariance par transformation supersymétrique.

On pose le superpotentiel général

$$W(\Phi) = \alpha_a \Phi^a + \frac{1}{2} m_{ab} \Phi^a \Phi^b + \frac{1}{6} \lambda_{abc} \Phi^a \Phi^b \Phi^c$$

Où les Φ sont tous chiraux. *W* est donc chiral et

$$L_{W.Z} = \Phi_a^\dagger \Phi^a_{|\theta^2 \bar{\theta}^2} + W(\Phi)_{|\theta^2} + W^*(\Phi^\dagger)_{|\bar{\theta}^2}$$

aussi, par construction.

Lagrangien supersymétrique : interactions

En développant, on a $$L_{int} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial\phi^a\partial\phi^b} + h.c$$

→ Forme générale d'un lagrangien supersymétrique $L = L_0 + L_{int}$

Où L_{int} dépend de W.

<u>*Exemple :*</u>

$$W(\phi) = \frac{1}{6}\lambda\phi^3 + \frac{1}{2}m\phi^2$$

Lagrangien supersymétrique : interactions

Cela mène au lagrangien :

- Cinétique, 1 boson, 1 fermion de Majorana de masse m

$$L^{(2)} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi + \frac{1}{2} \bar{\Psi}_M [i\gamma^\mu \partial_\mu - m] \Psi_M$$

- D'interaction : contributions cubiques et quartiques des bosons, et terme de Yukawa

$$L_{int} = -\frac{\lambda^2}{4} \phi^\dagger \phi^\dagger \phi \phi - \frac{\lambda}{2} [\phi \psi \cdot \psi + \phi^\dagger \bar{\psi} \cdot \bar{\psi}] - \frac{m\lambda}{2} [\phi^\dagger \phi^\dagger \phi + \phi^\dagger \phi \phi]$$

Lagrangien invariant de jauge : jauge abélienne

→ Électrodynamique : théorie de jauge U(1)

→ Description supersymétrique : lagrangien invariant par transformations de jauge de U(1)

→ Transformation infinitésimale considérée : $V \longrightarrow V + \Phi + \Phi^\dagger$

V réel chiral, Φ chiral. ***Formulation finie*** : $e^{2eV} \longrightarrow e^{-2ie\Lambda} e^{2eV} e^{2ie\Lambda^\dagger}$

→ Dans la jauge de Wess-Zumino :

$$V_{W.Z} = \theta\sigma^\mu\bar{\theta}v_\mu + i\theta\cdot\theta\bar{\theta}\cdot\bar{\theta}D\bar{\lambda} - i\bar{\theta}\cdot\bar{\theta}\theta\cdot\lambda + \frac{1}{2}\theta\cdot\theta\bar{\theta}\cdot\bar{\theta}D$$

Remarque : $V_{W.Z}^3 = 0$

Lagrangien invariant de jauge : jauge abélienne

- Deux superchamps chiraux $\Phi_\pm$, de charges opposées
- Lois de transformation $\Phi_\pm \longrightarrow e^{\mp 2ei\Lambda}\Phi_\pm$

→ On construit le lagrangien invariant de jauge le plus simple possible :

$$L = \Phi_+^\dagger e^{-2eV}\Phi_{+|\theta^2\bar{\theta}^2} + \Phi_-^\dagger e^{2eV}\Phi_{-|\theta^2\bar{\theta}^2} + m(\Phi_+\Phi_{-|\theta^2} + \Phi_+^\dagger\Phi^\dagger_{-|\bar{\theta}^2})$$

Comme $V^3_{W.Z} = 0$, on calcule *L* via le développement *exact :*

$$e^{2eV} = 1 - 2eV + 2e^2V^2$$

Lagrangien invariant de jauge : jauge abélienne

Finalement,

$$
\begin{aligned}
L = &-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{i}{2}(\lambda\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\lambda} - \partial_{\mu}\lambda\sigma^{\mu}\bar{\lambda}) \\
&+ D_{\mu}\phi_{+}^{\dagger}D^{\mu}\phi_{+} + \frac{i}{2}(\psi_{+}\sigma^{\mu}D_{\mu}\bar{\psi}_{+} - D_{\mu}\psi\sigma^{\mu}\bar{\psi}) \\
&+ D_{\mu}\phi_{-}^{\dagger}D^{\mu}\phi_{-} + \frac{i}{2}(\psi_{-}\sigma^{\mu}D_{\mu}\bar{\psi}_{-} - D_{\mu}\psi\sigma^{\mu}\bar{\psi}) \\
&+ i\sqrt{2}e\phi_{+}\bar{\lambda}\cdot\bar{\psi}_{+} - i\sqrt{2}e\phi_{+}^{\dagger}\lambda\cdot\psi_{+} \\
&- i\sqrt{2}e\phi_{-}\bar{\lambda}\cdot\bar{\psi}_{-} + i\sqrt{2}e\phi_{-}^{\dagger}\lambda\cdot\psi_{-} \\
&- m(\psi_{+}\cdot\psi_{-} + \bar{\psi}_{+}\cdot\bar{\psi}_{-}) - m^{2}(\phi_{+}^{\dagger}\phi_{+} + \phi_{-}^{\dagger}\phi_{-}) \\
&- \frac{e^{2}}{2}(\phi_{+}^{\dagger}\phi_{+} - \phi_{-}^{\dagger}\phi_{-})
\end{aligned}
$$

Deux bosons massifs de charges électriques opposées, et leurs partenaires supersymétriques

Lagrangien invariant de jauge : jauge non abélienne

→ Supersymétrie doit permettre de décrire des théories de jauges non abéliennes (ex : Yang-Mills)

→ Algèbre de Lie définie dans une représentation unitaire par

$$[T_a, T_b] = i f_{ab}{}^c T_c \qquad\qquad Tr(T_a T_b) = \tau_R \delta_{ab}$$

Et on construit $\Lambda = \Lambda^a T_a$, $V = V^a T_a$ avec Λ^a chiral et V^a réel.

→ $e^{2gV} \longrightarrow e^{2g(V+\delta V)} = e^{-2ig\Lambda} e^{2gV} e^{2ig\Lambda^\dagger}$ n'est plus abélienne dans le cas général.

Lagrangien invariant de jauge : jauge non abélienne

On peut construire un lagrangien général invariant sous transformations de jauge non abélienne :

$$L = \Phi^\dagger e^{-2eV}\Phi_{|\theta^2\bar{\theta}^2} + \frac{1}{16g^2\tau_R} Tr(W_\alpha W^\alpha)_{|\theta^2}$$

$$+ \frac{1}{16g^2\tau_R} Tr(\bar{W}_{\dot{\alpha}}\bar{W}^{\dot{\alpha}})_{|\bar{\theta}^2} + W(\Phi)_{|\theta^2} + W*(\Phi^\dagger)_{|\bar{\theta}^2}$$

Où W_α est un superchamp appelé ***jaugino***, partenaire supersymétrique du boson de jauge associé à la transformation.

Modèle Standard

- Modèle Standard : Théorie de Jauge (Yang-Mills) : $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$

  - $SU(3)_c$: secteur fort (gluons),
  - $SU(2)_L$: secteur faible (W^+, W^-, Z^0)
  - $U(1)_Y$: secteur électromagnétique (photon)

- Avant brisure électrofaible : $SU(2)_L \times U(1)_Y$ (B, W_1, W_2, W_3)

- Secteur de Matière (quarks, leptons)

- Secteur de Higgs (Boson de Higgs)

Extension Supersymétrique (MSSM)

- Pour chaque Particule : Partenaire SUSY :

  - Secteur de Jauge : Jauginos (forment des Superchamps Vectoriels)

  - Secteur de Matière : Sfermions (forment des Superchamps Chiraux)

  - Secteur de Higgs : Higgsinos (forment des Superchamps Chiraux)

- Construire le Lagrangien, avec pour superpotentiel :

$$
\begin{aligned}
W = &-y_{eIJ} L^I \cdot H_1 E^J - y_{dIJ} Q^I \cdot H_1 D^J + y_{nIJ} Q^I \cdot H_2 U^J \\
&+ y_{nIJ} L^I \cdot H_2 N^J + \mu H_1 \cdot H_2 + m_{IJ} N^I N^J
\end{aligned}
$$

Secteur de Higgs

- Deux doublets de Superchamps chiraux :

$$H_1 = \begin{pmatrix} H_{10} \\ H_{1-} \end{pmatrix} \quad H_2 = \begin{pmatrix} H_{1+} \\ H_{20} \end{pmatrix}$$

- En déduire le Potentiel :

  - Termes D : $\frac{1}{2}(\phi^\dagger T \phi)^2$

  - Termes F : $\frac{\partial W_{bil}}{\partial \phi} \frac{\partial W_{bil}^*}{\partial \phi^\dagger}$ avec $W_{bil} = \mu H_1 \cdot H_2$

$\Longrightarrow$ Minimisation : Solution trivialement nulle

$\Longrightarrow$ Brisure douce (Supergravité)

Conclusion

- Expérimentalement : pas d'observations de superpartenaires
  → énergies prédites fausses ?

- Extension de la supersymétrie : supergravité
  → Couplage matière / interactions fond. / gravitation

Sources

[1] B. Fuks, M. Rausch de Traubenberg - Supersymétrie Exercices avec

solutions, 2011

[2] Harold Erbin - Supersymétrie , 2012

[3] Bertrand Jayles - Supersymétrie : Fondements mathématiques et Concepts

élémentaires, 2013 IPHC

[4] Jean-Bernard Zuber - Introduction à la théorie des groupes et de leurs

Représentations, 2006