Le mouvement dialectique des mathématiques entre la physique et le monde des Idées

Concret *versus* abstrait

Robert Brouzet

Mystères au coeur
de l'Univers
et de la matière

Cycle de conférences

Plan

Plan

Le point de départ

1. Le point de départ de cet exposé est une conférence donnée par V. Arnold à l'IREM de Paris en 2005 et intitulée *La mathématique expérimentale*.
2. C'est mon collègue Hassan Boualem (Montpellier) qui me l'a signalée et a attiré mon attention sur la problématique que je voudrais aborder au cours de cet exposé.
3. Vladimir Arnold (1937-2010) est un grand mathématicien russe qui s'illustra en mécanique Hamiltonienne (théorème d'Arnold-Liouville, théorème KAM, conjecture d'Arnold).
4. Professeur en France (Paris-Dauphine) à partir de 1993 il sera toujours très critique envers les mathématiques très abstraites que les mathématiciens français illustrent parfaitement (penser à Bourbaki).

Le point de départ

1. Le point de départ de cet exposé est une conférence donnée par V. Arnold à l'IREM de Paris en 2005 et intitulée *La mathématique expérimentale*.
2. C'est mon collègue Hassan Boualem (Montpellier) qui me l'a signalée et a attiré mon attention sur la problématique que je voudrais aborder au cours de cet exposé.
3. Vladimir Arnold (1937-2010) est un grand mathématicien russe qui s'illustra en mécanique Hamiltonienne (théorème d'Arnold-Liouville, théorème KAM, conjecture d'Arnold).
4. Professeur en France (Paris-Dauphine) à partir de 1993 il sera toujours très critique envers les mathématiques très abstraites que les mathématiciens français illustrent parfaitement (penser à Bourbaki).

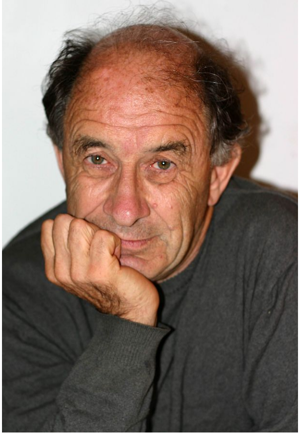
Le point de départ

1. Le point de départ de cet exposé est une conférence donnée par V. Arnold à l'IREM de Paris en 2005 et intitulée *La mathématique expérimentale*.
2. C'est mon collègue Hassan Boualem (Montpellier) qui me l'a signalée et a attiré mon attention sur la problématique que je voudrais aborder au cours de cet exposé.
3. Vladimir Arnold (1937-2010) est un grand mathématicien russe qui s'illustra en mécanique Hamiltonienne (théorème d'Arnold-Liouville, théorème KAM, conjecture d'Arnold).
4. Professeur en France (Paris-Dauphine) à partir de 1993 il sera toujours très critique envers les mathématiques très abstraites que les mathématiciens français illustrent parfaitement (penser à Bourbaki).

Le point de départ

1. Le point de départ de cet exposé est une conférence donnée par V. Arnold à l'IREM de Paris en 2005 et intitulée *La mathématique expérimentale*.
2. C'est mon collègue Hassan Boualem (Montpellier) qui me l'a signalée et a attiré mon attention sur la problématique que je voudrais aborder au cours de cet exposé.
3. Vladimir Arnold (1937-2010) est un grand mathématicien russe qui s'illustra en mécanique Hamiltonienne (théorème d'Arnold-Liouville, théorème KAM, conjecture d'Arnold).
4. Professeur en France (Paris-Dauphine) à partir de 1993 il sera toujours très critique envers les mathématiques très abstraites que les mathématiciens français illustrent parfaitement (penser à Bourbaki).

Une science expérimentale



« Les mathématiques font partie de la physique. La physique est une science expérimentale, une des sciences naturelles. Les mathématiques, ce sont la partie de la physique où les expériences ne coûtent pas cher. »

Entretien avec V.I. Arnold (Gazette des maths 1998)

1. « Combien font 2+3 ? Un élève d'école français a répondu 3 +2, puisque l'addition est commutative ! »
2. « Comme les mathématiques scolastiques, séparées de la physique, ne sont adaptées ni à l'enseignement, ni à aucune application éventuelle à d'autres sciences, les mathématiciens se sont fait haïr des lycéens [...].
3. « Les zélotes de la mathématique superabstraite, privés par les Dieux de l'imagination géométrique, ont éliminé toute la géométrie de l'éducation, alors que c'est à travers elle que passent le plus souvent les relations avec la physique et le réel. »

Entretien avec V.I. Arnold (Gazette des maths 1998)

1. « Combien font 2+3 ? Un élève d'école français a répondu 3 +2, puisque l'addition est commutative ! »
2. « Comme les mathématiques scolastiques, séparées de la physique, ne sont adaptées ni à l'enseignement, ni à aucune application éventuelle à d'autres sciences, les mathématiciens se sont fait haïr des lycéens [...].
3. « Les zélotes de la mathématique superabstraite, privés par les Dieux de l'imagination géométrique, ont éliminé toute la géométrie de l'éducation, alors que c'est à travers elle que passent le plus souvent les relations avec la physique et le réel. »

Entretien avec V.I. Arnold (Gazette des maths 1998)

1. « Combien font 2+3 ? Un élève d'école français a répondu 3 +2, puisque l'addition est commutative ! »
2. « Comme les mathématiques scolastiques, séparées de la physique, ne sont adaptées ni à l'enseignement, ni à aucune application éventuelle à d'autres sciences, les mathématiciens se sont fait haïr des lycéens [...].
3. « Les zélotes de la mathématique superabstraite, privés par les Dieux de l'imagination géométrique, ont éliminé toute la géométrie de l'éducation, alors que c'est à travers elle que passent le plus souvent les relations avec la physique et le réel. »

Un point de vue orthogonal

Alexandre Grothendieck (1928-2014) est un mathématicien français qui a révolutionné la géométrie et la topologie algébriques et fut lauréat de la médaille Fields en 1966.
Sa philosophie des mathématiques est à l'opposé de celle d'Arnold.

Une science de la pure raison

« *[...] Cela tient sans doute avant tout à son (le travail mathématique) caractère d'abstraction extrême, du fait qu'il soit, dans une très large mesure, indépendant de tout "support" par une expérience sensorielle et une observation raisonnée du monde extérieur, de celui où nous vivons j'entends et où nos corps se meuvent. Ce caractère extrême dans l'abstraction distingue la mathématique de toute autre science [...] pour en faire une science [...] "de la pure raison". A l'opposé des sciences expérimentales et des sciences d'observation, c'est aussi la seule science dont les résultats s'établissent par des démonstrations [...]* »
(A. Grothendieck in *Récoltes et Semailles*)

Une problématique de nature philosophique

1. Ainsi, les mathématiques sont-elles une partie de la physique (Arnold) ?
2. Sont-elles au contraire une activité de la raison pure étrangère à toute expérience sensorielle (Grothendieck) ?
3. C'est une question de philosophie des mathématiques au sujet de la nature profonde de l'activité mathématique et de ses objets.
4. Mon but n'est pas de départager ces deux points de vue !

Une problématique de nature philosophique

1. Ainsi, les mathématiques sont-elles une partie de la physique (Arnold) ?
2. Sont-elles au contraire une activité de la raison pure étrangère à toute expérience sensorielle (Grothendieck) ?
3. C'est une question de philosophie des mathématiques au sujet de la nature profonde de l'activité mathématique et de ses objets.
4. Mon but n'est pas de départager ces deux points de vue !

Une problématique de nature philosophique

1. Ainsi, les mathématiques sont-elles une partie de la physique (Arnold) ?
2. Sont-elles au contraire une activité de la raison pure étrangère à toute expérience sensorielle (Grothendieck) ?
3. C'est une question de philosophie des mathématiques au sujet de la nature profonde de l'activité mathématique et de ses objets.
4. Mon but n'est pas de départager ces deux points de vue !

Une problématique de nature philosophique

1. Ainsi, les mathématiques sont-elles une partie de la physique (Arnold) ?
2. Sont-elles au contraire une activité de la raison pure étrangère à toute expérience sensorielle (Grothendieck) ?
3. C'est une question de philosophie des mathématiques au sujet de la nature profonde de l'activité mathématique et de ses objets.
4. Mon but n'est pas de départager ces deux points de vue !

Concret *versus* abstrait

1. À partir de cet antagonisme, je voudrais surtout examiner le dialogue entre “concret” et “abstrait” au sein de l'activité mathématique.
2. L'examen de l'histoire des mathématiques montre un lent déplacement du concret vers l'abstrait.
3. En effet à partir de l'observation et de la manipulation minutieuses, patientes et acharnées d'objets initiaux issus du monde réel, de la Nature, et donc relevant de la physique, se dégagent des concepts abstraits.
4. Cette abstraction cherche ce qu'il y a de commun entre plusieurs situations particulières, individuelles, singulières.

Concret *versus* abstrait

1. À partir de cet antagonisme, je voudrais surtout examiner le dialogue entre “concret” et “abstrait” au sein de l'activité mathématique.
2. L'examen de l'histoire des mathématiques montre un lent déplacement du concret vers l'abstrait.
3. En effet à partir de l'observation et de la manipulation minutieuses, patientes et acharnées d'objets initiaux issus du monde réel, de la Nature, et donc relevant de la physique, se dégagent des concepts abstraits.
4. Cette abstraction cherche ce qu'il y a de commun entre plusieurs situations particulières, individuelles, singulières.

Concret *versus* abstrait

1. À partir de cet antagonisme, je voudrais surtout examiner le dialogue entre "concret" et "abstrait" au sein de l'activité mathématique.
2. L'examen de l'histoire des mathématiques montre un lent déplacement du concret vers l'abstrait.
3. En effet à partir de l'observation et de la manipulation minutieuses, patientes et acharnées d'objets initiaux issus du monde réel, de la Nature, et donc relevant de la physique, se dégagent des concepts abstraits.
4. Cette abstraction cherche ce qu'il y a de commun entre plusieurs situations particulières, individuelles, singulières.

Concret *versus* abstrait

1. À partir de cet antagonisme, je voudrais surtout examiner le dialogue entre “concret” et “abstrait” au sein de l'activité mathématique.
2. L'examen de l'histoire des mathématiques montre un lent déplacement du concret vers l'abstrait.
3. En effet à partir de l'observation et de la manipulation minutieuses, patientes et acharnées d'objets initiaux issus du monde réel, de la Nature, et donc relevant de la physique, se dégagent des concepts abstraits.
4. Cette abstraction cherche ce qu'il y a de commun entre plusieurs situations particulières, individuelles, singulières.

Objectifs de l'exposé

1. Toutefois, nous verrons qu'il y a une sorte de revanche du concret sur l'abstrait : l'existence de théorèmes affirmant que les objets abstraits peuvent souvent se réaliser dans un objet concret de la théorie qui lui a servi de modèle (le plus général peut alors être vu comme contenu dans le particulier).
2. Cela se fera grâce à une petite balade à travers l'Histoire des mathématiques visant à présenter la lente évolution du concret vers l'abstrait suivie de tels phénomènes de "retour" de l'abstrait vers le concret.
3. Cela ne signifie pas pour autant que les concepts abstraits ne servent à rien !

Objectifs de l'exposé

1. Toutefois, nous verrons qu'il y a une sorte de revanche du concret sur l'abstrait : l'existence de théorèmes affirmant que les objets abstraits peuvent souvent se réaliser dans un objet concret de la théorie qui lui a servi de modèle (le plus général peut alors être vu comme contenu dans le particulier).
2. Cela se fera grâce à une petite balade à travers l'Histoire des mathématiques visant à présenter la lente évolution du concret vers l'abstrait suivie de tels phénomènes de "retour" de l'abstrait vers le concret.
3. Cela ne signifie pas pour autant que les concepts abstraits ne servent à rien !

Objectifs de l'exposé

1. Toutefois, nous verrons qu'il y a une sorte de revanche du concret sur l'abstrait : l'existence de théorèmes affirmant que les objets abstraits peuvent souvent se réaliser dans un objet concret de la théorie qui lui a servi de modèle (le plus général peut alors être vu comme contenu dans le particulier).
2. Cela se fera grâce à une petite balade à travers l'Histoire des mathématiques visant à présenter la lente évolution du concret vers l'abstrait suivie de tels phénomènes de "retour" de l'abstrait vers le concret.
3. Cela ne signifie pas pour autant que les concepts abstraits ne servent à rien !

Branches des mathématiques visitées au cours de l'exposé

1. la théorie des groupes
2. la géométrie différentielle
3. la géométrie Riemannienne
4. l'analyse fonctionnelle.

Branches des mathématiques visitées au cours de l'exposé

1. la théorie des groupes
2. la géométrie différentielle
3. la géométrie Riemannienne
4. l'analyse fonctionnelle.

Branches des mathématiques visitées au cours de l'exposé

1. la théorie des groupes
2. la géométrie différentielle
3. la géométrie Riemannienne
4. l'analyse fonctionnelle.

Branches des mathématiques visitées au cours de l'exposé

1. la théorie des groupes
2. la géométrie différentielle
3. la géométrie Riemannienne
4. l'analyse fonctionnelle.

Plan

1. Introduction
2. La théorie des groupes
3. La géométrie différentielle
   - La géométrie différentielle générale
   - La géométrie Riemannienne
4. L'analyse fonctionnelle

La théorie des groupes

1. La *théorie des groupes* est centrale dans l'édifice mathématique.
2. Elle est aussi très importante en physique avec la notion de *groupe de symétries*.
3. La notion de *groupe* apparait avec le problème de la *résolution par radicaux des équations algébriques*.
4. Évariste Galois semble être le premier à introduire le mot *groupe* ; à l'époque il ne s'agit que d'un type de groupe particulier : celui des *permutations* de n objets.

La théorie des groupes

1. La *théorie des groupes* est centrale dans l'édifice mathématique.
2. Elle est aussi très importante en physique avec la notion de *groupe de symétries*.
3. La notion de *groupe* apparait avec le problème de la *résolution par radicaux des équations algébriques*.
4. Évariste Galois semble être le premier à introduire le mot *groupe* ; à l'époque il ne s'agit que d'un type de groupe particulier : celui des *permutations* de n objets.

La théorie des groupes

1. La *théorie des groupes* est centrale dans l'édifice mathématique.
2. Elle est aussi très importante en physique avec la notion de *groupe de symétries*.
3. La notion de *groupe* apparait avec le problème de la *résolution par radicaux des équations algébriques*.
4. Évariste Galois semble être le premier à introduire le mot *groupe* ; à l'époque il ne s'agit que d'un type de groupe particulier : celui des *permutations* de n objets.

La théorie des groupes

1. La *théorie des groupes* est centrale dans l'édifice mathématique.
2. Elle est aussi très importante en physique avec la notion de *groupe de symétries*.
3. La notion de *groupe* apparait avec le problème de la *résolution par radicaux des équations algébriques*.
4. Évariste Galois semble être le premier à introduire le mot *groupe* ; à l'époque il ne s'agit que d'un type de groupe particulier : celui des *permutations* de n objets.

Les premiers groupes

1. Un groupe de permutations est un objet relativement concret.
2. Par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ est la permutation sur quatre éléments qui envoie 1 sur 3, 2 sur 1, 3 sur 4 et 4 sur 2.
3. Si on compose de telles permutations sur n objets on en obtient une autre et si on va à l'envers aussi. L'ensemble des permutations de n objets muni de la loi de composition est un groupe appelé groupe symétrique et noté S_n.

Les premiers groupes

1. Un groupe de permutations est un objet relativement concret.
2. Par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ est la permutation sur quatre éléments qui envoie 1 sur 3, 2 sur 1, 3 sur 4 et 4 sur 2.
3. Si on compose de telles permutations sur n objets on en obtient une autre et si on va à l'envers aussi. L'ensemble des permutations de n objets muni de la loi de composition est un groupe appelé groupe symétrique et noté S_n.

Les premiers groupes

1. Un groupe de permutations est un objet relativement concret.
2. Par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ est la permutation sur quatre éléments qui envoie 1 sur 3, 2 sur 1, 3 sur 4 et 4 sur 2.
3. Si on compose de telles permutations sur n objets on en obtient une autre et si on va à l'envers aussi. L'ensemble des permutations de n objets muni de la loi de composition est un groupe appelé groupe symétrique et noté S_n.

Des groupes concrets

1. Ces groupes de permutation ont été utilisés pour résoudre, par la négative, la question de la résolubilité par radicaux des équations algébriques de degré ≥ 5.
2. Les principaux acteurs en sont Lagrange, Ruffini, Gauss, Abel et Galois.
3. Rappelons-en rapidement la problématique.

Des groupes concrets

1. Ces groupes de permutation ont été utilisés pour résoudre, par la négative, la question de la résolubilité par radicaux des équations algébriques de degré ≥ 5.
2. Les principaux acteurs en sont Lagrange, Ruffini, Gauss, Abel et Galois.
3. Rappelons-en rapidement la problématique.

Des groupes concrets

1. Ces groupes de permutation ont été utilisés pour résoudre, par la négative, la question de la résolubilité par radicaux des équations algébriques de degré ≥ 5.
2. Les principaux acteurs en sont Lagrange, Ruffini, Gauss, Abel et Galois.
3. Rappelons-en rapidement la problématique.

Le cas du second degré : méthode des Babyloniens

1. L'idée de la résolution des équations quadratiques du type

$$ax^2 + bx + c = 0$$

remonte aux Babyloniens et était donc connue deux mille ans avant notre ère.

2. On peut exprimer les racines d'une telle équation à l'aide de *racines carrées*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

quitte à étendre aux nombres complexes la notion de racine carrée.

Le cas du second degré : méthode des Babyloniens

1. L'idée de la résolution des équations quadratiques du type

$$ax^2 + bx + c = 0$$

remonte aux Babyloniens et était donc connue deux mille ans avant notre ère.

2. On peut exprimer les racines d'une telle équation à l'aide de *racines carrées*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

quitte à étendre aux nombres complexes la notion de racine carrée.

Degrés 3 et 4 : la Renaissance italienne

1. Il faut attendre 3500 ans pour résoudre, par des formules générales, le cas des équations de degré 3,

$$x^3 + px + q = 0$$

avec les fameuses formules de Cardan

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}.$$

2. Ferrari donnera peu après des formules analogues avec des racines quatrièmes pour les équations de degré 4.

Degrés 3 et 4 : la Renaissance italienne

1. Il faut attendre 3500 ans pour résoudre, par des formules générales, le cas des équations de degré 3,

$$x^3 + px + q = 0$$

avec les fameuses formules de Cardan

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}.$$

2. Ferrari donnera peu après des formules analogues avec des racines quatrièmes pour les équations de degré 4.

Le cas des équations de degré ≥ 5

1. Le problème majeur de l'algèbre à la fin du XVIIIeme siècle : existe-t-il pour les équations de degré ≥ 5 de semblables formules ?
2. Lagrange et Ruffini avaient compris le lien entre cette question et la *permutation des racines*.
3. Gauss avait montré que c'était possible pour certaines équations dites cyclotomiques.
4. Mais la question de l'équation générale résistait, même si Ruffini avait conjecturé l'impossibilité d'une telle résolution et donné des éléments de preuve incomplets et obscurs.

Le cas des équations de degré ≥ 5

1. Le problème majeur de l'algèbre à la fin du XVIIIeme siècle : existe-t-il pour les équations de degré ≥ 5 de semblables formules ?
2. Lagrange et Ruffini avaient compris le lien entre cette question et la *permutation des racines*.
3. Gauss avait montré que c'était possible pour certaines équations dites cyclotomiques.
4. Mais la question de l'équation générale résistait, même si Ruffini avait conjecturé l'impossibilité d'une telle résolution et donné des éléments de preuve incomplets et obscurs.

Le cas des équations de degré ≥ 5

1. Le problème majeur de l’algèbre à la fin du XVIIIeme siècle : existe-t-il pour les équations de degré ≥ 5 de semblables formules ?
2. Lagrange et Ruffini avaient compris le lien entre cette question et la *permutation des racines*.
3. Gauss avait montré que c’était possible pour certaines équations dites cyclotomiques.
4. Mais la question de l’équation générale résistait, même si Ruffini avait conjecturé l’impossibilité d’une telle résolution et donné des éléments de preuve incomplets et obscurs.

Le cas des équations de degré ≥ 5

1. Le problème majeur de l'algèbre à la fin du XVIIIeme siècle : existe-t-il pour les équations de degré ≥ 5 de semblables formules ?
2. Lagrange et Ruffini avaient compris le lien entre cette question et la *permutation des racines*.
3. Gauss avait montré que c'était possible pour certaines équations dites cyclotomiques.
4. Mais la question de l'équation générale résistait, même si Ruffini avait conjecturé l'impossibilité d'une telle résolution et donné des éléments de preuve incomplets et obscurs.

Les travaux d'Abel et Galois

Les deux principaux protagonistes de cette histoire sont deux très jeunes mathématiciens au destin tragique : Niels Abel (1802-1829) et Évariste Galois (1811-1832).

Les travaux d'Abel et Galois

1. Abel montra qu'il n'existe pas de telles formules pour l'équation générale de degré 5.
2. Galois donna une CNS pour savoir si une équation algébrique de degré n est résoluble par radicaux.
3. Cette caractérisation s'exprime à l'aide d'une propriété d'un sous-groupe du groupe de permutations S_n appelé le *groupe de Galois* de l'équation : il faut et il suffit qu'il soit *résoluble*.
4. Or à partir de $n = 5$ le groupe S_n n'est pas résoluble et on peut obtenir des équations dont le groupe de Galois est égal à S_n. Le tour est joué !
5. Ainsi la théorie des groupes nait de la théorie de Galois et se fonde sur les groupes de permutations.

Les travaux d'Abel et Galois

1. Abel montra qu'il n'existe pas de telles formules pour l'équation générale de degré 5.
2. Galois donna une CNS pour savoir si une équation algébrique de degré n est résoluble par radicaux.
3. Cette caractérisation s'exprime à l'aide d'une propriété d'un sous-groupe du groupe de permutations S_n appelé le *groupe de Galois* de l'équation : il faut et il suffit qu'il soit *résoluble*.
4. Or à partir de $n = 5$ le groupe S_n n'est pas résoluble et on peut obtenir des équations dont le groupe de Galois est égal à S_n. Le tour est joué !
5. Ainsi la théorie des groupes nait de la théorie de Galois et se fonde sur les groupes de permutations.

Les travaux d'Abel et Galois

1. Abel montra qu'il n'existe pas de telles formules pour l'équation générale de degré 5.
2. Galois donna une CNS pour savoir si une équation algébrique de degré n est résoluble par radicaux.
3. Cette caractérisation s'exprime à l'aide d'une propriété d'un sous-groupe du groupe de permutations S_n appelé le *groupe de Galois* de l'équation : il faut et il suffit qu'il soit *résoluble*.
4. Or à partir de $n = 5$ le groupe S_n n'est pas résoluble et on peut obtenir des équations dont le groupe de Galois est égal à S_n. Le tour est joué !
5. Ainsi la théorie des groupes nait de la théorie de Galois et se fonde sur les groupes de permutations.

Les travaux d'Abel et Galois

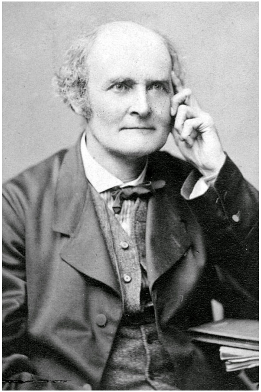
1. Abel montra qu'il n'existe pas de telles formules pour l'équation générale de degré 5.
2. Galois donna une CNS pour savoir si une équation algébrique de degré n est résoluble par radicaux.
3. Cette caractérisation s'exprime à l'aide d'une propriété d'un sous-groupe du groupe de permutations S_n appelé le *groupe de Galois* de l'équation : il faut et il suffit qu'il soit *résoluble*.
4. Or à partir de $n = 5$ le groupe S_n n'est pas résoluble et on peut obtenir des équations dont le groupe de Galois est égal à S_n. Le tour est joué !
5. Ainsi la théorie des groupes nait de la théorie de Galois et se fonde sur les groupes de permutations.

Les travaux d'Abel et Galois

1. Abel montra qu'il n'existe pas de telles formules pour l'équation générale de degré 5.
2. Galois donna une CNS pour savoir si une équation algébrique de degré n est résoluble par radicaux.
3. Cette caractérisation s'exprime à l'aide d'une propriété d'un sous-groupe du groupe de permutations S_n appelé le *groupe de Galois* de l'équation : il faut et il suffit qu'il soit *résoluble*.
4. Or à partir de $n = 5$ le groupe S_n n'est pas résoluble et on peut obtenir des équations dont le groupe de Galois est égal à S_n. Le tour est joué !
5. Ainsi la théorie des groupes nait de la théorie de Galois et se fonde sur les groupes de permutations.

Cayley et les groupes vidés de sens

Arthur Cayley (1821-1895) est le premier à avoir considéré les groupes en faisant abstraction de la nature de leurs objets.



Un exemple : trois groupes...

1. Prenons la permutation circulaire sur quatre éléments $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Ses puissances forment un groupe à 4 éléments :
$$< \sigma > = \{\mathrm{id}, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\}.$$
2. Prenons les quatre nombres complexes ± 1, $\pm \imath$ (ce sont les racines quatrièmes de l'unité). Ils forment un groupe à 4 éléments
$$\mathbb{U}_4 = \{-1, 1, -\imath, \imath\}.$$
3. Prenons l'ensemble des entiers modulo 4 noté $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Il forme lui aussi un groupe à 4 éléments pour l'addition des classes résiduelles.

Un exemple : trois groupes...

1. Prenons la permutation circulaire sur quatre éléments $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Ses puissances forment un groupe à 4 éléments :
$$< \sigma >= \{\mathrm{id}, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\}.$$
2. Prenons les quatre nombres complexes ± 1, $\pm \imath$ (ce sont les racines quatrièmes de l'unité). Ils forment un groupe à 4 éléments
$$\mathbb{U}_4 = \{-1, 1, -\imath, \imath\}.$$
3. Prenons l'ensemble des entiers modulo 4 noté $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Il forme lui aussi un groupe à 4 éléments pour l'addition des classes résiduelles.

Un exemple : trois groupes...

1. Prenons la permutation circulaire sur quatre éléments $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Ses puissances forment un groupe à 4 éléments :
$$< \sigma >= \{\mathrm{id}, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\}.$$
2. Prenons les quatre nombres complexes ± 1, $\pm \imath$ (ce sont les racines quatrièmes de l'unité). Ils forment un groupe à 4 éléments
$$\mathbb{U}_4 = \{-1, 1, -\imath, \imath\}.$$
3. Prenons l'ensemble des entiers modulo 4 noté $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Il forme lui aussi un groupe à 4 éléments pour l'addition des classes résiduelles.

une même structure

1. Les trois groupes précédents sont différents (leurs objets sont différents).
2. Pourtant si on forme leur table de groupe (dite de Cayley) elle est la même (en mettant la bonne correspondance entre éléments)

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

une même structure

1. Les trois groupes précédents sont différents (leurs objets sont différents).
2. Pourtant si on forme leur table de groupe (dite de Cayley) elle est la même (en mettant la bonne correspondance entre éléments)

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

Groupes isomorphes

1. A défaut d'être les mêmes, les trois groupes $< \sigma >$, $\mathbb{U}_4$ et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sont *isomorphes*.
2. Le pas franchi par Cayley est d'oublier la nature des objets (permutations, nombres complexes, classes résiduelles) pour ne s'intéresser qu'à la structure abstraite sous-jacente : la loi de groupe.
3. Dans cet esprit on montre par exemple qu'il n'y a en réalité que deux groupes ayant 4 éléments : le précédent (groupe cyclique isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$) et le groupe dit de Klein isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

Groupes isomorphes

1. A défaut d'être les mêmes, les trois groupes $< \sigma >$, $\mathbb{U}_4$ et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sont *isomorphes*.
2. Le pas franchi par Cayley est d'oublier la nature des objets (permutations, nombres complexes, classes résiduelles) pour ne s'intéresser qu'à la structure abstraite sous-jacente : la loi de groupe.
3. Dans cet esprit on montre par exemple qu'il n'y a en réalité que deux groupes ayant 4 éléments : le précédent (groupe cyclique isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$) et le groupe dit de Klein isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

Groupes isomorphes

1. A défaut d'être les mêmes, les trois groupes $< \sigma >$, $\mathbb{U}_4$ et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sont *isomorphes*.
2. Le pas franchi par Cayley est d'oublier la nature des objets (permutations, nombres complexes, classes résiduelles) pour ne s'intéresser qu'à la structure abstraite sous-jacente : la loi de groupe.
3. Dans cet esprit on montre par exemple qu'il n'y a en réalité que deux groupes ayant 4 éléments : le précédent (groupe cyclique isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$) et le groupe dit de Klein isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

Les groupes abstraits

Un groupe (abstrait) au sens moderne est la donnée d'un ensemble G et d'une loi de composition interne

$$G \times G \to G, \ (g, h) \mapsto gh$$

vérifiant les propriétés suivantes :

1. la loi est associative :
$$\forall (g, h, k) \in G^3, \ g(hk) = (gh)k$$
2. la loi possède un élément neutre :
$$\exists e \in G, \ \forall g \in G, \ eg = ge = g$$
3. tout élément possède un symétrique :
$$\forall g \in G, \ \exists g' \in G, \ gg' = g'g = e.$$

Les groupes en physique

1. Les groupes utilisés en physique sont souvent des *groupes de symétries*.
2. Une *symétrie* est une transformation qui laisse *invariant* un objet géométrique.
3. Par exemple le groupe des isométries laissant un triangle équilatéral globalement invariant est un groupe à 6 éléments ; il est isomorphe à S_3.
4. En physique on utilise beaucoup des groupes tels que $U(n)$, $SU(n)$, $O(n)$, $SO(n)$, $O(p,q)$ etc. qui sont tous des sous-groupes d'un groupe $S(E)$ (noté $GL(E)$ dans ce contexte linéaire).

Les groupes en physique

1. Les groupes utilisés en physique sont souvent des *groupes de symétries*.
2. Une *symétrie* est une transformation qui laisse *invariant* un objet géométrique.
3. Par exemple le groupe des isométries laissant un triangle équilatéral globalement invariant est un groupe à 6 éléments ; il est isomorphe à S_3.
4. En physique on utilise beaucoup des groupes tels que $U(n)$, $SU(n)$, $O(n)$, $SO(n)$, $O(p, q)$ etc. qui sont tous des sous-groupes d'un groupe $S(E)$ (noté $GL(E)$ dans ce contexte linéaire).

Les groupes en physique

1. Les groupes utilisés en physique sont souvent des *groupes de symétries*.
2. Une *symétrie* est une transformation qui laisse *invariant* un objet géométrique.
3. Par exemple le groupe des isométries laissant un triangle équilatéral globalement invariant est un groupe à 6 éléments ; il est isomorphe à S_3.
4. En physique on utilise beaucoup des groupes tels que $U(n)$, $SU(n)$, $O(n)$, $SO(n)$, $O(p, q)$ etc. qui sont tous des sous-groupes d'un groupe $S(E)$ (noté $GL(E)$ dans ce contexte linéaire).

Les groupes en physique

1. Les groupes utilisés en physique sont souvent des *groupes de symétries*.
2. Une *symétrie* est une transformation qui laisse *invariant* un objet géométrique.
3. Par exemple le groupe des isométries laissant un triangle équilatéral globalement invariant est un groupe à 6 éléments ; il est isomorphe à S_3.
4. En physique on utilise beaucoup des groupes tels que $U(n)$, $SU(n)$, $O(n)$, $SO(n)$, $O(p,q)$ etc. qui sont tous des sous-groupes d'un groupe $S(E)$ (noté $GL(E)$ dans ce contexte linéaire).

Le théorème de plongement de Cayley

1. Ce qu'a montré Cayley c'est que si G est un groupe (abstrait) il s'identifie toujours à un sous-groupe de $S(G)$.
2. En d'autres termes il n'existe pas de groupe plus général que les sous-groupes des groupes de transformations !
3. La preuve de Cayley est simple :

$$G \to S(G), \; g \mapsto (G \to G, \; x \mapsto gx)$$

est un morphisme injectif.

Le théorème de plongement de Cayley

1. Ce qu'a montré Cayley c'est que si G est un groupe (abstrait) il s'identifie toujours à un sous-groupe de $S(G)$.
2. En d'autres termes il n'existe pas de groupe plus général que les sous-groupes des groupes de transformations !
3. La preuve de Cayley est simple :

$$G \to S(G), \; g \mapsto (G \to G, \; x \mapsto gx)$$

est un morphisme injectif.

Le théorème de plongement de Cayley

1. Ce qu'a montré Cayley c'est que si G est un groupe (abstrait) il s'identifie toujours à un sous-groupe de $S(G)$.
2. En d'autres termes il n'existe pas de groupe plus général que les sous-groupes des groupes de transformations !
3. La preuve de Cayley est simple :

$$G \to S(G),\ g \mapsto (G \to G,\ x \mapsto gx)$$

est un morphisme injectif.

Plan

Des courbes et des surfaces aux (sous-)variétés

1. La géométrie différentielle moderne est née de l'abstraction des courbes et des surfaces.
2. Les courbes et les surfaces apparaissent de manière naturelle en physique (trajectoires, niveaux, équipotentielles etc.).
3. La question de la détermination des tangentes, puis le problème inverse des tangentes donna naissance au calcul infinitésimal (Newton et Leibniz).
4. La théorie des surfaces s'est beaucoup développée grâce aux travaux de Gauss qui est à l'origine de la géométrie différentielle moderne.

Des courbes et des surfaces aux (sous-)variétés

1. La géométrie différentielle moderne est née de l'abstraction des courbes et des surfaces.
2. Les courbes et les surfaces apparaissent de manière naturelle en physique (trajectoires, niveaux, équipotentielles etc.).
3. La question de la détermination des tangentes, puis le problème inverse des tangentes donna naissance au calcul infinitésimal (Newton et Leibniz).
4. La théorie des surfaces s'est beaucoup développée grâce aux travaux de Gauss qui est à l'origine de la géométrie différentielle moderne.

Des courbes et des surfaces aux (sous-)variétés

1. La géométrie différentielle moderne est née de l'abstraction des courbes et des surfaces.
2. Les courbes et les surfaces apparaissent de manière naturelle en physique (trajectoires, niveaux, équipotentielles etc.).
3. La question de la détermination des tangentes, puis le problème inverse des tangentes donna naissance au calcul infinitésimal (Newton et Leibniz).
4. La théorie des surfaces s'est beaucoup développée grâce aux travaux de Gauss qui est à l'origine de la géométrie différentielle moderne.

Des courbes et des surfaces aux (sous-)variétés

1. La géométrie différentielle moderne est née de l'abstraction des courbes et des surfaces.
2. Les courbes et les surfaces apparaissent de manière naturelle en physique (trajectoires, niveaux, équipotentielles etc.).
3. La question de la détermination des tangentes, puis le problème inverse des tangentes donna naissance au calcul infinitésimal (Newton et Leibniz).
4. La théorie des surfaces s'est beaucoup développée grâce aux travaux de Gauss qui est à l'origine de la géométrie différentielle moderne.

Courbes

1. Une courbe dans le plan, l'espace ou un espace n-dimensionnel E peut être définie de manière cinématique comme une application suffisamment dérivable $\gamma : I \to E,\ t \mapsto \gamma(t)$ et dont le vecteur vitesse $\gamma'(t)$ est toujours non nul.
2. Par exemple $[0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (R\cos t, R\sin t)$ définit un cercle de rayon R.
3. Mais le même cercle $\mathcal{C}$ peut aussi se définir comme niveau de la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - R^2,$$

dont la différentielle ne s'annule pas sur le cercle. $(\mathcal{C} = f^{-1}(0))$.

Courbes

1. Une courbe dans le plan, l'espace ou un espace n-dimensionnel E peut être définie de manière cinématique comme une application suffisamment dérivable $\gamma : I \to E,\ t \mapsto \gamma(t)$ et dont le vecteur vitesse $\gamma'(t)$ est toujours non nul.
2. Par exemple $[0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (R\cos t, R\sin t)$ définit un cercle de rayon R.
3. Mais le même cercle $\mathcal{C}$ peut aussi se définir comme niveau de la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - R^2,$$

dont la différentielle ne s'annule pas sur le cercle. $(\mathcal{C} = f^{-1}(0))$.

Courbes

1. Une courbe dans le plan, l'espace ou un espace n-dimensionnel E peut être définie de manière cinématique comme une application suffisamment dérivable $\gamma : I \to E, \; t \mapsto \gamma(t)$ et dont le vecteur vitesse $\gamma'(t)$ est toujours non nul.
2. Par exemple $[0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \; t \mapsto (R\cos t, R\sin t)$ définit un cercle de rayon R.
3. Mais le même cercle $\mathcal{C}$ peut aussi se définir comme niveau de la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \; (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - R^2,$$

dont la différentielle ne s'annule pas sur le cercle. $(\mathcal{C} = f^{-1}(0))$.

Surfaces

1. Il en est de même pour les surfaces... La fonction

$$f : (u, v) \mapsto (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$$

représente une sphère. Sa différentielle est injective en tout point de la surface.

2. Mais aussi comme l'ensemble défini par $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, autrement dit comme niveau d'une certaine application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dont la différentielle ne s'annule pas sur la surface.

3. Cette double approche des courbes et des surfaces fait toujours référence à un *espace ambiant les contenant*.

Surfaces

1. Il en est de même pour les surfaces... La fonction

$$f : (u, v) \mapsto (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$$

représente une sphère. Sa différentielle est injective en tout point de la surface.

2. Mais aussi comme l'ensemble défini par $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, autrement dit comme niveau d'une certaine application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dont la différentielle ne s'annule pas sur la surface.

3. Cette double approche des courbes et des surfaces fait toujours référence à un *espace ambiant les contenant*.

Surfaces

1. Il en est de même pour les surfaces... La fonction

$$f : (u, v) \mapsto (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$$

représente une sphère. Sa différentielle est injective en tout point de la surface.

2. Mais aussi comme l'ensemble défini par $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, autrement dit comme niveau d'une certaine application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dont la différentielle ne s'annule pas sur la surface.

3. Cette double approche des courbes et des surfaces fait toujours référence à un *espace ambiant les contenant*.

Sous-variétés : point de vue immersion

1. De manière plus générale on peut définir des analogues d-dimensionnels des courbes et des surfaces appelés des sous-variétés de dimension d d'un espace ambiant n-dimensionnel $\mathbb{R}^n$)...
2. On peut le faire par *immersion* : la sous-variété est alors l'image par une application différentiable

$$\varphi : U \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n, \ (u_1, \cdots, u_d) \mapsto \varphi(u_1, \cdots, u_d)$$

dont la différentielle en tout point est injective (on dit alors que φ est une immersion).

Sous-variétés : point de vue immersion

1. De manière plus générale on peut définir des analogues d-dimensionnels des courbes et des surfaces appelés des sous-variétés de dimension d d'un espace ambiant n-dimensionnel $\mathbb{R}^n$)...
2. On peut le faire par *immersion* : la sous-variété est alors l'image par une application différentiable

$$\varphi : U \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n, \ (u_1, \cdots, u_d) \mapsto \varphi(u_1, \cdots, u_d)$$

dont la différentielle en tout point est injective (on dit alors que φ est une immersion).

Sous-variétés : point de vue submersion

On peut le faire par *submersion* : la sous-variété est alors un niveau d'une application différentiable

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}, \ (x_1, \cdots, x_n) \mapsto f(x_1, \cdots, x_n)$$

dont la différentielle en tout point est surjective (on dit alors que f est une submersion).

Variétés différentiables abstraites

1. La notion de variété différentiable abstraite telle que nous la connaissons aujourd'hui est déjà présente chez Riemann mais n'est vraiment formalisée que dans les années 1930 par Whitehead et Veblen.
2. Une variété différentiable de dimension d est une sorte de patchwork dont chaque pièce ressemble à un morceau de $\mathbb{R}^d$.
3. Précisément M est une variété si on peut la recouvrir par des cartes, c'est-à-dire des zones munies de *coordonnées* permettant de repérer les points mais telle que si un point appartient à plusieurs cartes les divers systèmes de coordonnées soient compatibles : l'application de changement de coordonnées doit être différentiable.

Variétés différentiables abstraites

1. La notion de variété différentiable abstraite telle que nous la connaissons aujourd'hui est déjà présente chez Riemann mais n'est vraiment formalisée que dans les années 1930 par Whitehead et Veblen.
2. Une variété différentiable de dimension d est une sorte de patchwork dont chaque pièce ressemble à un morceau de $\mathbb{R}^d$.
3. Précisément M est une variété si on peut la recouvrir par des cartes, c'est-à-dire des zones munies de *coordonnées* permettant de repérer les points mais telle que si un point appartient à plusieurs cartes les divers systèmes de coordonnées soient compatibles : l'application de changement de coordonnées doit être différentiable.

Variétés différentiables abstraites

1. La notion de variété différentiable abstraite telle que nous la connaissons aujourd'hui est déjà présente chez Riemann mais n'est vraiment formalisée que dans les années 1930 par Whitehead et Veblen.
2. Une variété différentiable de dimension d est une sorte de patchwork dont chaque pièce ressemble à un morceau de $\mathbb{R}^d$.
3. Précisément M est une variété si on peut la recouvrir par des cartes, c'est-à-dire des zones munies de *coordonnées* permettant de repérer les points mais telle que si un point appartient à plusieurs cartes les divers systèmes de coordonnées soient compatibles : l'application de changement de coordonnées doit être différentiable.

La sphère munie d'une structure de variété abstraite

1. Montrons comment la sphère est une variété différentiable abstraite.
2. La sphère S^2 est la réunion des deux ouverts $U = S^2 \setminus \{S\}$ et $V = S^2 \setminus \{N\}$ où S et N sont respectivement les pôles sud et nord.
3. Chacun de ces morceaux de la sphère est en bijection avec le plan $\mathbb{R}^2$ au moyen d'une projection stéréographique. Ce sont les deux cartes.
4. Si un point est dans $S^2 \setminus \{S, N\}$ il peut être repéré par l'une ou l'autre carte mais l'application qui aux coordonnées dans une carte associe celles dans l'autre carte est différentiable (et même de classe C^∞.)

La sphère munie d'une structure de variété abstraite

1. Montrons comment la sphère est une variété différentiable abstraite.
2. La sphère S^2 est la réunion des deux ouverts $U = S^2 \setminus \{S\}$ et $V = S^2 \setminus \{N\}$ où S et N sont respectivement les pôles sud et nord.
3. Chacun de ces morceaux de la sphère est en bijection avec le plan $\mathbb{R}^2$ au moyen d'une projection stéréographique. Ce sont les deux cartes.
4. Si un point est dans $S^2 \setminus \{S, N\}$ il peut être repéré par l'une ou l'autre carte mais l'application qui aux coordonnées dans une carte associe celles dans l'autre carte est différentiable (et même de classe C^∞.)

La sphère munie d'une structure de variété abstraite

1. Montrons comment la sphère est une variété différentiable abstraite.
2. La sphère S^2 est la réunion des deux ouverts $U = S^2 \setminus \{S\}$ et $V = S^2 \setminus \{N\}$ où S et N sont respectivement les pôles sud et nord.
3. Chacun de ces morceaux de la sphère est en bijection avec le plan $\mathbb{R}^2$ au moyen d'une projection stéréographique. Ce sont les deux cartes.
4. Si un point est dans $S^2 \setminus \{S, N\}$ il peut être repéré par l'une ou l'autre carte mais l'application qui aux coordonnées dans une carte associe celles dans l'autre carte est différentiable (et même de classe C^∞.)

La sphère munie d'une structure de variété abstraite

1. Montrons comment la sphère est une variété différentiable abstraite.
2. La sphère S^2 est la réunion des deux ouverts $U = S^2 \setminus \{S\}$ et $V = S^2 \setminus \{N\}$ où S et N sont respectivement les pôles sud et nord.
3. Chacun de ces morceaux de la sphère est en bijection avec le plan $\mathbb{R}^2$ au moyen d'une projection stéréographique. Ce sont les deux cartes.
4. Si un point est dans $S^2 \setminus \{S, N\}$ il peut être repéré par l'une ou l'autre carte mais l'application qui aux coordonnées dans une carte associe celles dans l'autre carte est différentiable (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$.)

Sous-variétés et variétés abstraites

1. A l'instar de la sphère n'importe quelle sous-variété de $\mathbb{R}^n$ est une variété différentiable.
2. Mais en réalité il n'existe pas de variété plus générale que les sous-variétés d'un espace numérique $\mathbb{R}^n$...
3. En effet, au moment même où les variétés abstraites étaient vraiment introduites Hassler Whitney montra en quelque sorte “qu'elles n'existaient pas ” !

Sous-variétés et variétés abstraites

1. A l'instar de la sphère n'importe quelle sous-variété de $\mathbb{R}^n$ est une variété différentiable.
2. Mais en réalité il n'existe pas de variété plus générale que les sous-variétés d'un espace numérique $\mathbb{R}^n$...
3. En effet, au moment même où les variétés abstraites étaient vraiment introduites Hassler Whitney montra en quelque sorte “qu'elles n'existaient pas ” !

Sous-variétés et variétés abstraites

1. A l'instar de la sphère n'importe quelle sous-variété de $\mathbb{R}^n$ est une variété différentiable.
2. Mais en réalité il n'existe pas de variété plus générale que les sous-variétés d'un espace numérique $\mathbb{R}^n$...
3. En effet, au moment même où les variétés abstraites étaient vraiment introduites Hassler Whitney montra en quelque sorte “qu'elles n'existaient pas ” !

Les théorèmes de plongement de Whitney

Théorème

(Whitney version faible 1936) Toute variété de dimension d se plonge dans $\mathbb{R}^{2d+1}$ autrement dit peut être vue comme une sous-variété de $\mathbb{R}^{2d+1}$.

Théorème

(Whitney version forte 1944) Toute variété de dimension d se plonge dans $\mathbb{R}^{2d}$ autrement dit peut être vue comme une sous-variété de $\mathbb{R}^{2d}$.

Première forme fondamentale sur une surface

1. Si $(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ est une surface donnée sous forme paramétrique (immersion), on peut exprimer dx, dy et dz à l'aide des coordonnées u et v :

$$dx = x'_u du + x'_v dv, \; dy = y'_u du + y'_v dv, \; dz = z'_u du + z'_v dv.$$

2. L'élément infinitésimal ds^2 (dit *première forme fondamentale*) permettant par intégration le calcul de la longueur d'une courbe tracée sur la surface s'écrit alors

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

avec

$$E = {x'_u}^2 + {y'_u}^2 + {z'_u}^2, \; F = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v, \; G = {x'_v}^2 + {y'_v}^2 + {z'_v}^2.$$

Première forme fondamentale sur une surface

1. Si $(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ est une surface donnée sous forme paramétrique (immersion), on peut exprimer dx, dy et dz à l'aide des coordonnées u et v :

$$dx = x'_u du + x'_v dv, \; dy = y'_u du + y'_v dv, \; dz = z'_u du + z'_v dv.$$

2. L'élément infinitésimal ds^2 (dit *première forme fondamentale*) permettant par intégration le calcul de la longueur d'une courbe tracée sur la surface s'écrit alors

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

avec

$$E = {x'_u}^2 + {y'_u}^2 + {z'_u}^2, \; F = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v, \; G = {x'_v}^2 + {y'_v}^2 + {z'_v}^2.$$

Géodésiques sur une surface

1. A partir du ds^2 d'une surface S on peut calculer, comme dans le cas plan, la longueur d'une courbe en intégrant le ds.
2. Parmi les courbes tracées sur une surface celles qui minimisent (localement) la distance entre deux points sont appelées *géodésiques*.
3. Dans le plan les géodésiques sont les droites ; sur une sphère ce sont les grands cercles.

Géodésiques sur une surface

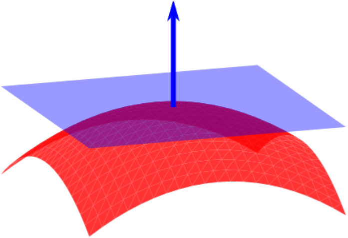
1. A partir du ds^2 d'une surface S on peut calculer, comme dans le cas plan, la longueur d'une courbe en intégrant le ds.
2. Parmi les courbes tracées sur une surface celles qui minimisent (localement) la distance entre deux points sont appelées *géodésiques*.
3. Dans le plan les géodésiques sont les droites ; sur une sphère ce sont les grands cercles.

Géodésiques sur une surface

1. A partir du ds^2 d'une surface S on peut calculer, comme dans le cas plan, la longueur d'une courbe en intégrant le ds.
2. Parmi les courbes tracées sur une surface celles qui minimisent (localement) la distance entre deux points sont appelées *géodésiques*.
3. Dans le plan les géodésiques sont les droites ; sur une sphère ce sont les grands cercles.

Les travaux de C.F. Gauss (1777-1855)

Le mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss, surnommé le « prince des mathématiciens », étudia la géométrie des surfaces.



Courbure et Theorema Egregium

1. Il était certes aussi « un homme de terrain » : géodésie, cartographie... et donc ses préoccupations ont un fondement physique, matériel, concret, des origines de terrain dans tous les sens du terme.
2. Il introduisit la notion de *courbure* en regardant comment « tourne » la *normale*...
3. Il se rendit alors compte (*Theorema Egregium*) que cette quantité, définie en utilisant quelque chose d'extérieur à la surface (la normale, qui nécessite que la surface soit *dans* l'espace) ne dépendait en fait que de la donnée de la première forme fondamentale (caractère intrinsèque).

Courbure et Theorema Egregium

1. Il était certes aussi « un homme de terrain » : géodésie, cartographie... et donc ses préoccupations ont un fondement physique, matériel, concret, des origines de terrain dans tous les sens du terme.
2. Il introduisit la notion de *courbure* en regardant comment « tourne » la *normale*...
3. Il se rendit alors compte (*Theorema Egregium*) que cette quantité, définie en utilisant quelque chose d'extérieur à la surface (la normale, qui nécessite que la surface soit *dans* l'espace) ne dépendait en fait que de la donnée de la première forme fondamentale (caractère intrinsèque).

Courbure et Theorema Egregium

1. Il était certes aussi « un homme de terrain » : géodésie, cartographie... et donc ses préoccupations ont un fondement physique, matériel, concret, des origines de terrain dans tous les sens du terme.
2. Il introduisit la notion de *courbure* en regardant comment « tourne » la *normale*...
3. Il se rendit alors compte (*Theorema Egregium*) que cette quantité, définie en utilisant quelque chose d'extérieur à la surface (la normale, qui nécessite que la surface soit *dans* l'espace) ne dépendait en fait que de la donnée de la première forme fondamentale (caractère intrinsèque).

Les travaux de Bernhard Riemann (1826-1866)

B. Riemann, élève de Gauss, développe ce qui est appelé depuis lors la géométrie Riemannienne. Le point de départ en est sa dissertation (1854) intitulée *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*.

La géométrie Riemannienne

1. Riemann généralise les travaux de Gauss à n dimensions. Il introduit la notion de *Mannigfaltigkeit* (multiplicité en français) qui va donner le concept de *manifold* ou *variété*.
2. Il introduit aussi de manière intrinsèque le tenseur de courbure d'une variété munie d'une métrique Riemannienne (toute variété différentielle possède une telle métrique.)
3. Ce tenseur de courbure, dans le cas pseudo-Riemannien (Lorentzien) aura un bel avenir en physique avec la théorie de la Relativité générale.

La géométrie Riemannienne

1. Riemann généralise les travaux de Gauss à n dimensions. Il introduit la notion de *Mannigfaltigkeit* (multiplicité en français) qui va donner le concept de *manifold* ou *variété*.
2. Il introduit aussi de manière intrinsèque le tenseur de courbure d'une variété munie d'une métrique Riemannienne (toute variété différentielle possède une telle métrique.)
3. Ce tenseur de courbure, dans le cas pseudo-Riemannien (Lorentzien) aura un bel avenir en physique avec la théorie de la Relativité générale.

La géométrie Riemannienne

1. Riemann généralise les travaux de Gauss à n dimensions. Il introduit la notion de *Mannigfaltigkeit* (multiplicité en français) qui va donner le concept de *manifold* ou *variété*.
2. Il introduit aussi de manière intrinsèque le tenseur de courbure d'une variété munie d'une métrique Riemannienne (toute variété différentielle possède une telle métrique.)
3. Ce tenseur de courbure, dans le cas pseudo-Riemannien (Lorentzien) aura un bel avenir en physique avec la théorie de la Relativité générale.

Le problème du plongement isométrique

1. Le théorème de plongement de Whitney a besoin de doubler la dimension de la variété abstraite pour la plonger comme sous-variété d'un espace euclidien.
2. Si la variété est munie d'une métrique Riemannienne un tel plongement ne respecte pas les longueurs (pas isométrique).
3. Le mathématicien John Forbes Nash fut mis au défi par un de ses collègues du MIT de résoudre un problème quasi-centenaire : le problème du plongement isométrique.

Le problème du plongement isométrique

1. Le théorème de plongement de Whitney a besoin de doubler la dimension de la variété abstraite pour la plonger comme sous-variété d'un espace euclidien.
2. Si la variété est munie d'une métrique Riemannienne un tel plongement ne respecte pas les longueurs (pas isométrique).
3. Le mathématicien John Forbes Nash fut mis au défi par un de ses collègues du MIT de résoudre un problème quasi-centenaire : le problème du plongement isométrique.

Le problème du plongement isométrique

1. Le théorème de plongement de Whitney a besoin de doubler la dimension de la variété abstraite pour la plonger comme sous-variété d'un espace euclidien.
2. Si la variété est munie d'une métrique Riemannienne un tel plongement ne respecte pas les longueurs (pas isométrique).
3. Le mathématicien John Forbes Nash fut mis au défi par un de ses collègues du MIT de résoudre un problème quasi-centenaire : le problème du plongement isométrique.

Le défi lancé à Nash

1. En 1953, Warren Ambrose, agacé par l'immodestie de Nash lui aurait jeté avec ironie « Si tu es si bon, pourquoi ne résous-tu pas le problème du plongement isométrique ? »
2. La question est là depuis près d'un siècle et la dissertation d'habilitation de Riemann (1854).
3. Nash, peu ou pas au courant de ce problème, veut se convaincre que c'est un problème digne de lui ! A cette fin il annonce qu'il l'a résolu, observe les réactions des mathématiciens et se met au travail...
4. Il donne deux résultats, le premier en 1954, juste 100 ans après le fameux texte de Riemann.

Le défi lancé à Nash

1. En 1953, Warren Ambrose, agacé par l'immodestie de Nash lui aurait jeté avec ironie « Si tu es si bon, pourquoi ne résous-tu pas le problème du plongement isométrique ? »
2. La question est là depuis près d'un siècle et la dissertation d'habilitation de Riemann (1854).
3. Nash, peu ou pas au courant de ce problème, veut se convaincre que c'est un problème digne de lui ! A cette fin il annonce qu'il l'a résolu, observe les réactions des mathématiciens et se met au travail...
4. Il donne deux résultats, le premier en 1954, juste 100 ans après le fameux texte de Riemann.

Le défi lancé à Nash

1. En 1953, Warren Ambrose, agacé par l'immodestie de Nash lui aurait jeté avec ironie « Si tu es si bon, pourquoi ne résous-tu pas le problème du plongement isométrique ? »
2. La question est là depuis près d'un siècle et la dissertation d'habilitation de Riemann (1854).
3. Nash, peu ou pas au courant de ce problème, veut se convaincre que c'est un problème digne de lui ! A cette fin il annonce qu'il l'a résolu, observe les réactions des mathématiciens et se met au travail...
4. Il donne deux résultats, le premier en 1954, juste 100 ans après le fameux texte de Riemann.

Le défi lancé à Nash

1. En 1953, Warren Ambrose, agacé par l'immodestie de Nash lui aurait jeté avec ironie « Si tu es si bon, pourquoi ne résous-tu pas le problème du plongement isométrique ? »
2. La question est là depuis près d'un siècle et la dissertation d'habilitation de Riemann (1854).
3. Nash, peu ou pas au courant de ce problème, veut se convaincre que c'est un problème digne de lui ! A cette fin il annonce qu'il l'a résolu, observe les réactions des mathématiciens et se met au travail...
4. Il donne deux résultats, le premier en 1954, juste 100 ans après le fameux texte de Riemann.

Le(s) théorème(s) de Nash

1. Nash donne d'abord un résultat en 1954 sur les variétés peu lisses.
2. Il montre ensuite le théorème suivant :

Théorème

(Nash 1956) Toute variété Riemannienne de dimension n se plonge isométriquement dans $\mathbb{R}^N$ avec $N = 3\frac{n(n+1)}{2} + 4n$ si la variété est compacte et avec $N = (3n + 11)\frac{n(n+1)}{2}$ sinon.

3. M. Gromov a réussi à descendre à $N = \frac{n(n+1)}{2} + 3n + 5$.

Le(s) théorème(s) de Nash

1. Nash donne d'abord un résultat en 1954 sur les variétés peu lisses.
2. Il montre ensuite le théorème suivant :

Théorème

(Nash 1956) Toute variété Riemannienne de dimension n se plonge isométriquement dans $\mathbb{R}^N$ avec $N = 3\frac{n(n+1)}{2} + 4n$ si la variété est compacte et avec $N = (3n+11)\frac{n(n+1)}{2}$ sinon.

3. M. Gromov a réussi à descendre à $N = \frac{n(n+1)}{2} + 3n + 5$.

Le(s) théorème(s) de Nash

1. Nash donne d'abord un résultat en 1954 sur les variétés peu lisses.
2. Il montre ensuite le théorème suivant :

Théorème

(Nash 1956) Toute variété Riemannienne de dimension n se plonge isométriquement dans $\mathbb{R}^N$ avec $N = 3\frac{n(n+1)}{2} + 4n$ si la variété est compacte et avec $N = (3n+11)\frac{n(n+1)}{2}$ sinon.

3. M. Gromov a réussi à descendre à $N = \frac{n(n+1)}{2} + 3n + 5$.

Plan

L'analyse fonctionnelle

1. L'analyse fonctionnelle étudie les espaces de fonctions.
2. Elle intervient dans des problèmes où les équations considérées ont pour inconnues des fonctions (équations différentielles, équations intégrales, équations intégro-différentielles, EDP etc.)
3. Elle est née au début du vingtième siècle grâce aux travaux de I. Fredholm, D. Hilbert, F. Riesz, M. Fréchet, S. Banach etc.

L'analyse fonctionnelle

1. L'analyse fonctionnelle étudie les espaces de fonctions.
2. Elle intervient dans des problèmes où les équations considérées ont pour inconnues des fonctions (équations différentielles, équations intégrales, équations intégro-différentielles, EDP etc.)
3. Elle est née au début du vingtième siècle grâce aux travaux de I. Fredholm, D. Hilbert, F. Riesz, M. Fréchet, S. Banach etc.

L'analyse fonctionnelle

1. L'analyse fonctionnelle étudie les espaces de fonctions.
2. Elle intervient dans des problèmes où les équations considérées ont pour inconnues des fonctions (équations différentielles, équations intégrales, équations intégro-différentielles, EDP etc.)
3. Elle est née au début du vingtième siècle grâce aux travaux de I. Fredholm, D. Hilbert, F. Riesz, M. Fréchet, S. Banach etc.

Stefan Banach (1892-1945)

L'un des théorèmes les plus élémentaires de l'analyse fonctionnelle et des plus fondamentaux des mathématiques est le théorème du point fixe dit de Banach-Picard. Stefan Banach le formula dans le cadre général des *espaces de Banach*...

Les espaces de Banach

1. Un *espace de Banach* est un *espace vectoriel normé complet* c'est-à-dire dans lequel toute suite de Cauchy converge.
2. Par exemple $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont des espaces de Banach pour la valeur absolue ou le module.
3. Côté espaces fonctionnels un exemple fondamental est l'espace $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \| \ \|_\infty)$ des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles muni de la norme de la convergence uniforme

$$\|f\|_\infty := \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$

Les espaces de Banach

1. Un *espace de Banach* est un *espace vectoriel normé complet* c'est-à-dire dans lequel toute suite de Cauchy converge.
2. Par exemple $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont des espaces de Banach pour la valeur absolue ou le module.
3. Côté espaces fonctionnels un exemple fondamental est l'espace $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \| \, \|_\infty)$ des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles muni de la norme de la convergence uniforme

$$\|f\|_\infty := \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$

Les espaces de Banach

1. Un *espace de Banach* est un *espace vectoriel normé complet* c'est-à-dire dans lequel toute suite de Cauchy converge.
2. Par exemple $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont des espaces de Banach pour la valeur absolue ou le module.
3. Côté espaces fonctionnels un exemple fondamental est l'espace $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \| \ \|_\infty)$ des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles muni de la norme de la convergence uniforme
$$\|f\|_\infty := \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$

Le théorème du point fixe de Banach-Picard

Théorème

Soit $f : E \to E$ une application contractante d'un espace de Banach E dans lui-même. Alors,

1. *f possède un unique point fixe.*
2. *Toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par un u_0 arbitraire dans E et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, converge vers cet unique point fixe.*

Ce théorème fondamental est à la base de très nombreux théorèmes d'existence. Il a un très grand intérêt théorique mais fournit aussi une méthode pratique d'approximations successives des objets convoités.

Exemples

1. L'*équation différentielle* $y'(t) = f(t, y(t))$, avec condition initiale $y(t_0) = y_0$ où f est une application continue sera transformée en l'équation intégrale

$$g(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, g(s))ds,$$

d'inconnue une fonction continue g.

2. L'*équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce* et de noyau K l'équation d'inconnue f

$$f(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)f(t)dt = g(s).$$

Exemples

1. L'*équation différentielle* $y'(t) = f(t, y(t))$, avec condition initiale $y(t_0) = y_0$ où f est une application continue sera transformée en l'équation intégrale

$$g(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, g(s))ds,$$

d'inconnue une fonction continue g.

2. L'*équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce* et de noyau K l'équation d'inconnue f

$$f(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)f(t)dt = g(s).$$

Le théorème de plongement de Banach-Mazur

Théorème

(Banach-Mazur) Si E est un espace de Banach séparable il existe un plongement $j : E \to (\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \| \ \|_\infty)$, i.e. j est linéaire isométrique.

Interprétation du théorème de Banach-Mazur

1. Évidemment tout sous-espace vectoriel fermé de $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}),\|\ \|_\infty)$ est un espace de Banach.
2. Le théorème de Banach-Mazur montre que tous les espaces de Banach séparables sont ainsi.
3. En d'autres termes tout espace de Banach séparable peut s'identifier à un sous-espace vectoriel fermé de $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}),\|\ \|_\infty)$, qui est donc une sorte d'espace de Banach universel.

Interprétation du théorème de Banach-Mazur

1. Évidemment tout sous-espace vectoriel fermé de $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$ est un espace de Banach.
2. Le théorème de Banach-Mazur montre que tous les espaces de Banach séparables sont ainsi.
3. En d'autres termes tout espace de Banach séparable peut s'identifier à un sous-espace vectoriel fermé de $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$, qui est donc une sorte d'espace de Banach universel.

Interprétation du théorème de Banach-Mazur

1. Évidemment tout sous-espace vectoriel fermé de $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \| \|_\infty)$ est un espace de Banach.
2. Le théorème de Banach-Mazur montre que tous les espaces de Banach séparables sont ainsi.
3. En d'autres termes tout espace de Banach séparable peut s'identifier à un sous-espace vectoriel fermé de $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \| \|_\infty)$, qui est donc une sorte d'espace de Banach universel.

Conclusion

1. Nous avons vu dans quatre branches très importantes des mathématiques (théorie des groupes, géométrie différentielle, géométrie Riemannienne, analyse fonctionnelle) des *théorèmes de plongement* affirmant que le concept abstrait de la théorie pouvait toujours se réaliser dans une classe d'objets (voire un seul objet) “concrets”(disons particuliers) qui ont été à la base de la création du concept abstrait.
2. On peut trouver d'autres exemples de telles situations.
3. Comme déjà dit dans l'introduction cela ne signifie nullement que les concepts abstraits sont inutiles !

Conclusion

1. Nous avons vu dans quatre branches très importantes des mathématiques (théorie des groupes, géométrie différentielle, géométrie Riemannienne, analyse fonctionnelle) des *théorèmes de plongement* affirmant que le concept abstrait de la théorie pouvait toujours se réaliser dans une classe d'objets (voire un seul objet) "concrets"(disons particuliers) qui ont été à la base de la création du concept abstrait.
2. On peut trouver d'autres exemples de telles situations.
3. Comme déjà dit dans l'introduction cela ne signifie nullement que les concepts abstraits sont inutiles !

Conclusion

1. Nous avons vu dans quatre branches très importantes des mathématiques (théorie des groupes, géométrie différentielle, géométrie Riemannienne, analyse fonctionnelle) des *théorèmes de plongement* affirmant que le concept abstrait de la théorie pouvait toujours se réaliser dans une classe d'objets (voire un seul objet) "concrets"(disons particuliers) qui ont été à la base de la création du concept abstrait.
2. On peut trouver d'autres exemples de telles situations.
3. Comme déjà dit dans l'introduction cela ne signifie nullement que les concepts abstraits sont inutiles !

Brève biblio/sito-graphies

1. V. Arnold, La mathématique expérimentale, conférence IREM Paris 2005, http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/videos/la_mathematique_experimentale/
2. V. Arnold, Sur l'éducation mathématique, Gazette des mathématiciens SMF, octobre 1998.
3. Questions à V.I. Arnold, Interview réalisée par M. Audin et P. Iglesias, Gazette des mathématiciens, Avril 1992.
4. A. Grothendieck, Récoltes et Semailles.
5. V. Borrelli, GNash un tore plat ! http://images.math.cnrs.fr/Gnash-un-tore-plat.html
6. C. Villani, Nash et les équations aux dérivées partielles, Matapli108
7. Journal de Mathématiques des élèves, ENS Lyon, Hors série mars 2016, Cédric Villani au château de Goutelas.
8. Tous les bons ouvrages sur les groupes, théorie de Galois, géométrie différentielle, analyse fonctionnelle...

Merci pour votre attention !

contact : robert.brouzet@univ-perp.fr