

Quelques illustrations de la théorie quantique

IX^{es} Rencontres d'été de physique de
l'infiniment grand à l'infiniment petit

Claude Aslangul
LPTMC - Sorbonne Université

Orsay, 18 juillet 2019

“Quantum mechanics is a bizarre theory, invented to explain atoms. As far as we know today it is capable of explaining everything about ordinary matter (chemistry, biology, superconductivity), sometimes with stunning numerical accuracy. But it also says something about the occurrence of the most spectacular event in the cosmos – the supernova.”

Elliott H. Lieb, 1990

Introduction

La théorie quantique (TQ) : seulement pour l'infiniment petit ?

La théorie quantique (TQ) : seulement pour l'infiniment petit ?

- Non !

La théorie quantique (TQ) : seulement pour l'infiniment petit ?

- Non !
- Clé pour la compréhension du monde à **toutes** les échelles observables

La théorie quantique (TQ) : seulement pour l'infiniment petit ?

- Non !
- Clé pour la compréhension du monde à **toutes** les échelles observables
- Jusqu'au mur de Planck, tout système physique a à voir, de près ou de loin, avec la TQ...

La théorie quantique (TQ) : seulement pour l'infiniment petit ?

- Non !
- Clé pour la compréhension du monde à **toutes** les échelles observables
- Jusqu'au mur de Planck, tout système physique a à voir, de près ou de loin, avec la TQ...
- “*Effets quantiques macroscopiques*” : supraconductivité, superfluidité,... ; ambigu, à la limite, tout est quantique

La théorie quantique (TQ) : seulement pour l'infiniment petit ?

- Non !
- Clé pour la compréhension du monde à **toutes** les échelles observables
- Jusqu'au mur de Planck, tout système physique a à voir, de près ou de loin, avec la TQ...
- "*Effets quantiques macroscopiques*" : supraconductivité, superfluidité,... ; ambigu, à la limite, tout est quantique
- ... mais la question du **réductionnisme** peut (et doit) toujours être posée ! (\implies débat lors des VI^{es} Rencontres, 2016)

La théorie quantique (TQ) : pour qui ?

La théorie quantique (TQ) : pour qui ?

- Physique des hautes et basses énergies

La théorie quantique (TQ) : pour qui ?

- Physique des hautes et basses énergies
 - physique des particules

La théorie quantique (TQ) : pour qui ?

- Physique des hautes et basses énergies
 - physique des particules
 - noyaux

La théorie quantique (TQ) : pour qui ?

- Physique des hautes et basses énergies
 - physique des particules
 - noyaux
 - atomes

La théorie quantique (TQ) : pour qui ?

- Physique des hautes et basses énergies
 - physique des particules
 - noyaux
 - atomes
 - molécules

La théorie quantique (TQ) : pour qui ?

- Physique des hautes et basses énergies
 - physique des particules
 - noyaux
 - atomes
 - molécules
 - polymères...
 - ...

- Physique plus macroscopique

- Physique plus macroscopique
 - matière condensée (solides)

- Physique plus macroscopique
 - matière condensée (solides)
 - chimie

- Physique plus macroscopique
 - matière condensée (solides)
 - chimie
 - biophysique

- Physique plus macroscopique
 - matière condensée (solides)
 - chimie
 - biophysique
 - ...

- Physique plus macroscopique
 - matière condensée (solides)
 - chimie
 - biophysique
 - ...
- Mais aussi : systèmes “infinis” et limite thermodynamique

- Physique plus macroscopique
 - matière condensée (solides)
 - chimie
 - biophysique
 - ...
- Mais aussi : systèmes “infinis” et limite thermodynamique
- Objets astrophysiques (e.g. naines blanches, étoiles à neutrons...)

- Physique plus macroscopique
 - matière condensée (solides)
 - chimie
 - biophysique
 - ...
- Mais aussi : systèmes “infinis” et limite thermodynamique
- Objets astrophysiques (e.g. naines blanches, étoiles à neutrons...)
- Cosmologie : fluctuations du fond diffus cosmologique, nucléation des galaxies/amas de galaxies ?

- Et enfin auto-tests

- Et enfin auto-tests
 - expériences avec un très petit nombre d'atomes, de photons,...

- Et enfin auto-tests

- expériences avec un très petit nombre d'atomes, de photons,...

"We never experiment with just one electron or atom or (small) molecule. In thought-experiments we sometimes assume that we do; this invariably entails ridiculous consequences..."

(Schrödinger, 1952)

et pourtant...

- Et enfin auto-tests

- expériences avec un très petit nombre d'atomes, de photons,...

"We never experiment with just one electron or atom or (small) molecule. In thought-experiments we sometimes assume that we do; this invariably entails ridiculous consequences..."

(Schrödinger, 1952)

et pourtant...

- vérification d'effets spectaculaires (sauts quantiques, effet Zénon, téléportation, cryptographie,...)

La théorie quantique : deux concepts fondamentaux

La théorie quantique : deux concepts fondamentaux

- La **fonction d'onde** Ψ , ou le vecteur d'état $|\Psi\rangle$ (système isolé, sinon opérateur densité $\hat{\rho}$ (e.g. système canonique à l'équilibre $\hat{\rho} \propto e^{-\beta H}$))

- Le **spin** S (moment cinétique *intrinsèque*), attribut de *toute* particule élémentaire

- Le **spin** S (moment cinétique *intrinsèque*), attribut de *toute* particule élémentaire
 - Les fermions, spin **demi-entier** (quarks, électron,..., la “matière”). Ne s’aiment pas les uns les autres (principe d’exclusion de Pauli) et refusent de cohabiter dans le même état

- Le **spin** S (moment cinétique *intrinsèque*), attribut de *toute* particule élémentaire
 - Les fermions, spin **demi-entier** (quarks, électron,..., la “matière”).
Ne s’aiment pas les uns les autres (principe d’exclusion de Pauli) et refusent de cohabiter dans le même état
 - Les bosons, spin **entier**

- Le **spin** S (moment cinétique *intrinsèque*), attribut de *toute* particule élémentaire
 - Les fermions, spin **demi-entier** (quarks, électron,..., la “matière”).
Ne s’aiment pas les uns les autres (principe d’exclusion de Pauli) et refusent de cohabiter dans le même état
 - Les bosons, spin **entier**
 - photons, gluons,..., vecteurs des interactions

- Le **spin** S (moment cinétique *intrinsèque*), attribut de *toute* particule élémentaire
 - Les fermions, spin **demi-entier** (quarks, électron,..., la “matière”). Ne s’aiment pas les uns les autres (principe d’exclusion de Pauli) et refusent de cohabiter dans le même état
 - Les bosons, spin **entier**
 - photons, gluons,..., vecteurs des interactions
 - certaines excitations des champs quantifiés (phonons, magnons,...)

- Le **spin** S (moment cinétique *intrinsèque*), attribut de *toute* particule élémentaire
 - Les fermions, spin **demi-entier** (quarks, électron,..., la “matière”). Ne s’aiment pas les uns les autres (principe d’exclusion de Pauli) et refusent de cohabiter dans le même état
 - Les bosons, spin **entier**
 - photons, gluons,..., vecteurs des interactions
 - certaines excitations des champs quantifiés (phonons, magnons,...)
 - particules composites constituées d’un nombre *pair* de fermions

- Le **spin** S (moment cinétique *intrinsèque*), attribut de *toute* particule élémentaire
 - Les fermions, spin **demi-entier** (quarks, électron,..., la "matière"). Ne s'aiment pas les uns les autres (principe d'exclusion de Pauli) et refusent de cohabiter dans le même état
 - Les bosons, spin **entier**
 - photons, gluons,..., vecteurs des interactions
 - certaines excitations des champs quantifiés (phonons, magnons,...)
 - particules composites constituées d'un nombre *pair* de fermions

Instinct grégaire, peuvent se rassemblent presque tous dans le **même** état (condensation de Bose)

Robustesse et étrangetés de la théorie quantique

Le “paradoxe” EPR, l'inégalité de Bell et les expériences d'Aspect

Le “paradoxe” EPR, l'inégalité de Bell et les expériences d'Aspect

- Einstein, Podolsky et Rosen (1935) : la TQ est une théorie *incomplète* ($\iff \exists$ des “**variables cachées**”)

Le “paradoxe” EPR, l'inégalité de Bell et les expériences d'Aspect

- Einstein, Podolsky et Rosen (1935) : la TQ est une théorie *incomplète* ($\iff \exists$ des “**variables cachées**”)
- Inégalité de Bell (1964) : **si** \exists variables cachées, $|S| < 2$

Le “paradoxe” EPR, l'inégalité de Bell et les expériences d'Aspect

- Einstein, Podolsky et Rosen (1935) : la TQ est une théorie *incomplète* ($\iff \exists$ des “**variables cachées**”)
- Inégalité de Bell (1964) : **si** \exists variables cachées, $|S| < 2$
- Expériences d'Aspect, Dalibard et Roger (1982) : $|S| > 2$, **il n'existe pas de variables cachées**

Le “paradoxe” EPR, l'inégalité de Bell et les expériences d'Aspect

- Einstein, Podolsky et Rosen (1935) : la TQ est une théorie *incomplète* ($\iff \exists$ des “**variables cachées**”)
- Inégalité de Bell (1964) : **si** \exists variables cachées, $|S| < 2$
- Expériences d'Aspect, Dalibard et Roger (1982) : $|S| > 2$, **il n'existe pas de variables cachées**
- Non localité de la TQ (\implies débat lors des Rencontres 2013)

Le “paradoxe” EPR, l'inégalité de Bell et les expériences d'Aspect

- Einstein, Podolsky et Rosen (1935) : la TQ est une théorie *incomplète* ($\iff \exists$ des “**variables cachées**”)
- Inégalité de Bell (1964) : **si** \exists variables cachées, $|S| < 2$
- Expériences d'Aspect, Dalibard et Roger (1982) : $|S| > 2$, **il n'existe pas de variables cachées**
- Non localité de la TQ (\implies débat lors des Rencontres 2013)
- En physique, **l'expérience est le juge de paix**

Le “paradoxe” du chat de Schrödinger

Le “paradoxe” du chat de Schrödinger

- Un chat à la fois mort et vivant ?

Le “paradoxe” du chat de Schrödinger

- Un chat à la fois mort et vivant ?
 - $|\Psi\rangle = a|\text{mort}\rangle + b|\text{vivant}\rangle$? Non : système non isolé !

Le “paradoxe” du chat de Schrödinger

- Un chat à la fois mort et vivant ?
 - $|\Psi\rangle = a|\text{mort}\rangle + b|\text{vivant}\rangle$? Non : système non isolé !
 - Et la fiole de poison ?

Le “paradoxe” du chat de Schrödinger

- Un chat à la fois mort et vivant ?
 - $|\Psi\rangle = a|\text{mort}\rangle + b|\text{vivant}\rangle$? Non : système non isolé !
 - Et la fiole de poison ?
 - Hamiltonien du chat = ???

Le “paradoxe” du chat de Schrödinger

- Un chat à la fois mort et vivant ?
 - $|\Psi\rangle = a|\text{mort}\rangle + b|\text{vivant}\rangle$? Non : système non isolé !
 - Et la fiole de poison ?
 - Hamiltonien du chat = ???
 - Le chat est un objet macroscopique (incontrôlable) n'échappant pas à la décohérence (tout comme une boule de billard)

Le “paradoxe” du chat de Schrödinger

- Un chat à la fois mort et vivant ?
 - $|\Psi\rangle = a|\text{mort}\rangle + b|\text{vivant}\rangle$? Non : système non isolé !
 - Et la fiole de poison ?
 - Hamiltonien du chat = ???
 - Le chat est un objet macroscopique (incontrôlable) n'échappant pas à la décohérence (tout comme une boule de billard)
 - ...

Le “paradoxe” du chat de Schrödinger

- Un chat à la fois mort et vivant ?
 - $|\Psi\rangle = a|\text{mort}\rangle + b|\text{vivant}\rangle$? Non : système non isolé !
 - Et la fiole de poison ?
 - Hamiltonien du chat = ???
 - Le chat est un objet macroscopique (incontrôlable) n'échappant pas à la décohérence (tout comme une boule de billard)
 - ...

un chat (un vrai) à la fois mort et vivant, ça n'existe pas

- Et les chatons ? Les tout petits petits, et à basse température, ils existent et font ce que dit la TQ (exemple : sauts quantiques d'atomes ou du nombre de photons dans une cavité, intrication de deux photons...)

La téléportation quantique

La téléportation quantique

- De la science-fiction ? Non !

La téléportation quantique

- De la science-fiction ? Non !
- Deux systèmes ayant interagi et **soigneusement préservés** ne sont plus *séparables*

La téléportation quantique

- De la science-fiction ? Non !
- Deux systèmes ayant interagi et **soigneusement préservés** ne sont plus *séparables*
- Exemple : intrication de deux spins $1/2$

- Pour chaque spin ($i=1, 2$) :

$$|\Psi^{(i)}\rangle = c_{\uparrow}^{(i)}|\uparrow\rangle + c_{\downarrow}^{(i)}|\downarrow\rangle, \quad (c_{\uparrow}^{(i)}, c_{\downarrow}^{(i)}) \in \mathbb{C}^2.$$

- Pour chaque spin ($i=1, 2$) :

$$|\Psi^{(i)}\rangle = c_{\uparrow}^{(i)}|\uparrow\rangle + c_{\downarrow}^{(i)}|\downarrow\rangle, \quad (c_{\uparrow}^{(i)}, c_{\downarrow}^{(i)}) \in \mathbb{C}^2.$$

- État le plus général des deux spins :

$$|\Psi^{(12)}\rangle = c_{\uparrow\uparrow}^{(12)}|\uparrow\uparrow\rangle + c_{\downarrow\uparrow}^{(12)}|\downarrow\uparrow\rangle + c_{\uparrow\downarrow}^{(12)}|\uparrow\downarrow\rangle + c_{\downarrow\downarrow}^{(12)}|\downarrow\downarrow\rangle.$$

- Pour chaque spin ($i=1, 2$) :

$$|\Psi^{(i)}\rangle = c_{\uparrow}^{(i)}|\uparrow\rangle + c_{\downarrow}^{(i)}|\downarrow\rangle, \quad (c_{\uparrow}^{(i)}, c_{\downarrow}^{(i)}) \in \mathbb{C}^2.$$

- État le plus général des deux spins :

$$|\Psi^{(12)}\rangle = c_{\uparrow\uparrow}^{(12)}|\uparrow\uparrow\rangle + c_{\downarrow\uparrow}^{(12)}|\downarrow\uparrow\rangle + c_{\uparrow\downarrow}^{(12)}|\uparrow\downarrow\rangle + c_{\downarrow\downarrow}^{(12)}|\downarrow\downarrow\rangle.$$

avec $|\Psi^{(12)}\rangle \neq |\Psi^{(1)}\rangle \otimes |\Psi^{(2)}\rangle$, sauf si $c_{\uparrow\downarrow}^{(12)} = c_{\uparrow}^{(1)}c_{\downarrow}^{(2)}$, etc...

- Deux systèmes sont *intriqués* ssi leur vecteur d'état est un produit tensoriel **non factorisable**

- Deux systèmes sont *intriqués* ssi leur vecteur d'état est un produit tensoriel **non factorisable**
- En général, deux particules (discernables ou non) ayant interagi sont indissociables l'une de l'autre et restent **corrélées** même si elles n'interagissent pas (ou plus) l'une avec l'autre au sens ordinaire

- Deux systèmes sont *intriqués* ssi leur vecteur d'état est un produit tensoriel **non factorisable**
- En général, deux particules (discernables ou non) ayant interagi sont indissociables l'une de l'autre et restent **corrélées** même si elles n'interagissent pas (ou plus) l'une avec l'autre au sens ordinaire

Elles sont **intriquées**

- Par exemple, collision de deux spins 1/2

$$t = -\infty : |\downarrow\uparrow\rangle \longrightarrow$$

$$t = +\infty : \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + e^{i\alpha}|\downarrow\uparrow\rangle) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

- Par exemple, collision de deux spins 1/2

$$t = -\infty : |\downarrow\uparrow\rangle \longrightarrow$$

$$t = +\infty : \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + e^{i\alpha}|\downarrow\uparrow\rangle) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

- Repartis à l'infini l'un de l'autre, les deux spins intriqués continuent à former *un et un seul* système (*non séparabilité*)

- Par exemple, collision de deux spins 1/2

$$t = -\infty : |\downarrow\uparrow\rangle \longrightarrow$$

$$t = +\infty : \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + e^{i\alpha}|\downarrow\uparrow\rangle) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

- Repartis à l'infini l'un de l'autre, les deux spins intriqués continuent à former *un et un seul* système (*non séparabilité*)
- Perturber l'un avec un troisième larron, c'est agir sur l'autre (*non localité*) \iff **Téléportation**

- Par exemple, collision de deux spins 1/2

$$t = -\infty : |\downarrow\uparrow\rangle \longrightarrow$$

$$t = +\infty : \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + e^{i\alpha}|\downarrow\uparrow\rangle) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

- Repartis à l'infini l'un de l'autre, les deux spins intriqués continuent à former *un et un seul* système (*non séparabilité*)
- Perturber l'un avec un troisième larron, c'est agir sur l'autre (*non localité*) \iff **Téléportation**
- Expérience réalisée avec des photons sur des distance de plus en plus grandes (de quelques mètres en 1997 à des dizaines de kilomètres aujourd'hui).

Autre exemple

Autre exemple

- Alice et Bob fabriquent un état intriqué de deux spins q_A et q_B puis se séparent, Alice gardant avec elle q_A , Bob emportant q_B

Autre exemple

- Alice et Bob fabriquent un état intriqué de deux spins q_A et q_B puis se séparent, Alice gardant avec elle q_A , Bob emportant q_B
- Alice associe (tensoriellement) q_A et un troisième spin q_C , qu'elle conserve

Autre exemple

- Alice et Bob fabriquent un état intriqué de deux spins q_A et q_B puis se séparent, Alice gardant avec elle q_A , Bob emportant q_B
- Alice associe (tensoriellement) q_A et un troisième spin q_C , qu'elle conserve
- Alice effectue des mesures de sa paire et en transmet les résultats à Bob

Autre exemple

- Alice et Bob fabriquent un état intriqué de deux spins q_A et q_B puis se séparent, Alice gardant avec elle q_A , Bob emportant q_B
- Alice associe (tensoriellement) q_A et un troisième spin q_C , qu'elle conserve
- Alice effectue des mesures de sa paire et en transmet les résultats à Bob
- Compte tenu des résultats obtenus par Alice, Bob fait alors certaines opérations sur son propre *qubit* selon des règles dont ils sont convenus avant de se séparer... et peut en déduire l'état du spin d'Alice qu'aucun des deux ne connaît au départ !

- Mais...

- Mais...
 - Condition essentielle : après la séparation spatiale, aucun effet perturbateur incontrôlable ne doit intervenir \implies importance (et en pratique difficulté) de **protéger** efficacement le système.

- Mais...
 - Condition essentielle : après la séparation spatiale, aucun effet perturbateur incontrôlable ne doit intervenir \implies importance (et en pratique difficulté) de **protéger** efficacement le système.
 - *A contrario*, quand aucune précaution n'est prise, ces parties retrouvent de fait chacune tôt ou tard leur individualité indépendamment l'une de l'autre... interdisant une vision holistique de tout ce qui constitue l'univers (ne pas croire les charlatans de la tendance *New Age*) !

L'effet Zénon quantique

L'effet Zénon quantique

- Préviation théorique de Misra et Sudarshan (1977)

L'effet Zénon quantique

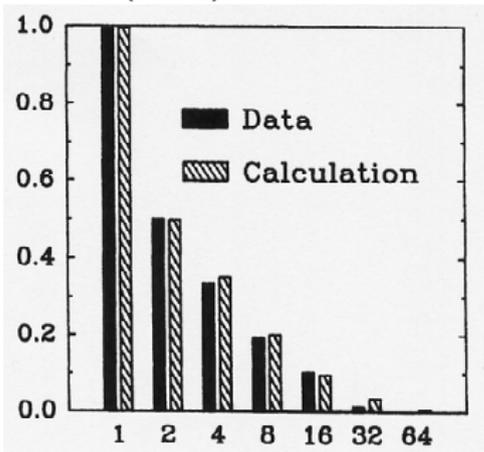
- Prévission théorique de Misra et Sudarshan (1977)
- Une mesure d'observable \implies réduction du paquet d'ondes \iff projection de $|\Psi\rangle$

L'effet Zénon quantique

- Préviation théorique de Misra et Sudarshan (1977)
- Une mesure d'observable \implies réduction du paquet d'ondes \iff projection de $|\Psi\rangle$
- Mesures répétées très vite \implies **blocage de l'évolution temporelle** \iff Un système instable... devient stable !

- Observation par Itano *et al* (1990)

- Observation par Itano *et al* (1990)



Résultats de l'expérience de Itano *et al*. En abscisse, nombre de mesures pendant un intervalle de temps donné ; en ordonnée, probabilité que l'atome quitte son état de départ

Quelques problématiques **macroscopiques** pour
lesquelles la TQ est essentielle

La conductivité électrique des solides

La conductivité électrique des solides

- Pourquoi y a-t-il des **conducteurs** et des **isolants** ?

La conductivité électrique des solides

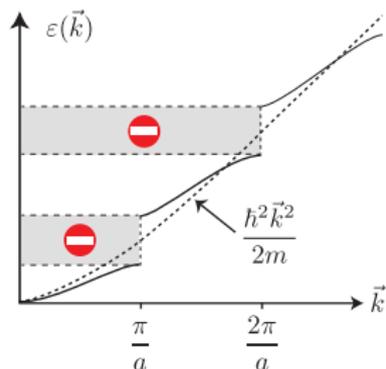
- Pourquoi y a-t-il des **conducteurs** et des **isolants** ?
- Pour les métaux : $\sigma_{\text{Drude}} = n \frac{e^2 \tau}{m}$ (Drude, 1905).

La conductivité électrique des solides

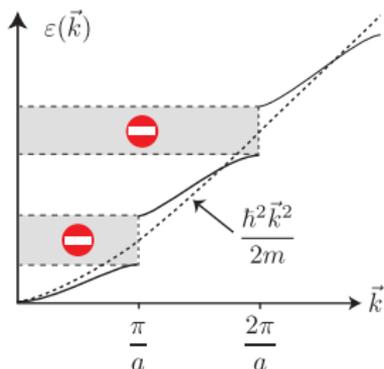
- Pourquoi y a-t-il des **conducteurs** et des **isolants** ?
- Pour les métaux : $\sigma_{\text{Drude}} = n \frac{e^2 \tau}{m}$ (Drude, 1905).
- Solide (cristallisé) : assemblage spatialement périodique d'objets massifs (molécules, ions) entre lesquels se meuvent des électrons.

La conductivité électrique des solides

- Pourquoi y a-t-il des **conducteurs** et des **isolants** ?
- Pour les métaux : $\sigma_{\text{Drude}} = n \frac{e^2 \tau}{m}$ (Drude, 1905).
- Solide (cristallisé) : assemblage spatialement périodique d'objets massifs (molécules, ions) entre lesquels se meuvent des électrons.
- Groupe de symétrie : translations spatiales **discrètes** \iff théorème de Bloch \iff **fragmentation** de la courbe de dispersion.



Représentation schématique de la relation de dispersion d'un électron dans un réseau unidimensionnel de pas a . La ligne en tiretés est la parabole de l'électron dans le vide. Les sauts de ε constituent les *gaps* d'énergie.



Représentation schématique de la relation de dispersion d'un électron dans un réseau unidimensionnel de pas a . La ligne en tiretés est la parabole de l'électron dans le vide. Les sauts de ε constituent les *gaps* d'énergie.

- \implies Bandes **permises** et bandes **interdites**.

- Électron = fermion \implies remplissage des bandes conformément au principe d'exclusion de Pauli ; à température nulle :

- Électron = fermion \implies remplissage des bandes conformément au principe d'exclusion de Pauli ; à température nulle :
 - Plus haute bande pleine \implies **isolant**

- Électron = fermion \implies remplissage des bandes conformément au principe d'exclusion de Pauli ; à température nulle :
 - Plus haute bande pleine \implies **isolant**
 - Plus haute bande partiellement remplie \implies **conducteur**

- Électron = fermion \implies remplissage des bandes conformément au principe d'exclusion de Pauli ; à température nulle :
 - Plus haute bande pleine \implies **isolant**
 - Plus haute bande partiellement remplie \implies **conducteur**
- À température finie : un isolant peut être semi-conducteur si $k_B T \sim E_{\text{gap}}$.

- Électron = fermion \implies remplissage des bandes conformément au principe d'exclusion de Pauli ; à température nulle :
 - Plus haute bande pleine \implies **isolant**
 - Plus haute bande partiellement remplie \implies **conducteur**
- À température finie : un isolant peut être semi-conducteur si $k_B T \sim E_{\text{gap}}$.
- Après un gros effort :

$$\sigma = n \frac{e^2 \tau}{m_{\text{eff}}}$$

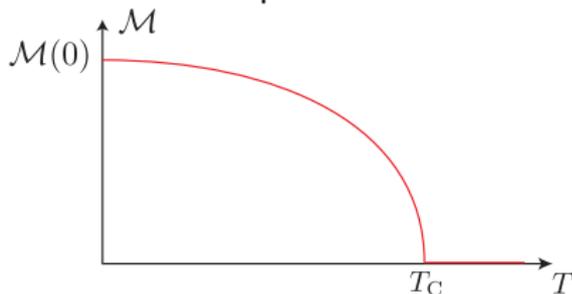
Le magnétisme

Le magnétisme

- Pour un ferromagnétique (Fe, Ni, Co,...) : aimantation spontanée \mathcal{M} au dessous d'une certaine température

Le magnétisme

- Pour un ferromagnétique (Fe, Ni, Co,...) : aimantation spontanée \mathcal{M} au dessous d'une certaine température



Variation typique de l'aimantation spontanée d'un ferromagnétique.
 T_C est la température critique au dessus de laquelle le matériau est simplement paramagnétique.

- Orientation de moments magnétiques microscopiques suivant un ordre à longue distance

- Orientation de moments magnétiques microscopiques suivant un ordre à longue distance
- Origine physique de ces moments magnétiques ??? Le **spin** !!!

- Orientation de moments magnétiques microscopiques suivant un ordre à longue distance
- Origine physique de ces moments magnétiques ??? Le **spin** !!!
- Première tentative (classique) pour le ferromagnétisme : le modèle d'Ising (1925)

- S_i : variables *classiques* prenant deux valeurs, ± 1

$$H_{\text{Ising}} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j - \mu \mathcal{B} \sum_i S_i ;$$

- S_i : variables *classiques* prenant deux valeurs, ± 1

$$H_{\text{Ising}} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j - \mu B \sum_i S_i ;$$

- J : énergie phénoménologique (positive)

- S_i : variables *classiques* prenant deux valeurs, ± 1

$$H_{\text{Ising}} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j - \mu B \sum_i S_i ;$$

- J : énergie phénoménologique (positive)
- Tour de force d'Onsager (1944) : à $D=2$, \exists une phase ferromagnétique si $T < T_C = \frac{2J}{[\ln(1+\sqrt{2})]k_B} \simeq \frac{2.279}{k_B} J$

- S_i : variables *classiques* prenant deux valeurs, ± 1

$$H_{\text{Ising}} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j - \mu B \sum_i S_i ;$$

- J : énergie phénoménologique (positive)
- Tour de force d'Onsager (1944) : à $D=2$, \exists une phase ferromagnétique si $T < T_C = \frac{2J}{[\ln(1+\sqrt{2})]k_B} \simeq \frac{2.279}{k_B} J$
- Ordre à **longue** distance en dépit d'interactions à **courte** portée

- S_i : variables *classiques* prenant deux valeurs, ± 1

$$H_{\text{Ising}} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j - \mu B \sum_i S_i ;$$

- J : énergie phénoménologique (positive)
- Tour de force d'Onsager (1944) : à $D=2$, \exists une phase ferromagnétique si $T < T_C = \frac{2J}{[\ln(1+\sqrt{2})]k_B} \simeq \frac{2.279}{k_B} J$
- Ordre à **longue** distance en dépit d'interactions à **courte** portée
- $D \geq 3$: solution exacte non connue mais tout indique que $\exists T_C > 0$, qui croît si D croît (les fluctuations perdent de leur importance du côté des grandes dimensionnalités)

- Heisenberg, une fois encore...

- Heisenberg, une fois encore...

$$H_{\text{Heisenberg}} = -\hbar^{-2} J \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j - \hbar^{-1} \mu \vec{B} \sum_i \vec{S}_i$$

- Heisenberg, une fois encore...

$$H_{\text{Heisenberg}} = -\hbar^{-2} J \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j - \hbar^{-1} \mu \vec{B} \sum_i \vec{S}_i$$

- J : énergie (encore positive), explicable grâce au spin

- Heisenberg, une fois encore...

$$H_{\text{Heisenberg}} = -\hbar^{-2} J \sum_{\langle i, j \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j - \hbar^{-1} \mu \vec{B} \sum_i \vec{S}_i$$

- J : énergie (encore positive), explicable grâce au spin
- Redoutable difficulté, car les spins ne commutent pas ($[S_{ix}, S_{iy}] = i\hbar S_{iz}, \dots$)

- Heisenberg, une fois encore...

$$H_{\text{Heisenberg}} = -\hbar^{-2} J \sum_{\langle i, j \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j - \hbar^{-1} \mu \vec{B} \sum_i \vec{S}_i$$

- J : énergie (encore positive), explicable grâce au spin
- Redoutable difficulté, car les spins ne commutent pas ($[S_{ix}, S_{iy}] = i\hbar S_{iz}, \dots$)
- Dyson, Lieb et Simon (1976) : \exists une transition para-ferro si $D \geq 3$

- Heisenberg, une fois encore...

$$H_{\text{Heisenberg}} = -\hbar^{-2} J \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j - \hbar^{-1} \mu \vec{B} \sum_i \vec{S}_i$$

- J : énergie (encore positive), explicable grâce au spin
- Redoutable difficulté, car les spins ne commutent pas ($[S_{ix}, S_{iy}] = i\hbar S_{iz}, \dots$)
- Dyson, Lieb et Simon (1976) : \exists une transition para-ferro si $D \geq 3$
- Très grande richesse : antiferromagnétisme ($J < 0$ et frustration), héliamagnétisme, magnons, paires liées de magnons ($D=1$),...

La condensation de Bose-Einstein (BEC)

La condensation de Bose-Einstein (BEC)

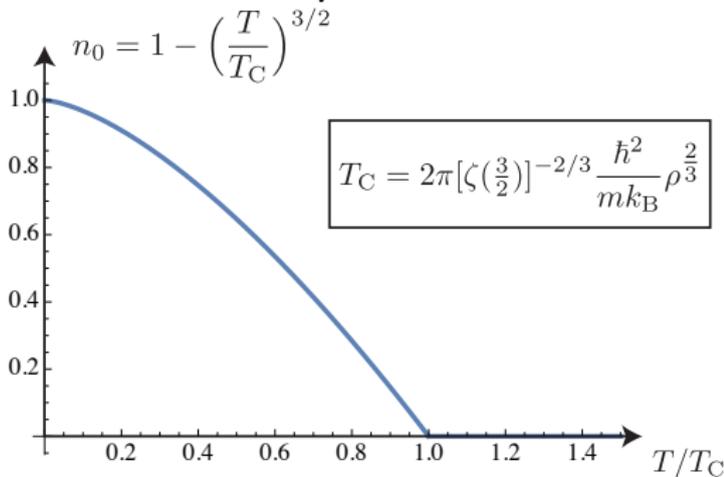
- Bosons : peuvent se rassembler dans le même état (instinct *grégaire*)

La condensation de Bose-Einstein (BEC)

- Bosons : peuvent se rassembler dans le même état (instinct *grégaire*)
- N bosons sans interaction (“gaz” parfait) dans volume V , N_0 dans l'état fondamental, $n_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{N_0}{N}$, fraction condensée

- Dans la limite $N \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$, $\frac{N}{V} = C^{\text{ste}} \stackrel{\text{déf}}{=} \rho$ et $D=3$:

- Dans la limite $N \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$, $\frac{N}{V} = C^{\text{ste}} \stackrel{\text{déf}}{=} \rho$ et $D=3$:



Pour un gaz parfait de bosons dans \mathbb{R}^3 , variation de la fraction condensée

$n_0 = \lim \frac{N_0}{N}$ en fonction de la température.

- Longueur d'onde thermique de de Broglie : $\lambda_T \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}$

- Longueur d'onde thermique de de Broglie : $\lambda_T \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}$

$$\rho\lambda_{T_C}^3 = \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \simeq 2.612$$

- Longueur d'onde thermique de de Broglie : $\lambda_T \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}$

$$\rho\lambda_{T_C}^3 = \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \simeq 2.612$$

$$\lambda_{T_C} \sim \rho^{-1/3} \sim \text{distance moyenne entre bosons}$$

- Longueur d'onde thermique de de Broglie : $\lambda_T \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}$

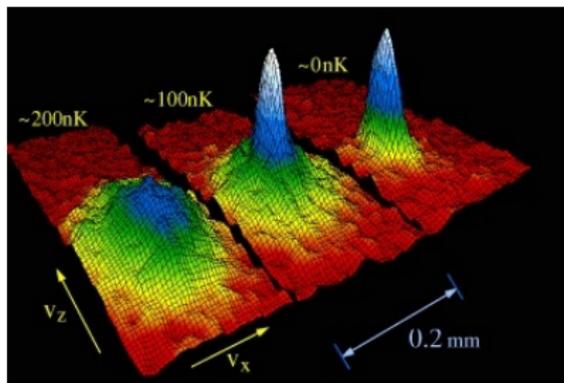
$$\rho\lambda_{T_C}^3 = \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \simeq 2.612$$

$$\lambda_{T_C} \sim \rho^{-1/3} \sim \text{distance moyenne entre bosons}$$

Dans la phase condensée, les fonctions d'onde des différents bosons se chevauchent : l'assemblée se comporte de façon *collective*.

- Regain d'intérêt spectaculaire dans les années 1990 en raison des progrès fulgurants accomplis pour piéger un gaz atomique à très basse température

- Regain d'intérêt spectaculaire dans les années 1990 en raison des progrès fulgurants accomplis pour piéger un gaz atomique à très basse température
- Un grand nombre d'atomes se comportent collectivement comme s'ils formaient en quelque sorte un seul et unique **méga-atome**



Distribution des vitesses d'environ dix millions d'atomes de Rubidium refroidis de 200 à 20 nK. À "haute" température (à gauche), c'est essentiellement la distribution de Boltzmann. Une fois passée la température critique, le condensat de Bose-Einstein apparaît par le pic central de plus en plus fin rassemblant les atomes dont les vitesses sont de moins en moins dispersées autour de la vitesse nulle ; ce groupe est immergé dans le bain des atomes non condensés ayant des vitesses distribuées aléatoirement.

La supraconductivité

La supraconductivité

- Mercure, aluminium, plomb,... : annulation **stricte** de la résistivité à une certaine (très) basse température T_C (Holst et Kammerlingh-Onnes, 1911)

La supraconductivité

- Mercure, aluminium, plomb,... : annulation **stricte** de la résistivité à une certaine (très) basse température T_C (Holst et Kammerlingh-Onnes, 1911)
- Effet isotopique (Maxwell, 1950) : T_C varie lors de substitutions isotopiques (implication des **vibrations** (*phonons*) du réseau)

La supraconductivité

- Mercure, aluminium, plomb,... : annulation **stricte** de la résistivité à une certaine (très) basse température T_C (Holst et Kammerlingh-Onnes, 1911)
- Effet isotopique (Maxwell, 1950) : T_C varie lors de substitutions isotopiques (implication des **vibrations** (*phonons*) du réseau)
- Étape décisive, Cooper (1956) : la mer de Fermi est **instable** dès qu'il existe une interaction **attractive** entre les électrons \implies paires de Cooper, “molécules” fragiles (énergie de liaison $\lesssim 1$ meV)

- Théorie microscopique de Bardeen, Cooper et Schrieffer (1957)

- Théorie microscopique de Bardeen, Cooper et Schrieffer (1957)
 - Interaction *attractive* entre électrons ??? Oui, grâce aux phonons !

- Théorie microscopique de Bardeen, Cooper et Schrieffer (1957)
 - Interaction *attractive* entre électrons ??? Oui, grâce aux phonons !
 - Deux électrons liés dans une paire constituent un **boson** \implies les paires peuvent se condenser à basse température : le métal devient supraconducteur

- Théorie microscopique de Bardeen, Cooper et Schrieffer (1957)
 - Interaction *attractive* entre électrons ??? Oui, grâce aux phonons !
 - Deux électrons liés dans une paire constituent un **boson** \implies les paires peuvent se condenser à basse température : le métal devient supraconducteur
 - État supra : caractérisé par un *gap* d'énergie Δ entre le fondamental et les premières excitations

- Résistivité *nulle* tant que les collisions électrons-ions ont une énergie plus petite que Δ

- Résistivité *nulle* tant que les collisions électrons-ions ont une énergie plus petite que Δ
- $\Delta = 0$ si $T > T_C$: le métal retrouve l'état normal (résistivité finie).

- Résistivité *nulle* tant que les collisions électrons-ions ont une énergie plus petite que Δ
- $\Delta = 0$ si $T > T_C$: le métal retrouve l'état normal (résistivité finie).
- Le *gap* varie typiquement comme l'aimantation spontanée d'un ferromagnétique

- Résistivité *nulle* tant que les collisions électrons-ions ont une énergie plus petite que Δ
- $\Delta = 0$ si $T > T_C$: le métal retrouve l'état normal (résistivité finie).
- Le *gap* varie typiquement comme l'aimantation spontanée d'un ferromagnétique
- ≥ 1986 : supras à "haute" température critique. BCS or not ?

Existence de la limite thermodynamique (LT)

Existence de la limite thermodynamique (LT)

- Mécanique statistique : N particules ou degrés de liberté,
 $N \sim \mathcal{N} \gg \gg 1$

Existence de la limite thermodynamique (LT)

- Mécanique statistique : N particules ou degrés de liberté,
 $N \sim \mathcal{N} \gg \gg 1$
- Lien avec la thermodynamique (grandeurs extensives, intensives, etc.)

Existence de la limite thermodynamique (LT)

- Mécanique statistique : N particules ou degrés de liberté,
 $N \sim \mathcal{N} \gg \gg 1$
- Lien avec la thermodynamique (grandeurs extensives, intensives, etc.)
- Exemple : l'énergie ; on attend ;

$$N \gg \gg 1 : E(N) = N\varepsilon + \text{corrections}$$

- Très souvent ($\alpha \geq 0$) : $E(N) = N\varepsilon + \mathcal{O}(N^{-\alpha}) \iff$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E(N)}{N} = \varepsilon + \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{O}(N^{-(\alpha+1)}) = \varepsilon$$

- Très souvent ($\alpha \geq 0$) : $E(N) = N\varepsilon + \mathcal{O}(N^{-\alpha}) \iff$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E(N)}{N} = \varepsilon + \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{O}(N^{-(\alpha+1)}) = \varepsilon$$

- En pratique et plus précisément (un gaz dans le volume V , par exemple)

$$\text{LT} : N \rightarrow \infty, \quad V \rightarrow \infty, \quad \frac{N}{V} = C^{\text{ste}} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \rho$$

- Très souvent ($\alpha \geq 0$) : $E(N) = N\varepsilon + \mathcal{O}(N^{-\alpha}) \iff$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E(N)}{N} = \varepsilon + \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{O}(N^{-(\alpha+1)}) = \varepsilon$$

- En pratique et plus précisément (un gaz dans le volume V , par exemple)

$$\text{LT} : N \rightarrow \infty, \quad V \rightarrow \infty, \quad \frac{N}{V} = C^{\text{ste}} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \rho$$

- LT : essentielle pour détecter une **transition de phase** (\exists singularités ?)

- Très souvent ($\alpha \geq 0$) : $E(N) = N\varepsilon + \mathcal{O}(N^{-\alpha}) \iff$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E(N)}{N} = \varepsilon + \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{O}(N^{-(\alpha+1)}) = \varepsilon$$

- En pratique et plus précisément (un gaz dans le volume V , par exemple)

$$\text{LT} : N \rightarrow \infty, \quad V \rightarrow \infty, \quad \frac{N}{V} = C^{\text{ste}} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \rho$$

- LT : essentielle pour détecter une **transition de phase** (\exists **singularités** ?)
- Existence de la LT en général : problème **très** difficile (Lieb), notamment en raison de l'interaction de Coulomb (**singulière** à faible distance et à portée **infinie**...)

- Deux exemples simples montrant l'importance du principe de Pauli

- Deux exemples simples montrant l'importance du principe de Pauli
 - "Gaz" **parfait** de neutrons (spin 1/2) dans cube de volume $V = L^3$

- Deux exemples simples montrant l'importance du principe de Pauli
 - "Gaz" **parfait** de neutrons (spin 1/2) dans cube de volume $V = L^3$
 - Équation d'état : $P = k_B T(?)\rho(1+?)$

- Deux exemples simples montrant l'importance du principe de Pauli
 - "Gaz" **parfait** de neutrons (spin 1/2) dans cube de volume $V = L^3$
 - Équation d'état : $P = k_B T(?)\rho(1+?)$
 - Principe de Pauli : remplissage progressif des états d'énergie de plus en plus élevée

- Deux exemples simples montrant l'importance du principe de Pauli
 - “Gaz” **parfait** de neutrons (spin 1/2) dans cube de volume $V = L^3$
 - Équation d'état : $P = k_B T(?)\rho(1+?)$
 - Principe de Pauli : remplissage progressif des états d'énergie de plus en plus élevée
 - \implies “pression de dégénérescence” ; par exemple, à haute température ($\lambda_T \ll d \stackrel{\text{déf}}{=} \rho^{-1/3}$) :

- Deux exemples simples montrant l'importance du principe de Pauli
 - “Gaz” **parfait** de neutrons (spin 1/2) dans cube de volume $V = L^3$

- Équation d'état : $P = k_B T(?)\rho(1+?)$
- Principe de Pauli : remplissage progressif des états d'énergie de plus en plus élevée
- \implies “pression de dégénérescence” ; par exemple, à haute température ($\lambda_T \ll d \stackrel{\text{déf}}{=} \rho^{-1/3}$) :

$$P = k_B T \rho \left[1 \pm \frac{1}{2g} \left(\frac{\pi \hbar^2 \rho^{2/3}}{m k_B T} \right)^{3/2} + \dots \right] \quad (+ : \text{fermions} ; - : \text{bosons})$$

- Deux exemples simples montrant l'importance du principe de Pauli
 - "Gaz" **parfait** de neutrons (spin 1/2) dans cube de volume $V = L^3$

- Équation d'état : $P = k_B T(?)\rho(1+?)$
- Principe de Pauli : remplissage progressif des états d'énergie de plus en plus élevée
- \implies "pression de dégénérescence" ; par exemple, à haute température ($\lambda_T \ll d \stackrel{\text{déf}}{=} \rho^{-1/3}$) :

$$P = k_B T \rho \left[1 \pm \frac{1}{2g} \left(\frac{\pi \hbar^2 \rho^{2/3}}{m k_B T} \right)^{3/2} + \dots \right] \quad (+ : \text{fermions} ; - : \text{bosons})$$

- Énergie du gaz = somme des énergies cinétiques

$$E_{\text{cin}}(N) = 2 \sum_{\|\vec{k}\| < k_F} \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} \quad \text{avec} \quad 2 \frac{4\pi}{3} \frac{k_F^3}{L^3} = N$$

- Deux exemples simples montrant l'importance du principe de Pauli
 - “Gaz” **parfait** de neutrons (spin 1/2) dans cube de volume $V = L^3$

- Équation d'état : $P = k_B T(?)\rho(1+?)$
- Principe de Pauli : remplissage progressif des états d'énergie de plus en plus élevée
- \implies “pression de dégénérescence” ; par exemple, à haute température ($\lambda_T \ll d \stackrel{\text{déf}}{=} \rho^{-1/3}$) :

$$P = k_B T \rho \left[1 \pm \frac{1}{2g} \left(\frac{\pi \hbar^2 \rho^{2/3}}{m k_B T} \right)^{3/2} + \dots \right] \quad (+ : \text{fermions} ; - : \text{bosons})$$

- Énergie du gaz = somme des énergies cinétiques

$$E_{\text{cin}}(N) = 2 \sum_{\|\vec{k}\| < k_F} \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} \quad \text{avec} \quad 2 \frac{4\pi}{3} \frac{k_F^3}{L^3} = N$$

- Tous calculs faits

$$E_{\text{cin}}(N) \propto N \rho^{2/3} + (\text{corrections} \propto N^{\alpha < 1})$$

- Système électriquement **neutre**

- Système électriquement **neutre**
 - Deux types de particules de charges opposées

- Système électriquement **neutre**
 - Deux types de particules de charges opposées
 - L'une des deux espèces doit être **fermionique** pour que \exists LT :
Coulomb et sans principe de Pauli, $E(N) \propto N^{7/5}$!

- Système électriquement **neutre**
 - Deux types de particules de charges opposées
 - L'une des deux espèces doit être **fermionique** pour que \exists LT :
Coulomb et sans principe de Pauli, $E(N) \propto N^{7/5}$!

Principe de Pauli $\implies \exists$ LT

Et aussi... astrophysique, cosmologie

- Étoiles après épuisement des réactions de fusion

Et aussi... astrophysique, cosmologie

- Étoiles après épuisement des réactions de fusion
 - Naine blanche (plasma noyaux-électrons)

Et aussi... astrophysique, cosmologie

- Étoiles après épuisement des réactions de fusion
 - Naine blanche (plasma noyaux-électrons)
 - Étoile à neutrons

C'est la pression de dégénérescence qui empêche l'effondrement gravitationnel

Et aussi... astrophysique, cosmologie

- Étoiles après épuisement des réactions de fusion
 - Naine blanche (plasma noyaux-électrons)
 - Étoile à neutrons

C'est la pression de dégénérescence qui empêche l'effondrement gravitationnel

- Fluctuations primordiales visibles dans le CMB, structuration de l'univers en galaxies et amas de galaxies (théorie de l'inflation, Guth et Linde, 1981,...) provenant des fluctuations du vide quantique ?

La TQ est essentielle pour comprendre la stabilité du monde à toutes les échelles observables, de l'infiniment petit à l'infiniment grand (noyau, atome, système macroscopique,..., naine blanche, étoile à neutrons, structuration de l'univers, fluctuations du fond diffus cosmologique...)