

# Hamiltoniano efectivo de un circuito LC con carga discreta bajo la aproximación semiclásica

Evaristo Mamani Carlo, Marcelo Calcina Nogales  
y Diego Sanjinés Castedo

Universidad Mayor de San Andrés  
Facultad de Ciencias Puras y Naturales - Carrera de Física  
La Paz-Bolivia

10 de Octubre del 2018



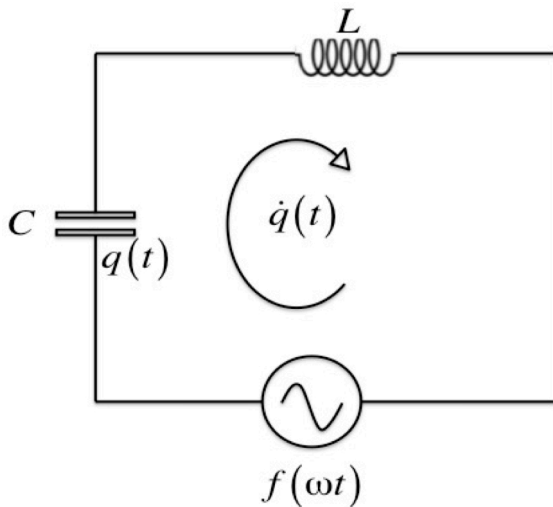
- 1 Introducción
- 2 Derivación del Hamiltoniano efectivo
- 3 Red de enlace fuerte y circuito LC cuántico
- 4 Ingeniería de las carga y corriente efectivas
  - Generación súbita de un voltaje DC
  - Supresión de la corriente efectiva en la malla
- 5 Conclusiones
  - Resultados y discusiones
  - Perspectivas
  - Agradecimiento y colaboradores

- Método de Kapitza de la promediación temporal y de la separación de movimientos,  
L. A. Martínez, D. Sanjinés, J.-P. Gallinar, *Int. J. Mod. Phys. B* **28** (2014) 1450173.
- Hamiltonianos efectivos en la física del estado sólido en el modelo de enlace fuerte,  
E. Mamani, M. Calcina-Nogales, D. Sanjinés, *Int. J. Mod. Phys. B* **31** (2017) 1750116.
- La naturaleza discreta de la carga eléctrica que conlleva al operador conjugado correspondiente de  $\hat{q}$  que es el operador flujo  $\hat{\phi} \rightarrow (2\hbar/q_e) \sin(q_e \hat{\phi}/(2\hbar))$ ,  
B. Chen, Y. Q. Li, *Phys. Rev. B* **53** (1996) 4027.
- Analogía entre dos sistemas físicos: una red de estado sólido y un circuito cuántico con carga discreta,

- Método de Kapitza de la promediación temporal y de la separación de movimientos,  
L. A. Martínez, D. Sanjinés, J.-P. Gallinar, *Int. J. Mod. Phys. B* **28** (2014) 1450173.
- Hamiltonianos efectivos en la física del estado sólido en el modelo de enlace fuerte,  
E. Mamani, M. Calcina-Nogales, D. Sanjinés, *Int. J. Mod. Phys. B* **31** (2017) 1750116.
- La naturaleza discreta de la carga eléctrica que conlleva al operador conjugado correspondiente de  $\hat{q}$  que es el operador flujo  $\hat{\phi} \rightarrow (2\hbar/q_e) \sin(q_e \hat{\phi}/(2\hbar))$ ,  
B. Chen, Y. Q. Li, *Phys. Rev. B* **53** (1996) 4027.
- Analogía entre dos sistemas físicos: una red de estado sólido y un circuito cuántico con carga discreta,

- Método de Kapitza de la promediación temporal y de la separación de movimientos,  
L. A. Martínez, D. Sanjinés, J.-P. Gallinar, *Int. J. Mod. Phys. B* **28** (2014) 1450173.
- Hamiltonianos efectivos en la física del estado sólido en el modelo de enlace fuerte,  
E. Mamani, M. Galcina-Nogales, D. Sanjinés, *Int. J. Mod. Phys. B* **31** (2017) 1750116.
- La naturaleza discreta de la carga eléctrica que conlleva al operador conjugado correspondiente de  $\hat{q}$  que es el operador flujo  $\hat{\phi} \rightarrow (2\hbar/q_e) \sin(q_e \hat{\phi}/(2\hbar))$ ,  
B. Chen, Y. Q. Li, *Phys. Rev. B* **53** (1996) 4027.
- Analogía entre dos sistemas físicos: una red de estado sólido y un circuito cuántico con carga discreta,

- Método de Kapitza de la promediación temporal y de la separación de movimientos,  
L. A. Martínez, D. Sanjinés, J.-P. Gallinar, *Int. J. Mod. Phys. B* **28** (2014) 1450173.
- Hamiltonianos efectivos en la física del estado sólido en el modelo de enlace fuerte,  
E. Mamani, M. Galcina-Nogales, D. Sanjinés, *Int. J. Mod. Phys. B* **31** (2017) 1750116.
- La naturaleza discreta de la carga eléctrica que conlleva al operador conjugado correspondiente de  $\hat{q}$  que es el operador flujo  $\hat{\phi} \rightarrow (2\hbar/q_e) \sin(q_e \hat{\phi}/(2\hbar))$ ,  
B. Chen, Y. Q. Li, *Phys. Rev. B* **53** (1996) 4027.
- Analogía entre dos sistemas físicos: una red de estado sólido y un circuito cuántico con carga discreta,



Consideremos el hamiltoniano clásico de un circuito LC con una fuente oscilatoria  $f(\omega t)$  de alta frecuencia:

$$H_0(\phi, q; t) = \frac{\phi^2}{2L} + \frac{q^2}{2C} + qf(\omega t), \quad (1)$$

considerando la naturaleza discreta de la carga eléctrica, el nuevo hamiltoniano es:

$$H(\phi, q; t) = -\frac{\hbar^2}{q_e^2 L} \cos\left(\frac{q_e}{\hbar} \phi\right) + \frac{q^2}{2C} + qf(\omega t), \quad (2)$$

utilizando las ecuaciones canónicas de Hamilton  $\dot{q} = \partial H / \partial \phi$ ,  $\dot{\phi} = -\partial H / \partial q$ :

$$\dot{q}(t) = \frac{\hbar}{q_e L} \sin\left(\frac{q_e}{\hbar} \phi\right), \quad (3)$$

$$\dot{\phi}(t) = -\frac{q}{C} - f(\omega t). \quad (4)$$



Aplicando una transformación canónica en el flujo del tipo:

$$\phi(t) = \Phi(t) - g(t),$$

donde se define el “flujo desplazado”  $\Phi(t)$  y además  $\dot{g}(t) \equiv f(\omega t)$ , con lo cual:

Ecuaciones de movimiento para  $q(t)$  y  $\Phi(t)$

$$\dot{q}(t) = \frac{\hbar}{q_e L} \sin \left[ \frac{q_e}{\hbar} (\Phi - g) \right], \quad (5)$$

$$\dot{\Phi}(t) = -\frac{q}{C}. \quad (6)$$

De la naturaleza de la fuente externa rápidamente oscilante  $f(\omega t)$  que actúa sobre el circuito, la carga y el flujo se pueden separar

$$q(t) = Q(t) + \xi(\tau), \quad (7)$$

$$\Phi(t) = \Psi(t) + \eta(\tau). \quad (8)$$

donde  $\xi(\tau)$  y  $\eta(\tau)$  corresponden a las pequeñas oscilaciones y además  $\tau \equiv \omega t$ .

$$\langle \xi(\tau) \rangle = \langle \eta(\tau) \rangle = 0,$$

$$\langle Q(t) \rangle = Q(t),$$

$$\langle \Psi(t) \rangle = \Psi(t).$$

Con las aclaraciones anteriores, las ecuaciones de movimiento “efectivas” para las partes lentas para la carga y del flujo respectivamente son:

### Ecuaciones de movimiento efectivas

$$\dot{Q}(t) = \frac{\hbar}{q_e L} \left\langle \sin \left[ \frac{q_e}{\hbar} (\Psi + \eta - g) \right] \right\rangle, \quad (9)$$

$$\dot{\Psi}(t) = -\frac{Q}{C}. \quad (10)$$

Además, las ecuaciones de movimiento para las partes “rápidamente” oscilantes de la carga y el flujo son:

### Ecuaciones de movimiento rápidamente oscilantes

$$\omega \frac{d\xi}{d\tau} = \frac{\hbar}{q_e L} \left\{ \sin \left[ \frac{q_e}{\hbar} (\Psi + \eta - g) \right] - \left\langle \sin \left[ \frac{q_e}{\hbar} (\Psi + \eta - g) \right] \right\rangle \right\}, \quad (11)$$

$$\omega \frac{d\eta}{d\tau} = -\frac{\xi}{C}. \quad (12)$$

Si definimos:

$t$  : tiempo “lento”,

$\tau = \omega t$  : tiempo “rápido”,

$\varepsilon = \frac{t}{\tau} = \frac{1}{\omega}$  : parámetro de pequeñez,

de esta forma, si  $\omega \rightarrow \infty$  (alta frecuencia), entonces  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Además se proponen:

$$\xi(\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \xi_i(\tau) = \xi_0(\tau) + \varepsilon \xi_1(\tau) + \varepsilon^2 \xi_2(\tau) + \dots, \quad (13)$$

$$\eta(\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \eta_i(\tau) = \eta_0(\tau) + \varepsilon \eta_1(\tau) + \varepsilon^2 \eta_2(\tau) + \dots. \quad (14)$$

A manera de aclaración, si la función  $f(\tau)$  es periódica en  $\tau$ , entonces:

$$F(\tau) = \exp\left(\frac{iq_e}{\hbar}g\right),$$

es también periódica, lo cual admite una expansión en serie de Fourier de la forma:

$$F(\tau) = \sum_n F_n e^{in\tau}.$$

## Ecuaciones de movimiento efectivas para la carga y el flujo

$$\dot{Q}(t) = \frac{\hbar}{q_e L} F_0 \sin\left(\frac{q_e}{\hbar} \Psi\right) + \frac{\hbar}{2q_e L} \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \tilde{F}_0 \sin\left(\frac{2q_e}{\hbar} \Psi\right), \quad (15)$$

$$\dot{\Psi}(t) = -\frac{Q}{C}. \quad (16)$$

donde

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

$$\tilde{F}_0 = \sum_{n \neq 0} \frac{F_n F_{-n}}{n^2},$$

Con la finalidad de encontrar el Hamiltoniano efectivo:

$$\frac{\dot{Q}}{\dot{\Psi}} = \frac{dQ}{d\Psi} \rightarrow -\dot{\Psi}dQ + \dot{Q}d\Psi = 0,$$

esta ecuación diferencial es exacta ya que  $-\partial\dot{\Psi}/\partial\Psi = \partial\dot{Q}/\partial Q$ ,  
cuya solución está dada por:

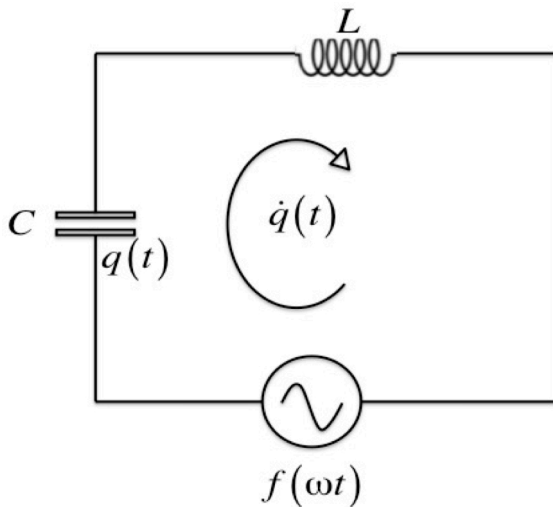
$$H(Q, \Psi) = - \int \dot{\Psi}dQ + \int \left( \dot{Q} + \frac{\partial}{\partial\Psi} \int \dot{\Psi}dQ \right) d\Psi.$$

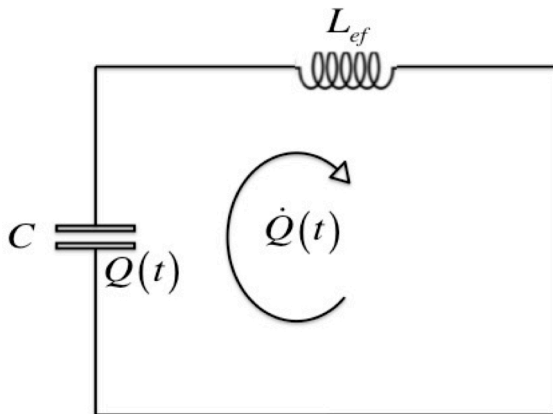


Finalmente:

### Hamiltoniano efectivo

$$H(Q, \Psi) = -\frac{\hbar^2}{q_e^2 L} F_0 \cos\left(\frac{q_e}{\hbar} \Psi\right) - \frac{\hbar^2}{q_e^2 L} \left(\frac{\omega_0}{2\omega}\right)^2 \tilde{F}_0 \cos\left(\frac{2q_e}{\hbar} \Psi\right) + \frac{Q^2}{2C}. \quad (17)$$





La dinámica de una partícula cargada que se traslada en una red unidimensional con constante de red  $a$  en presencia de un campo estático arbitrario  $U(x)$  y de un campo uniforme rápidamente oscilante  $f(\omega t)$  se puede escribir aproximadamente por el Hamiltoniano de enlace fuerte

$$H(x,p;t) = -2A \cos ap - 2B \cos 2ap + U(x) + xf(\omega t),$$

donde  $A$  y  $B$  son los elementos de *hopping* que caracterizan a las interacciones de la partícula con sus primeros y segundos vecinos.

La aplicación del método de Kapitza permite obtener el Hamiltoniano efectivo

$$H(X, Y) = -2\tilde{A}(X)\cos aY - 2\tilde{B}(X)\cos 2aY - 2\tilde{C}(X)\cos 3aY \\ - 2\tilde{D}(X)\cos 4aY + U(X),$$

donde las coordenadas canónicas  $X, Y$  corresponden a las partes lentas de la posición y del momentum desplazado. Para el caso particular de un potencial estático  $U(X) \propto X^2$ , los coeficientes  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{C}$ ,  $\tilde{D}$  corresponden a los elementos efectivos de *hopping* que dependen de los parámetros de los campos externos estático y oscilante.

La equivalencia entre los correspondientes Hamiltonianos efectivos  $H(X, Y)$  y  $H(Q, \Psi)$  permite la posibilidad de asociar fenómenos en contextos físicos diferentes. En el caso de este trabajo invocaremos el trabajo del “oscilador armónico en la red” descrito previamente por Gallinar y Chalbaud, donde entre otros resultados se dedujo la existencia de dos regímenes dinámicos referidos por “régimen del continuo” y “régimen de Bloch”.

J. P. Gallinar, E. Chalbaud, *Phys. Rev. B* **43** (1991) 2322.

# Generación súbita de un voltaje DC

De las ecuaciones efectivas  $\dot{Q}$  y  $\dot{\Psi}$  se obtiene:

$$\ddot{Q} = - \left( \frac{q_e}{\hbar} \right)^2 \left[ \frac{Q^3}{2C^2} - \frac{Q}{C} E \right], \quad (18)$$

esta ecuación se resuelve para las condiciones iniciales  $\dot{Q}_0 = 0$  y  $Q_0 \neq 0$ ,

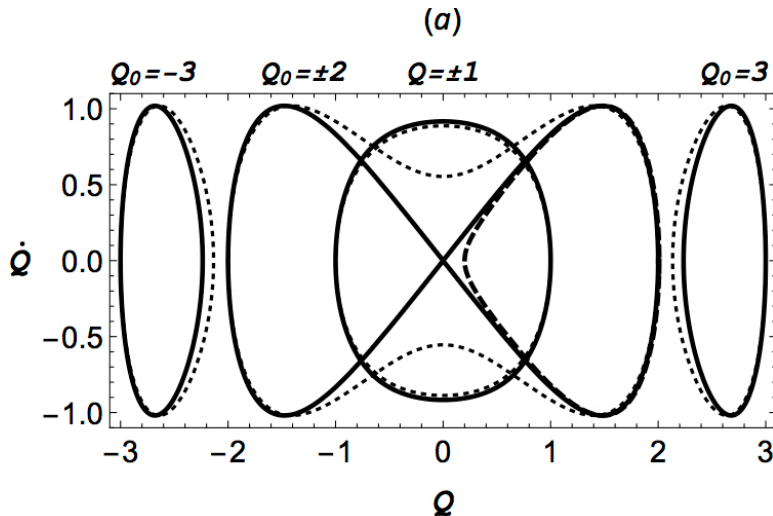
$$\dot{Q}^2 = \frac{1}{C} \left( \frac{q_e}{\hbar} \right)^2 (Q_0^2 - Q^2) \left[ \frac{Q_0^2 + Q^2}{4C} - E \right], \quad (19)$$

nótese que en el límite  $q_e \rightarrow 0$  (18) se reduce a:

$$\ddot{Q} + \omega_0^2 Q = 0, \quad (20)$$

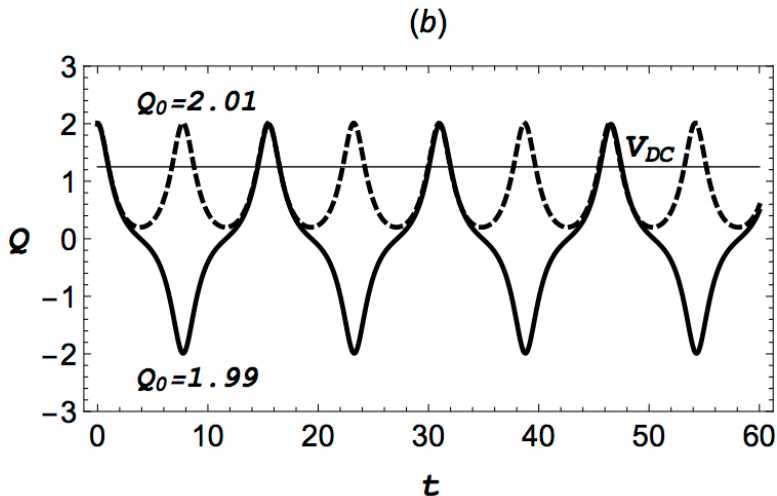
como debe ser.

$$f(\omega t) = 2f_1 \cos \omega t$$

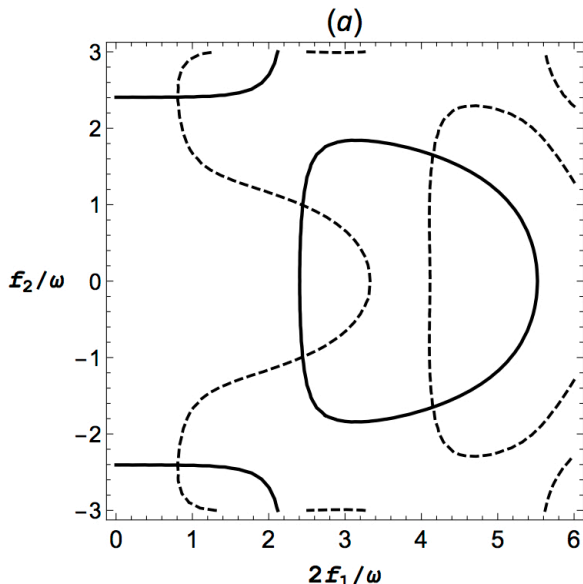




$$f(\omega t) = 2f_1 \cos \omega t$$



$$f(\omega t) = 2f_1 \cos \omega t + 2f_2 \cos 2\omega t$$



- Se utilizó el modelo semiclásico de la dinámica electrónica y la técnica de promediación temporal de Kapitza para obtener las ecuaciones de movimiento efectivas  $\dot{Q}(t)$  y  $\dot{\Psi}(t)$ .
- A partir de las ecuaciones  $\dot{Q}(t)$  y  $\dot{\Psi}(t)$  se derivó un Hamiltoniano efectivo independiente del tiempo  $H(Q, \Psi)$ .
- A partir de dichas ecuaciones de movimiento, fue posible inferir dos fenómenos interesantes (aparición súbita de un voltaje DC en el condensador y la supresión de la corriente efectiva) como consecuencia de la carga discreta.

- Se utilizó el modelo semiclásico de la dinámica electrónica y la técnica de promediación temporal de Kapitza para obtener las ecuaciones de movimiento efectivas  $\dot{Q}(t)$  y  $\dot{\Psi}(t)$ .
- A partir de las ecuaciones  $\dot{Q}(t)$  y  $\dot{\Psi}(t)$  se derivó un Hamiltoniano efectivo independiente del tiempo  $H(Q, \Psi)$ .
- A partir de dichas ecuaciones de movimiento, fue posible inferir dos fenómenos interesantes (aparición súbita de un voltaje DC en el condensador y la supresión de la corriente efectiva) como consecuencia de la carga discreta.

- Se utilizó el modelo semiclásico de la dinámica electrónica y la técnica de promediación temporal de Kapitza para obtener las ecuaciones de movimiento efectivas  $\dot{Q}(t)$  y  $\dot{\Psi}(t)$ .
- A partir de las ecuaciones  $\dot{Q}(t)$  y  $\dot{\Psi}(t)$  se derivó un Hamiltoniano efectivo independiente del tiempo  $H(Q, \Psi)$ .
- A partir de dichas ecuaciones de movimiento, fue posible inferir dos fenómenos interesantes (aparición súbita de un voltaje DC en el condensador y la supresión de la corriente efectiva) como consecuencia de la carga discreta.

La analogía formal del transporte electrónico en dos sistemas físicos diferentes: la red de enlace fuerte y el circuito LC cuántico, nos lleva a sugerir la posibilidad de que aquellos fenómenos dinámicos que serían difíciles de observar en la red por varias limitaciones experimentales, podrían ser observados de manera equivalente en un circuito LC cuántico, así como el fenómeno de "localización asintótica" predicho para la dinámica electrónica en una red de enlace fuerte fue observado de manera equivalente en un arreglo de fibras ópticas.

D. Sanjinés, J.P. Gallinar, *Phys. Rev. B* **64** (2001) 054301.

F. Dreisow, O. Bahat-Treidel, D. Welt, A. Szameit, *Opt. Lett.* **36** (2011) 2065-2067.

# Agradecimiento y colaboradores

- Centro Mesoamericano de Física Teórica (MCTP)
- Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
- Comité Organizador del V Congreso Latinoamericano de Física-2018

## Colaboradores:

- ① Dr. Diego Sanjinés Castedo
- ② Dr. Marcelo Calcina Nogales

# Agradecimiento y colaboradores

- Centro Mesoamericano de Física Teórica (MCTP)
- Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
- Comité Organizador del V Congreso Latinoamericano de Física-2018

## Colaboradores:

- ① Dr. Diego Sanjinés Castedo
- ② Dr. Marcelo Calcina Nogales



# Agradecimiento y colaboradores

- Centro Mesoamericano de Física Teórica (MCTP)
- Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
- Comité Organizador del V Congreso Latinoamericano de Física-2018

## Colaboradores:

- ① Dr. Diego Sanjinés Castedo
- ② Dr. Marcelo Calcina Nogales

# Agradecimiento y colaboradores

- Centro Mesoamericano de Física Teórica (MCTP)
- Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
- Comité Organizador del V Congreso Latinoamericano de Física-2018

## Colaboradores:

- ① Dr. Diego Sanjinés Castedo
- ② Dr. Marcelo Calcina Nogales

# Agradecimiento y colaboradores

- Centro Mesoamericano de Física Teórica (MCTP)
- Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
- Comité Organizador del V Congreso Latinoamericano de Física-2018

## Colaboradores:

- ① Dr. Diego Sanjinés Castedo
- ② Dr. Marcelo Calcina Nogales

# MUCHAS GRACIAS