Que se passe t'il quand le chaos déterministe rencontre le mouvement brownien ?

Trayter Vincent

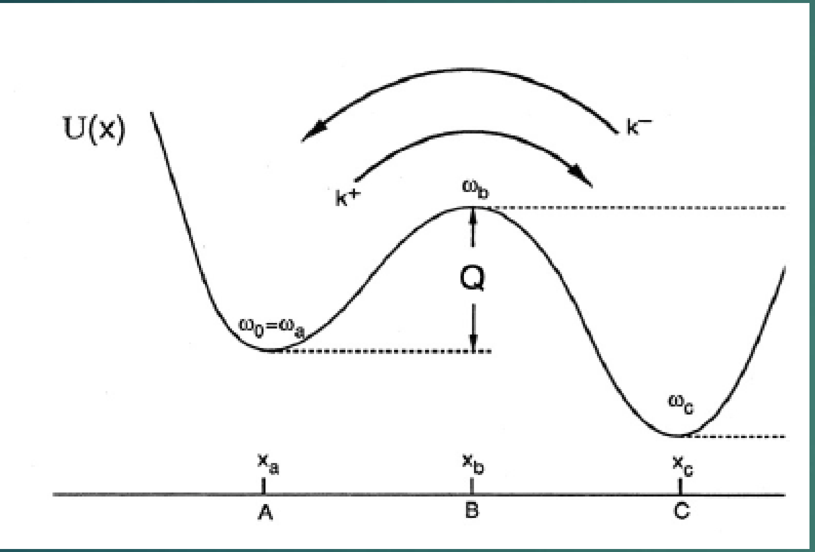
IPCMS

Université de Strasbourg

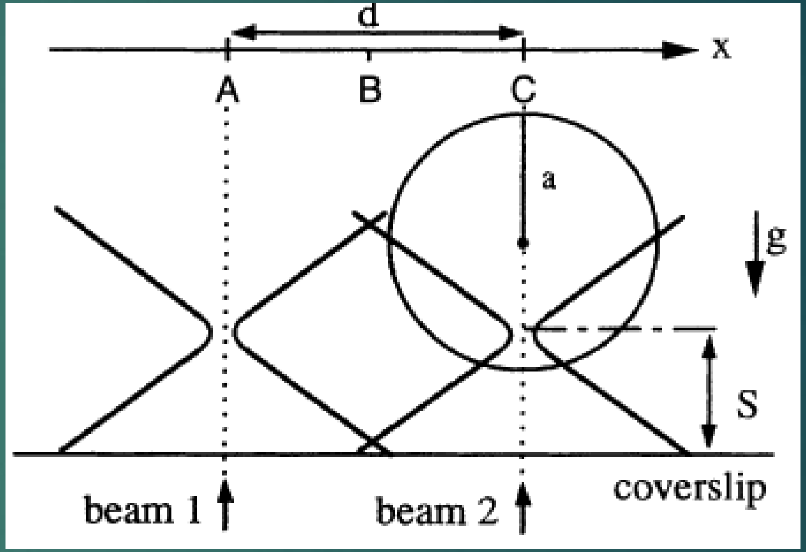
Stage M1 Physique
2018-2019

Sommaire

Présentation de l’expérience



Potentiel type Duffing utilisé pour piéger la particule



Faisceaux laser piégeant optiquement la particule en C

Objectifs du stage

Objectifs du stage

- Obtenir la distribution de probabilités de la particule en position et en vitesse

Objectifs du stage

- Obtenir la distribution de probabilités de la particule en position et en vitesse
- Obtenir les sections de Poincaré

Objectifs du stage

- Obtenir la distribution de probabilités de la particule en position et en vitesse
- Obtenir les sections de Poincaré
- Caractériser la dynamique de la particule brownienne en régime chaotique

Construction de l’équation de Fokker-Planck

Construction de l'équation de Fokker-Planck

$$\frac{d}{dx} a_j(t) = \nu_j(t) + \Xi_j(t)$$

Equation de Langevin générale

Construction de l'équation de Fokker-Planck

$$\frac{d}{dx}a_j\left(t\right)=\nu_j\left(t\right)+\Xi_j\left(t\right)$$

Equation de Langevin générale

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(a,t\right)+\frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{da}{dt}\rho\left(a,t\right)\right]=0$$

Equation de continuité

Construction de l'équation de Fokker-Planck

$$\frac{d}{dx}a_j\left(t\right) = \nu_j\left(t\right) + \Xi_j\left(t\right)$$

Equation de Langevin générale

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(a,t\right) + \frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{da}{dt}\rho\left(a,t\right)\right] = 0$$

Equation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial t}P\left(\vec{a},t\right) = -\frac{\partial}{\partial \vec{a}}\left(\nu\left(\vec{a}\right)P\left(\vec{a},t\right)\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \vec{a}}.\tilde{g}.\frac{\partial}{\partial \vec{a}}P\left(\vec{a},t\right)$$

Forme générale de l'équation de Fokker-Planck

Construction de l'équation de Fokker-Planck

$$\frac{d}{dx}a_j\left(t\right)=\nu_j\left(t\right)+\Xi_j\left(t\right)$$

Equation de Langevin générale

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(a,t\right)+\frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{da}{dt}\rho\left(a,t\right)\right]=0$$

Equation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial t}P\left(\vec{a},t\right)=-\frac{\partial}{\partial\vec{a}}\left(\nu\left(\vec{a}\right)P\left(\vec{a},t\right)\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\vec{a}}.\tilde{g}.\frac{\partial}{\partial\vec{a}}P\left(\vec{a},t\right)$$

Forme générale de l'équation de Fokker-Planck

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{\gamma}{m}v+\frac{1}{m}F+\frac{1}{m}\Xi$$

Equation de Langevin pour une particule brownienne en contact avec un thermostat

Construction de l'équation de Fokker-Planck

$$\frac{d}{dx}a_j\left(t\right)=\nu_j\left(t\right)+\Xi_j\left(t\right)$$

Equation de Langevin générale

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(a,t\right)+\frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{da}{dt}\rho\left(a,t\right)\right]=0$$

Equation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial t}P\left(\vec{a},t\right)=-\frac{\partial}{\partial \vec{a}}\left(\nu\left(\vec{a}\right)P\left(\vec{a},t\right)\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \vec{a}}.\tilde{g}.\frac{\partial}{\partial \vec{a}}P\left(\vec{a},t\right)$$

Forme générale de l'équation de Fokker-Planck

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{\gamma}{m}v+\frac{1}{m}F+\frac{1}{m}\Xi$$

Equation de Langevin pour une particule brownienne en contact avec un thermostat

$$\vec{a}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \vec{\nu}=\begin{pmatrix} v \\ -\frac{\gamma}{m}v+\frac{1}{m}F\left(x\right) \end{pmatrix}$$

$$\Xi\left(t\right)=\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m}\Xi\left(t\right) \end{pmatrix} \qquad \tilde{g}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\gamma k_b T}{m^2} \end{pmatrix}$$

Termes propres au problème

Construction de l'équation de Fokker-Planck

$$\frac{d}{dx}a_j\left(t\right)=\nu_j\left(t\right)+\Xi_j\left(t\right)$$

Equation de Langevin générale

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(a,t\right)+\frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{da}{dt}\rho\left(a,t\right)\right]=0$$

Equation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial t}P\left(\vec{a},t\right)=-\frac{\partial}{\partial \vec{a}}\left(\nu\left(\vec{a}\right)P\left(\vec{a},t\right)\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \vec{a}}.\tilde{g}.\frac{\partial}{\partial \vec{a}}P\left(\vec{a},t\right)$$

Forme générale de l'équation de Fokker-Planck

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{\gamma}{m}v+\frac{1}{m}F+\frac{1}{m}\Xi$$

Equation de Langevin pour une particule brownienne en contact avec un thermostat

$$\vec{a}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \vec{\nu}=\begin{pmatrix} v \\ -\frac{\gamma}{m}v+\frac{1}{m}F\left(x\right) \end{pmatrix}$$

$$\Xi\left(t\right)=\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m}\Xi\left(t\right) \end{pmatrix} \qquad \tilde{g}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\gamma k_b T}{m^2} \end{pmatrix}$$

Termes propres au problème

$$\frac{\partial}{\partial t}P\left(x,v,t\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left[vP\left(x,v,t\right)\right]-\frac{\partial}{\partial v}\left[\left(-\frac{\gamma}{m}v+\frac{1}{m}F\left(x\right)\right)P\left(x,v,t\right)\right]+\frac{\gamma k_b T}{m^2}\frac{\partial^2}{\partial v^2}P\left(x,v,t\right)$$

Equation de Fokker-Planck pour une particule brownienne en contact avec un thermostat

Solution de l'équation de Fokker-Planck sous forme d'une intégrale de chemin

Solution de l'équation de Fokker-Planck sous forme d'une intégrale de chemin

Construction de l'intégrale de chemin

$$\frac{\partial}{\partial t}P\left(q,t\right)=-\frac{\partial}{\partial q_i}K^i\left(q\right)P\left(q,t\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial q_i\partial q_j}Q^{ij}\left(q\right)P\left(q,t\right)$$

Solution de l'équation de Fokker-Planck sous forme d'une intégrale de chemin

Construction de l'intégrale de chemin

$$\frac{\partial}{\partial t}P\left(q,t\right)=-\frac{\partial}{\partial q_i}K^i\left(q\right)P\left(q,t\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial q_i\partial q_j}Q^{ij}\left(q\right)P\left(q,t\right)$$

$$K=\frac{-\gamma}{m}v+\frac{1}{m}F$$

$$Q=\frac{2\gamma k_bT}{m^2}$$

Solution de l’équation de Fokker-Planck sous forme d’une intégrale de chemin

Construction de l’intégrale de chemin

$$\frac{\partial}{\partial t}P\left(q,t\right)=-\frac{\partial}{\partial q_i}K^i\left(q\right)P\left(q,t\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial q_i\partial q_j}Q^{ij}\left(q\right)P\left(q,t\right)$$

$$K=\frac{-\gamma}{m}v+\frac{1}{m}F$$

$$Q=\frac{2\gamma k_bT}{m^2}$$

$$G\left(q,q_0,t_0,\tau\right)=\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{\left(q-<q>\right)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

Fonction de Green solution de l’équation de Fokker-Planck

Solution de l'équation de Fokker-Planck sous forme d'une intégrale de chemin

Construction de l'intégrale de chemin

$$\frac{\partial}{\partial t}P\left(q,t\right)=-\frac{\partial}{\partial q_i}K^i\left(q\right)P\left(q,t\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial q_i\partial q_j}Q^{ij}\left(q\right)P\left(q,t\right)$$

$$K=\frac{-\gamma}{m}v+\frac{1}{m}F \qquad Q=\frac{2\gamma k_b T}{m^2}$$

$$G\left(q,q_0,t_0,\tau\right)=\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{\left(q-<q>\right)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

Fonction de Green solution de l'équation de Fokker-Planck

$$<q>=q_0+K\left(q_0\right)\tau+\ldots \qquad \sigma^2=Q\left(q_0\right)\tau+\ldots$$

Developpement autour de q_0 de la valeur moyenne et de la variance

Solution de l'équation de Fokker-Planck sous forme d'une intégrale de chemin

Construction de l'intégrale de chemin

$$\frac{\partial}{\partial t}P\left(q,t\right)=-\frac{\partial}{\partial q_i}K^i\left(q\right)P\left(q,t\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial q_i\partial q_j}Q^{ij}\left(q\right)P\left(q,t\right)$$

$$K=\frac{-\gamma}{m}v+\frac{1}{m}F \qquad Q=\frac{2\gamma k_bT}{m^2}$$

$$G\left(q,q_0,t_0,\tau\right)=\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{\left(q-<q>\right)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

Fonction de Green solution de l'équation de Fokker-Planck

$$<q>=q_0+K\left(q_0\right)\tau+\ldots \qquad \sigma^2=Q\left(q_0\right)\tau+\ldots$$

Developpement autour de q_0 de la valeur moyenne et de la variance

$$G\left(q,q_0,t_0,\tau\right)=\left(\frac{1}{2\pi Q\left(q_0\right)\tau}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{\left[q-q_0-\tau K\left(q_0,t\right)\right]^2}{2Q\left(q_0\right)\tau}\right\}\exp\left\{\frac{\tau A\left[q-q_0-\tau K\left(q_0,t_0\right)-A\tau^2\right]}{Q\left(q_0\right)}\right\}$$

Propagateur au point q_0

Solution de l'équation de Fokker-Planck sous forme d'une intégrale de chemin

Construction de l'intégrale de chemin

$$P(q,t) = \lim_{\substack{N \to \infty \\ \tau \to 0}} \prod_{i=1}^{N} \int \dots \int Dq_i \left(\frac{1}{2\pi\tau Q(q_0,t')} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{ - \frac{\left[q_i - q_0 - \tau K(q_0,t')\right]^2}{2\tau Q(q_0,t')} \right\} P(q_0,t_0) + O(\tau^2)$$

Solution de l'équation de Fokker-Planck sous forme d'une intégrale de chemin

Résolution numérique de l'intégrale de chemin

$$P(q,t) = \lim_{\substack{N \to \infty \\ \tau \to 0}} \prod_{i=1}^{N} \int \dots \int Dq_i \left(\frac{1}{2\pi\tau Q(q_0,t')} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{ -\frac{\left[q_i - q_0 - \tau K(q_0,t')\right]^2}{2\tau Q(q_0,t')} \right\} P(q_0,t_0) + O\left(\tau^2\right)$$

Résolution matricielle de l'équation de Fokker-Planck

$$\frac{\partial}{\partial t}P\left(x,v,t\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left[vP\left(x,v,t\right)\right]-\frac{\partial}{\partial v}\left[\left(-\frac{\gamma}{m}v+\frac{1}{m}F\left(x\right)\right)P\left(x,v,t\right)\right]+\frac{\gamma k_b T}{m^2}\frac{\partial^2}{\partial v^2}P\left(x,v,t\right)$$

Equation de Fokker-Planck pour une particule brownienne en contact avec un thermostat

Résolution matricielle de l'équation de Fokker-Planck

Premier schéma

$$\frac{\partial P\left(x,v,t\right)}{\partial t}=L_{FP}P\left(x,v,t\right)$$

Résolution matricielle de l'équation de Fokker-Planck

Premier schéma

$$\frac{\partial P(x,v,t)}{\partial t} = L_{FP} P(x,v,t)$$

$$L_{FP} = L_x + L_v = -v\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\gamma}{m} + \left(\frac{\gamma}{m}v - \frac{1}{m}F\right)\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\gamma k_b T}{m^2}\frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

Opérateur de Fokker-Planck

Résolution matricielle de l'équation de Fokker-Planck

Premier schéma

$$\frac{\partial P\left(x,v,t\right)}{\partial t}=L_{FP}P\left(x,v,t\right)$$

$$L_{FP}=L_x+L_v=-v\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\gamma}{m}+\left(\frac{\gamma}{m}v-\frac{1}{m}F\right)\frac{\partial}{\partial v}+\frac{\gamma k_bT}{m^2}\frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

Opérateur de Fokker-Planck

$$x=lh_x,$$
$$v=mh_v$$
$$t=n\tau$$

Changement de variables

Résolution matricielle de l’équation de Fokker-Planck

Premier schéma

$$\frac{\partial P(x,v,t)}{\partial t} = L_{FP} P(x,v,t)$$

$$L_{FP} = L_x + L_v = -v\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\gamma}{m} + \left(\frac{\gamma}{m}v - \frac{1}{m}F\right)\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\gamma k_b T}{m^2}\frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

Opérateur de Fokker-Planck

$$x = lh_x,$$
$$v = mh_v$$
$$t = n\tau$$

Changements de variables

$$e^{-\frac{\tau}{2}L_{FP}} P(l,m,n+1) = e^{\frac{\tau}{2}L_{FP}} P(l,m,n)$$

Propagateur de Fokker-Planck

Résolution matricielle de l’équation de Fokker-Planck

Premier schéma

$$\frac{\partial P\left(x,v,t\right)}{\partial t}=L_{FP}P\left(x,v,t\right)$$

$$L_{FP}=L_x+L_v=-v\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\gamma}{m}+\left(\frac{\gamma}{m}v-\frac{1}{m}F\right)\frac{\partial}{\partial v}+\frac{\gamma k_b T}{m^2}\frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

Opérateur de Fokker-Planck

$$x=lh_x,$$
$$v=mh_v$$
$$t=n\tau$$

Changements de variables

$$e^{-\frac{\tau}{2}L_{FP}}P\left(l,m,n+1\right)=e^{\frac{\tau}{2}L_{FP}}P\left(l,m,n\right)$$

Propagateur de Fokker-Planck

$$P^*\left(l,m,n+1\right)=e^{-\frac{\tau}{2}L_{FP}}P\left(l,m,n+1\right)$$

Solution intermédiaire

Résolution matricielle de l'équation de Fokker-Planck

Premier schéma

$$\frac{\partial P(x,v,t)}{\partial t} = L_{FP} P(x,v,t)$$

$$L_{FP} = L_x + L_v = -v\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\gamma}{m} + \left(\frac{\gamma}{m}v - \frac{1}{m}F\right)\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\gamma k_b T}{m^2}\frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

Opérateur de Fokker-Planck

$$x = lh_x,$$
$$v = mh_v$$
$$t = n\tau$$

Changements de variables

$$e^{-\frac{\tau}{2}L_{FP}} P(l,m,n+1) = e^{\frac{\tau}{2}L_{FP}} P(l,m,n)$$

Propagateur de Fokker-Planck

$$P^*(l,m,n+1) = e^{-\frac{\tau}{2}L_{FP}} P(l,m,n+1)$$

Solution intermédiaire

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{\tau}{2}L_x\right) P^*(l,m,n+1) = \left(1 + \frac{\tau}{2}L_v\right) P(l,m,n) \\ \left(1 - \frac{\tau}{2}L_v\right) P(l,m,n+1) = \left(1 + \frac{\tau}{2}L_x\right) P^*(l,m,n+1) \end{cases}$$

Résolution matricielle de l'équation de Fokker-Planck

Premier schéma

$$\pm L_x = \mp v \frac{1}{2h_x}\delta_x \qquad \pm L_v = \pm\frac{\gamma}{m} \pm \left(\frac{\gamma}{m}v - \frac{1}{m}F\right)\frac{1}{2h_v}\delta_v \pm \left(\frac{\gamma k_b T}{m^2} \pm \frac{h_v^2}{6\tau}\right)\frac{1}{h_v^2}\delta_v^2$$

Réévaluation des opérateurs par l'approximation des hautes précisions

Résolution matricielle de l'équation de Fokker-Planck

Premier schéma

$$\pm L_x = \mp v \frac{1}{2h_x}\delta_x$$

$$\pm L_v = \pm\frac{\gamma}{m} \pm \left(\frac{\gamma}{m}v - \frac{1}{m}F\right)\frac{1}{2h_v}\delta_v \pm \left(\frac{\gamma k_b T}{m^2} \pm \frac{h_v^2}{6\tau}\right)\frac{1}{h_v^2}\delta_v^2$$

Réévaluation des opérateurs par l'approximation des hautes précisions

$$\delta_x P(l,m,n) = P(l+1,m,n) - P(l-1,m,n)$$

$$\delta_v P(l,m,n) = P(l,m+1,n) - P(l,m-1,n)$$

$$\delta_v^2 P(l,m,n) = P(l,m+1,n) - 2P(l,m,n) + P(l,m-1,n)$$

Résolution matricielle de l'équation de Fokker-Planck

Premier schéma

$$P^*(l,m,n+1)+\frac{v\tau}{4h_x}\left(P^*\left(l+1,m,n+1\right)-P^*\left(l-1,m,n+1\right)\right)=P\left(l,m,n\right)+\frac{\tau}{2}\left[\frac{\gamma}{m}P\left(l,m,n\right)+\left(\frac{\gamma}{m}v-\frac{1}{m}F\right)\frac{h_v}{2}\left(P\left(l,m+1,n\right)-P\left(l,m-1,n\right)\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\gamma k_bT}{m^2}+\frac{h_v^2}{6\tau}\right)\frac{1}{h_v^2}\left[P\left(l,m+1,n\right)-2P\left(l,m,n\right)+P\left(l,m-1,n\right)\right]\right.$$

$$P\left(l,m,n+1\right)-\frac{\tau}{2}\left[\frac{\gamma}{m}P\left(l,m,+1\right)+\left(\frac{\gamma}{m}v-\frac{1}{m}F\right)\frac{1}{2h_v}\left[P\left(l,m+1,n+1\right)-P\left(l,m-1,n+1\right)\right]\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\gamma k_bT}{m^2}\pm\frac{h_v^2}{6\tau}\right)\frac{1}{h_v^2}\left[P\left(l,m+1,n+1\right)-2P\left(l,m,n+1\right)+P\left(l,m-1,n+1\right)\right]\right]$$

$$=P^*\left(l,m,n+1\right)-\frac{\tau v}{4h_x}\left[P^*\left(l+1,m,n+1\right)-P^*\left(l-1,m,n+1\right)\right]$$

Résolution matricielle de l’équation de Fokker-Planck

Deuxième schéma

Résolution matricielle de l'équation de Fokker-Planck

Deuxième schéma

$$P^0_{l,m} = \frac{\exp\left\{-\frac{m\omega^2}{k_b T}\left[(l\Delta x - 4)^2 + (m\Delta v - 6)^2\right]\right\}}{Q}$$

Distribution de probabilités au temps $t = n\Delta t = 0$

Résolution matricielle de l'équation de Fokker-Planck

Deuxième schéma

$$P_{l,m}^{0}=\frac{\exp\left\{-\frac{m\omega^{2}}{k_{b}T}\left[\left(l\Delta x-4\right)^{2}+\left(m\Delta v-6\right)^{2}\right]\right\}}{Q}$$

Distribution de probabilités au temps $t = n\Delta t = 0$

$$\begin{aligned}P_{l,m}^{n+1}={}&\frac{m\Delta t}{\gamma}\left[\frac{1}{2\Delta v^{2}}\left(P_{m-1}+P_{m+1}\right)-\frac{1}{\Delta v^{2}}P_{m}+\frac{k_{b}T}{2\Delta v^{2}}\left[P_{m-1}\exp\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\left(m-1\right)\Delta v-6\right)^{2}-\left(m\Delta v-6\right)^{2}\right]\right\}\right.\right.\\&-P_{m}\left[\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\left(m+1\right)\Delta v-6\right)^{2}\right\}+\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\left(m-1\right)\Delta v-6\right)^{2}\right\}}{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(m\Delta v-6\right)^{2}\right\}}\right]+P_{m+1}\exp\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\left(m+1\right)\Delta v-6\right)^{2}-\left(m\Delta v-6\right)^{2}\right]\right\}\Bigg]\\&\left.-\frac{F}{\gamma}\left(P_{l,m}^{n}-P_{l,m-1}^{n}\right)\right]-\left(l\Delta v-6\right)\left(P_{l,m}^{n}-P_{l-1,m}^{n}\right)-P_{l,m}^{n}\end{aligned}$$

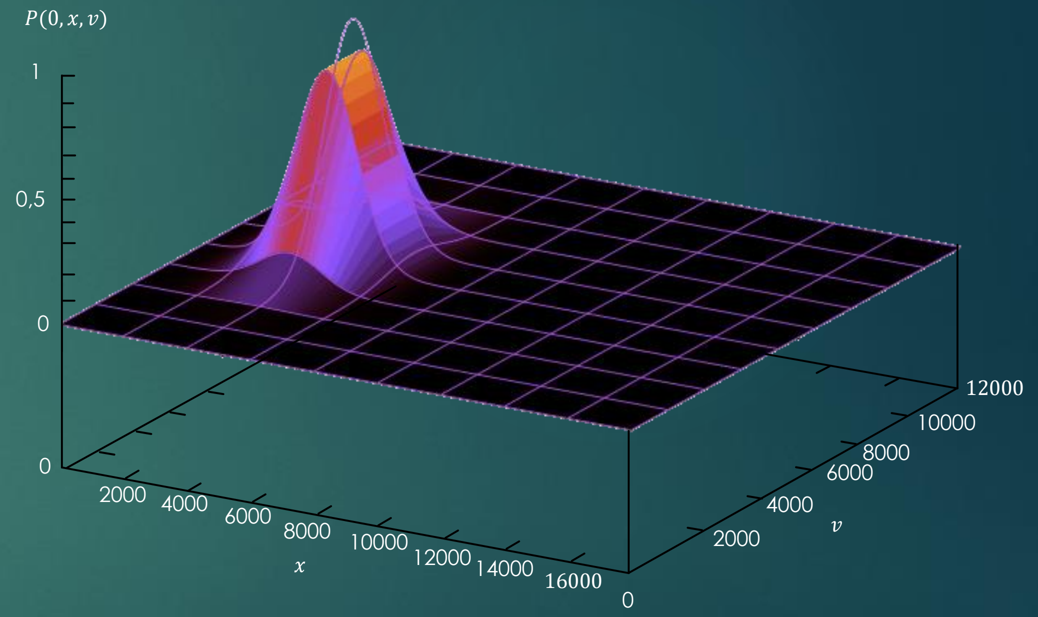
Distribution de probabilités au temps $t = (n+1)\Delta t$

Résolution matricielle de l'équation de Fokker-Planck

Deuxième schéma

$$P^0_{l,m} = \frac{\exp\left\{-\frac{m\omega^2}{k_bT}\left[(l\Delta x-4)^2+(m\Delta v-6)^2\right]\right\}}{Q}$$

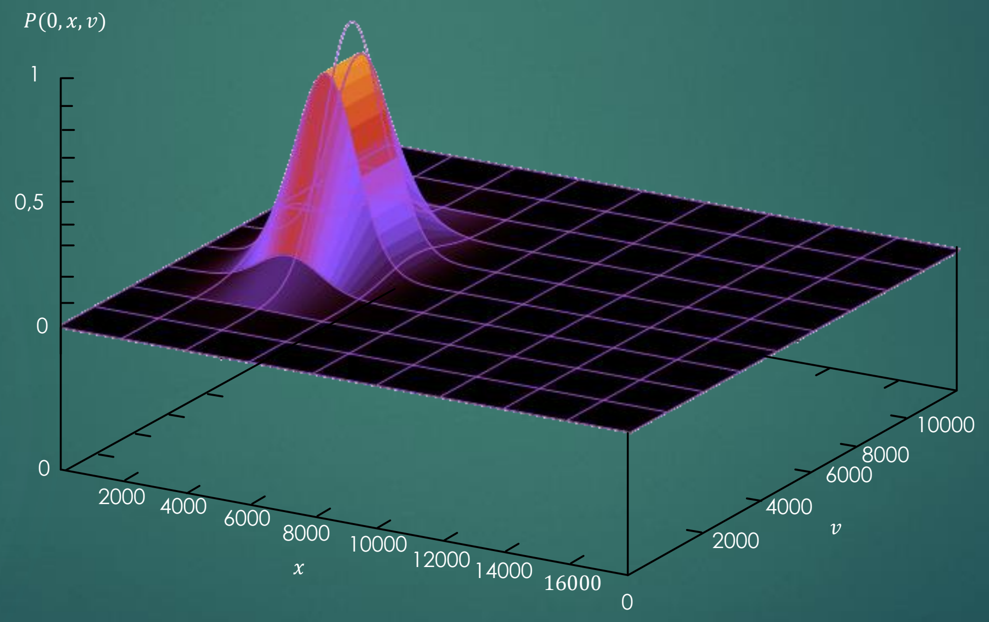
Distributions de probabilité au temps $t = n\Delta t = 0$



Graphique 3D de la distribution de probabilité au temps $t = n\Delta t = 0$

Résolution matricielle de l’équation de Fokker-Planck

Deuxième schéma



Graphique 3D de la distribution de probabilité
au temps $t = n\Delta t = 0$

Conclusion

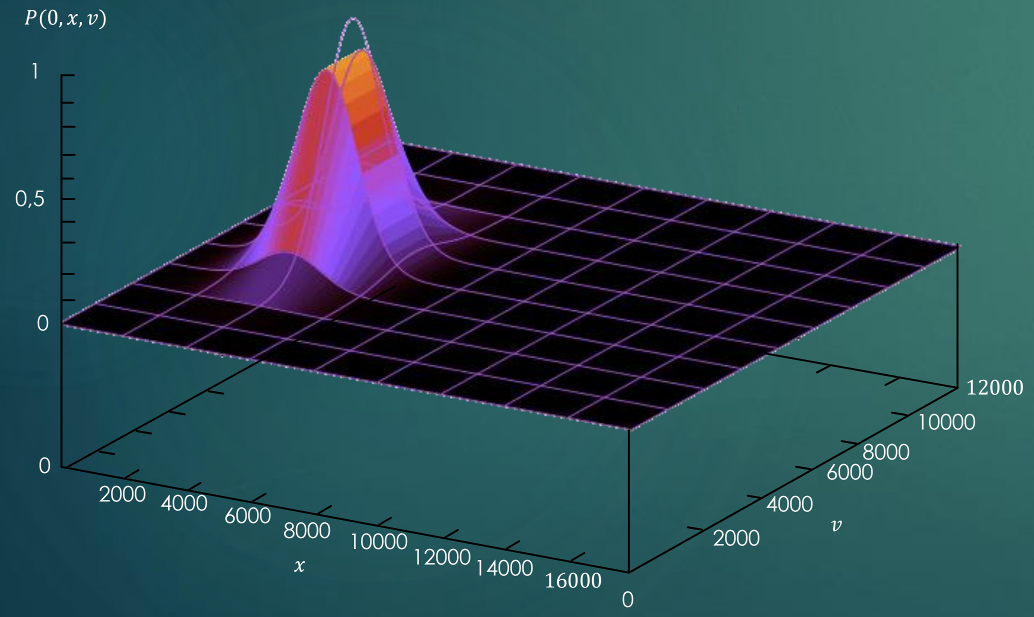
$$P(q,t) = \lim_{\substack{N \to \infty \\ \tau \to 0}} \prod_{i=1}^{N} \int \dots \int Dq_i \left(\frac{1}{2\pi\tau Q(q_0, t')} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{ - \frac{\left[q_i - q_0 - \tau K(q_0, t')\right]^2}{2\tau Q(q_0, t')} \right\} P(q_0, t_0) + O(\tau^2)$$

Distribution de probabilités sous la forme d’une intégrale de chemin

Conclusion

$$P(q,t) = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \tau\to 0}} \prod_{i=1}^{N} \int \ldots \int Dq_i \left(\frac{1}{2\pi\tau Q(q_0,t')}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{\left[q_i - q_0 - \tau K(q_0,t')\right]^2}{2\tau Q(q_0,t')}\right\} P(q_0,t_0) + O(\tau^2)$$

Distribution de probabilités sous la forme d'une intégrale de chemin

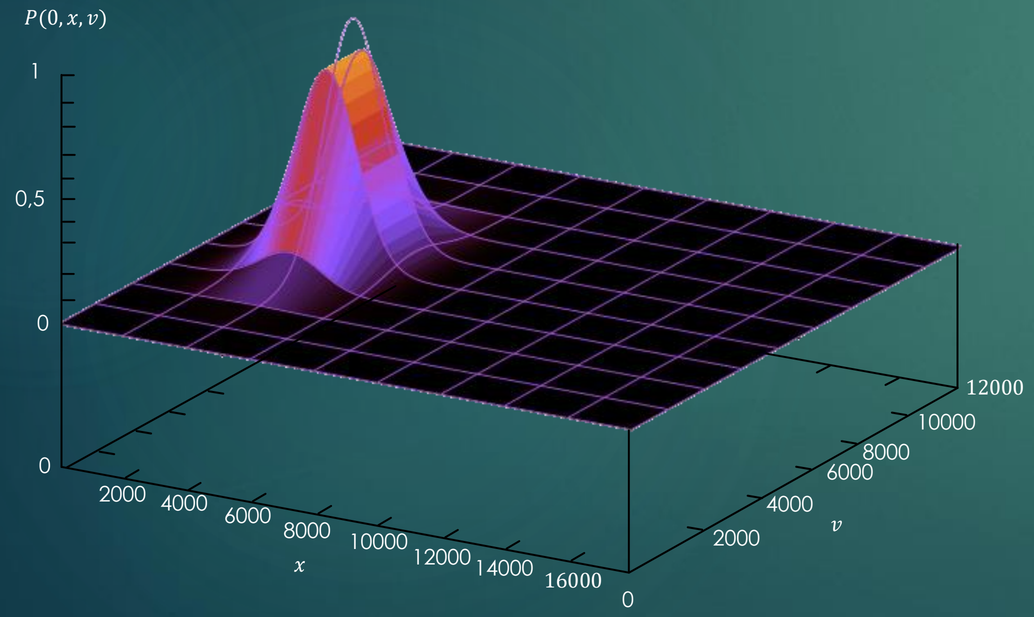


Graphique 3D de la distribution de probabilité au temps $t = n\Delta t = 0$

Conclusion

$$P\left(q,t\right)=\lim_{\substack{N\to\infty\\ \tau\to 0}}\prod_{i=1}^{N}\int\ldots\int Dq_i\left(\frac{1}{2\pi\tau Q\left(q_0,t'\right)}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{\left[q_i-q_0-\tau K\left(q_0,t'\right)\right]^2}{2\tau Q\left(q_0,t'\right)}\right\}P\left(q_0,t_0\right)+O\left(\tau^2\right)$$

Distribution de probabilités sous la forme d’une intégrale de chemin



Graphique 3D de la distribution de probabilité au temps $t = n\Delta t = 0$

$$\begin{aligned}P_{l,m}^{n+1}=\frac{m\Delta t}{\gamma}\Bigg[&\frac{1}{2\Delta v^2}\left(P_{m-1}+P_{m+1}\right)-\frac{1}{\Delta v^2}P_m+\frac{k_bT}{2\Delta v^2}\Bigg[P_{m-1}\exp\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\left(m-1\right)\Delta v-6\right)^2-\left(m\Delta v-6\right)^2\right]\right\}\\&-P_m\left[\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\left(m+1\right)\Delta v-6\right)^2\right\}+\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\left(m-1\right)\Delta v-6\right)^2\right\}}{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(m\Delta v-6\right)^2\right\}}\right]+P_{m+1}\exp\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\left(m+1\right)\Delta v-6\right)^2-\left(m\Delta v-6\right)^2\right]\right\}\Bigg]\\&-\frac{F}{\gamma}\left(P_{l,m}^{n}-P_{l,m-1}^{n}\right)\Bigg]-\left(l\Delta v-6\right)\left(P_{l,m}^{n}-P_{l-1,m}^{n}\right)-P_{l,m}^{n}\end{aligned}$$

Distribution de probabilités au temps $t = (n+1)\Delta t$

Merci de votre attention

Bibliographie

- Kinetics of activated processes from nonstationary solutions of the Fokker–Planck equation for a bistable potential – B. Cartling.
- Chaotic distribution of non-linear systems perturbed by random noise - T. Kapitaniak.
- Escape and Synchronization of a Brownian Particle _ A. Simon & A. Libchaber.
- A Fourier-transform path integral formalism to compute dispersion probability distributions in variable ocean environments – A. Alvarez, R. Pennel, B. Garay & J. Tintore.
- Path-Integral Calculation of Multivariate Fokker-Planck Systems – L. Ingber.
- Numerical evaluation of path-integral solutions to Fokker-Planck equations. III. Time and functionally dependent coeffcients – M.F. Wehner & W.G. Wolfer.
- Analysis of a randomly excited non-linear stretched string – G. Tagata.
- Optical trapping at ISIS: dimensions and numbers.
- Numerical evaluation of path-integral solutions to Fokker-Planck equations. II. Restricted stochastic processes – M.F. Wehner & W.G. Wolfer.
- Finite difference methods for the Fokker-Planck equation – J. C. Whitney.
- Numerical solution of two dimensional Fokker-Planck equations – M.P. Zorzano, H. Mais & L. Vazquez.

Code c++


```cpp
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <cmath>
#include <vector>
#include <cstdlib>
#include <math.h>
#define PI 3.14159265
using namespace std;

//-------------------------------------------------------Variables------------------------------------------------------

double kb = 1.38064852*pow(10,-23); // constante de Boltzman
double g=pow(8.01,-9); // constante de friction
double T=300; // température
double m=5.5*pow(10,-16); // masse de la particule
double D=5.17*pow(10,-13);
double eta;
double st=30; //raideur du piege (k)
double tau=g/st;
double F=pow(2*kb*T*g,0.5)*eta; // force de Langevin
double omega=2*PI*(st/(2*PI*g)); // fréquence du puit
double L=2*PI/2.6; //????????????????????
double beta = g/m;
double Eb=m*pow(omega,2);
double H=Eb/(kb*T);//(m*omega*omega)/(kb*T)
double deltat=0.001;
double deltax=0.001;
double deltav=0.001;
int p=/*50*(1/D)*(2*PI*kb*T)/(m*pow(omega,2))*/1;
int n=19000;
int l=12000;
double t=p*deltat; // temps d'ittération
double x=n*deltax-8; // position de la particule
double v=l*deltav-6; // vitesse de la particule
double K = -(g/m)*v+(F/m); // force frottement du fluide
```

Ensemble des variables utilisées

Code c++

```cpp
//----------------------------------------------------------------Normalisation de P------------------------------------------

double fct(double p, double n, double l){
    double P;
    return P=exp((-1/2)*(pow(n*deltax-6+2,2)+pow(l*deltav-6,2)));
}
double Integrale_Double(double (*fct)(double, double, double), double x_min, double x_max, double y_min, double y_max,
    int N1, int N2){

    double integ=0;
    double h1=(x_max-x_min)/N1;
    double h2=(y_max-y_min)/N2;

    for(double i=x_min; i<x_max; i+=h1){
        for(double j=y_min; j<y_max; j+=h2){
            integ+=fct(0,i+h1,j+h2);
        }
    }


    return integ*h1*h2;


}

   double integ=Integrale_Double(fct,0,n,0,l,19000,12000);
       cout<<integ<<" "<<endl;
```

Normalisation de la distribution de probabilités

Code c++


```
int*** array;

array = new int**[p];
for(int i = 0; i < p; i++) {
    array[i] = new int*[n];
    for(int j = 0; j < n; j++) {
        array[i][j] = new int[l];
        for(int k = 0; k < l; k++) {
            array[0][0][0]=exp((-1/2)*(pow(j*deltax-6+2,2)+pow(k*deltav-6,2)))+i*0; //((2*PI)/H)
             cout<<i<<" "<<j<<" "<<k<<" "<<array[i][j][k]<<endl;



        }
    }
}
ofstream valeurs("/Users/vincenttrayter/Desktop/valeursP.txt"); //changer l'adresse de .txt
for(int i = 0; i < p; i++) {
    for(int j = 0; j < n; j++) {
        for(int k = 0; k < l; k++) {
            array[0][0][0]=exp((-1/2)*(pow(j*deltax-6+2,2)+pow(k*deltav-6,2)))+i*0; //((2*PI)/H)
            valeurs<<i<<" "<<j<<" "<<k<<" "<<array[i][j][k]<<endl;
            cout<<j<<" "<<k<<" "<<array[i][j][k]<<endl;

        }
    }
}
```

Remplissage de la matrice P[0][m][n]

Code c++


```
array[0][0][0]=(1/L)*exp(-(2*Eb/(kb*T)));

array[1][1][1]=((deltat/beta)*((1/2*pow(deltav,2))*(array[0][1][0])+array[0][1][1])-(1/2*pow(deltav,2))*array[0][1]
    [1]+(kb*t/(2*pow(deltav,2))*m)*((array[0][1][0]*exp(0.5*(pow((l-1)*deltav-6,2))-pow((l*deltav-6),2))+(array[1]
    [1][11]*exp(0.5*(pow((l+1)*deltav-6,2))-pow((l*deltav-6),2)))+(array[1][1][1]*exp(-0.5*(pow((l+1)*deltav-6,2))))
    +(array[0][1][1]*exp(-0.5*(pow((l-1)*deltav-6,2))))+(array[0][1][1]/(exp(-0.5*(pow((l)*deltav-6,2))))))-(F/
    g)*(array[0][1][1]-array[0][1][0])))-(pow(l*deltav-6,2))*(array[0][1][1]-array[0][0][1])-array[0][1][1];

for(int i=1; i<p; i++){
    for(int j=1; j<n; j++){
        for(int k=1; k<l; k++){
            cout<<i<<" "<<j<<" "<<k<<" "<<array[i][j][k]<<endl;

        }
    }
}
```

Remplissage de la matrice P[l][m][n]