Synchrosqueezing appliqué aux ondes gravitationnelles

Duong-Hung PHAM* et Sylvain MEIGNEN†

*Labo des sciences de l'ingénieur, de l'informatique et de l'imagerie (ICube), Strasbourg
†Labo Jean Kuntzmann (LJK), Université Grenoble Alpes

Rencontre GdR ISIS-OG, Paris, France

Lundi, 8 Octobre 2018

Plan de l'exposé

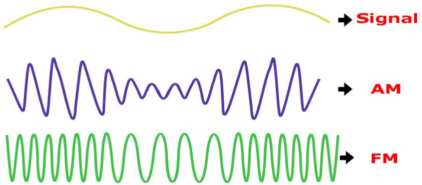
1. Contexte

2. Synchrosqueezing de la TFCT d'ordres supérieurs et une application aux ondes gravitationnelles

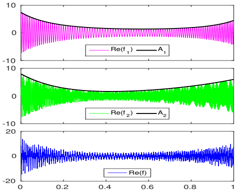
3. Perspectives

Contexte

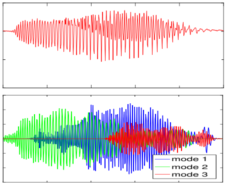
- **Modes AM/FM:** ondes modulées en amplitude et en fréquence



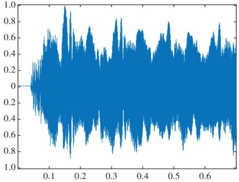
- **Signaux multicomposantes** (SMCs): superposition de modes AM/FM



(a) Un SMC synthétique



(b) Cris d'écho-location de chauve-souris



(c) Musique émise par un violoncelle

Contexte

- **Modèle mathématique** pour les SMCs:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{K} f_k(t) = \sum_{k=1}^{K} A_k(t) e^{i2\pi\phi_k(t)}, \quad (1)$$

où $A_k(t)$ et ϕ_k' sont appelées amplitude instantanée (AI) et fréquence instantanée (FI): $A_k(t) > 0$, $\phi_k'(t) > 0$ et $\phi_{k+1}'(t) > \phi_k'(t)$ $\forall t$.

- **Représentation temps-fréquence (TF) idéale:**

$$\mathrm{TFI}_\varsigma(t,\eta) = \sum_{k=1}^{K} A_k(t)^\varsigma \delta(\eta - \phi_k'(t)), \text{ avec } \varsigma = 1 \text{ ou } 2. \quad (2)$$

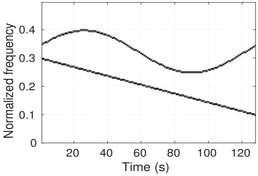
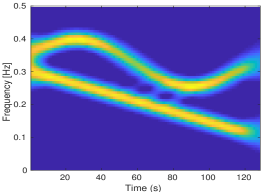


Figure 1: Représentation TF idéale (chirp linéaire + signal à phase trigonométrique)

Contexte

- **En réalité, on a accès à des représentations du type (spectrogramme):**



- **Trois problèmes** que l'on se propose d'étudier pour ce type de signaux:
  - ⋆ Représentations TF: approcher la représentation TF idéale.
  - ⋆ Séparation: reconstruire les modes f_k à partir de f.
  - ⋆ Démodulation: estimer A_k et ϕ_k.

Contexte

- **Représentations TF linéaires**

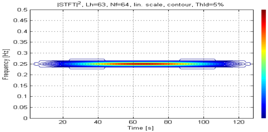
Définition 1: TF

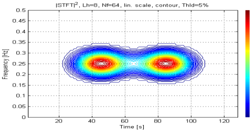
La transformée de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R})$ est: $$\hat{f}(\eta) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i2\pi\eta t} dt. \qquad (3)$$

Définition 2: TFCT et spectrogramme

Soit $g \in L^2(\mathbb{R})$. La transformée de Fourier à court terme (TFCT) de $f \in L^1(\mathbb{R})$ associée à g est: $V_f^g(t,\eta) = \langle f, g_{t,\eta} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)\overline{g(\tau - t)} e^{-2i\pi\eta(\tau - t)} d\tau$. Le spectrogramme associé: $|V_f^g(t,\eta)|^2$.

- **Propriétés de la TFCT**
  - ⋆ linéaire, redondante et inversible: $f(t) = \dfrac{1}{\overline{g(0)}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} V_f^g(t,\eta) d\eta$.
  - ⋆ soumise au principe d'incertitude de Heisenberg-Gabor: $\sigma_t \sigma_\eta \geq \dfrac{1}{2}$, où σ_t et σ_η sont les dispersions temporelles et fréquentielles de g ou ψ.





Contexte

- **Réallocation**[1]: concentrer le spectrogramme en utilisant des opérateurs de réallocation.
  - Estimateur de FI: $\widehat{\omega}_f(t,\eta) = \frac{1}{2\pi}\partial_t \left\{\arg(V_f^g(t,\eta))\right\}$
  - Retard de groupe: $\widehat{\tau}_f(t,\eta) = t - \frac{1}{2\pi}\partial_\eta \left\{\arg(V_f^g(t,\eta))\right\}$

Définition 3: Réallocation du spectrogramme

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, son spectrogramme réalloué est obtenu par:

$$\breve{\Theta}_f^g(\tau,\omega) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |V_f^g(t,\eta)|^2 \delta(\tau - \widehat{\tau}_f(t,\eta))\delta(\omega - \widehat{\omega}_f(t,\eta))dtd\eta. \qquad (4)$$

Réallocation est parfaite pour un chirp linéaire. Limitation: non-inversible!

- **Synchrosqueezing**: réallocation inversible + une analyse mathématique.

Définition 4: Synchrosqueezing de la TFCT (FSST)[2]

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, sa FSST est obtenue par:

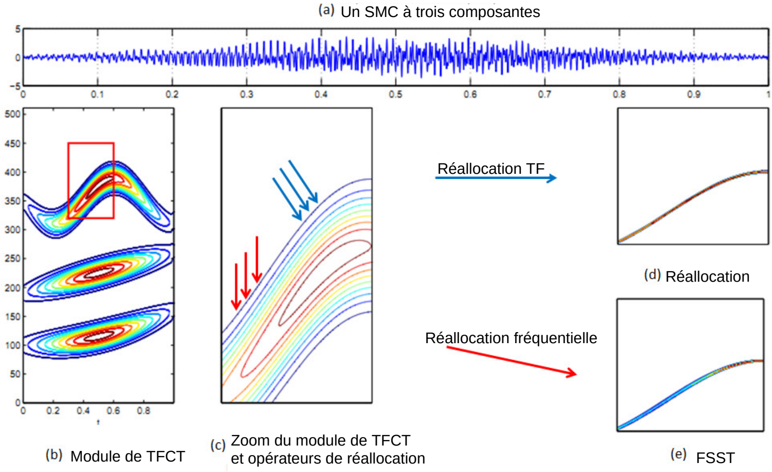
$$T_f^{g,\gamma}(t,\omega) = \int_{|V_f^g(t,\eta)|>\gamma} V_f^g(t,\eta)\delta(\omega - \widehat{\omega}_f(t,\eta))d\eta, \text{ où } \gamma \text{ est un seuil.} \qquad (5)$$

[1] F. Auger and P. Flandrin, "Improving the readability of time-frequency and time-scale representations by the reassignment method," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 43, no. 5, pp. 1068–1089, 1995.

[2] G. Thakur and H.-T. Wu, Synchrosqueezing-based recovery of instantaneous frequency from nonuniform samples, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, vol. 43, p. 2078-2095, Jan 2011.

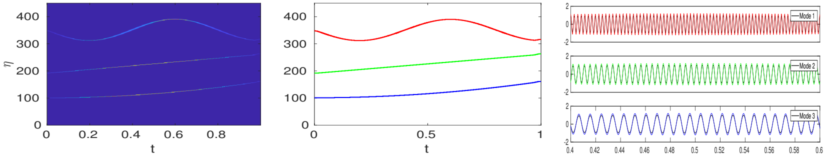
Contexte

- **Principe de la réallocation et du synchrosqueezing (FSST)**



Contexte

- **Reconstruction des modes du synchrosqueezing à l'aide de la FSST:**
  1. calculer l'opérateur de synchrosqueezing $T_f^{g,\gamma}$.
  2. détecter et extraire les ridges associés à chaque mode en utilisant $|T_f^{g,\gamma}|$[3].
  3. reconstruire les modes: $\boxed{f_k(t) \approx \frac{1}{\overline{g(0)}} \int_{\{\omega, |\omega - \varphi_k(t)| < d\}} T_f^{g,\gamma}(t,\omega) d\omega}$, où $\varphi_k(t)$ est une estimation de $\phi_k'(t)$ et d un paramètre de compensation.



(a): module de FSST (b): ridges estimés (c): modes reconstruits

Réallocation est parfaite pour une harmonique pure

Limitation: hypothèse de faible modulation fréquentielle sur les modes (i.e. $\phi_k''(t) \approx 0$)

[3] R. Carmona, W. Hwang, and B. Torresani, "Characterization of signals by the ridges of their wavelet transforms," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 45, no. 10, pp. 2586–2590, 1997.

Contexte

- **Synchrosqueezing d'ordre 2 de la TFCT (FSST2)**[4]: adaptation aux chirps linéaires

Définition 5: Nouvel estimateur de FI

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, on définit un opérateur de modulation complexe local d'ordre 2:

$$\widetilde{q}_{t,f}(t,\eta) = \frac{\partial_t \widetilde{\omega}_f(t,\eta)}{\partial_t \widetilde{\tau}_f(t,\eta)} \qquad \text{pour } \partial_t \widetilde{\tau}_f(t,\eta) \neq 0. \tag{6}$$

puis on pose:

$$\widetilde{\omega}^{[2]}_{t,f}(t,\eta) = \begin{cases} \widetilde{\omega}_f(t,\eta) + \widetilde{q}_{t,f}(t,\eta)(t - \widetilde{\tau}_f(t,\eta)) & \text{si } \partial_t \widetilde{\tau}_f \neq 0 \\ \widetilde{\omega}_f(t,\eta) & \text{sinon,} \end{cases}$$

t.q. $\widehat{\omega}^{[2]}_{t,f}(t,\eta) = \Re\mathrm{e}\{\widetilde{\omega}^{[2]}_{t,f}(t,\eta)\}$ est un nouvel estimateur de FI.

Définition 6: Synchrosqueezing d'ordre 2 FSST2

Le synchrosqueezing d'ordre FSST2 est alors défini en remplaçant $\widehat{\omega}_f(t,\eta)$ par $\widehat{\omega}^{[2]}_{t,f}(t,\eta)$:

$$T^{g,\gamma}_{2,f}(t,\omega) = \int_{\{\eta, |V^g_f(t,\eta)| > \gamma\}} V^g_f(t,\eta) \delta\left(\omega - \widehat{\omega}^{[2]}_{t,f}(t,\eta)\right) d\eta. \tag{7}$$

[4] F. Auger, P. Flandrin, Y.-T. Lin, *et al.*, Time-frequency reassignment and synchrosqueezing: An overview, *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 30, no. 6, pp. 32-41, 2013.

Contexte

- **Synchrosqueezing d'ordre 2 de la TFCT (FSST2)**:

Proposition 1

Si f est un chirp linéaire d'amplitude Gaussienne modulée (i.e $f(t) = A(t)e^{i2\pi\phi(t)}$, $\log(A(t))$ et $\phi(t)$ quadratiques). Alors,

$$\Re\mathrm{e}\left\{\widetilde{q}_{t,f}(t,\eta)\right\} = \phi''(t) \text{ et } \widehat{\omega}^{[2]}_{t,f}(t,\eta) = \phi'(t). \tag{8}$$

Proposition 2: Calcul des opérateurs de FSST2

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\widetilde{\omega}_f$, $\widetilde{\tau}_f$ et $\widetilde{q}_{t,f}$ sont calculés:

$$\widetilde{\omega}_f = \eta - \frac{1}{i2\pi}\frac{V_f^{g'}}{V_f^g},\ \widetilde{\tau}_f = t + \frac{V_f^{tg}}{V_f^g},\ \widetilde{q}_{t,f} = \frac{1}{i2\pi}\frac{V_f^{g''}V_f^g - \left(V_f^{g'}\right)^2}{V_f^{tg}V_f^{g'} - V_f^{tg'}V_f^g}, \tag{9}$$

où $V_f^{g'}, V_f^{tg}, V_f^{g''}, V_f^{tg'}$ sont respectivement les TFCTs de f calculées avec $t \mapsto g'(t), tg(t), g''(t)$ et $tg'(t)$.

Analyse mathématique rigoureuse: cas de support non-compact[5]!

[5] R. Behera, S. Meignen, and T. Oberlin, "Theoretical analysis of the second-order synchrosqueezing transform," *Applied and Computational Harmonic Analysis*, vol. 45, no. 2, pp. 379–404, 2018.

Plan de l'exposé

Synchrosqueezing de la TFCT d'ordres supérieurs (FSSTn)[6]

- **Motivation:** la nécessité d'une nouvelle technique permettant de traiter des signaux contenant des modes AM-FM ayant $\phi_k^{(n)}(t)$ $(n \geq 3)$ non-négligeable.
- **Exemple**

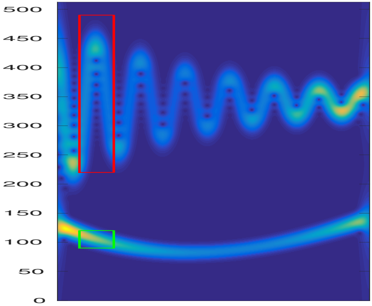


Figure 2: un SMC à deux composantes: phase polynomiale d'ordre supérieure et fonction sinusoïdale amortie (très forte modulations fréquentielles sinusoïdales)

[6] D.-H. Pham and S. Meignen, High-order synchrosqueezing transform for multicomponent signals analysis - with an application to gravitational-wave signal, *IEEE Transac tions on Signal Processing*, vol. 65, pp. 3168-3178, June 2017.

Synchrosqueezing de la TFCT d'ordres supérieurs (FSSTn)[6]

- **Développement du FSSTn**

Définition 7: Modèle de signal

Soit $f(\tau) = A(\tau)e^{i2\pi\phi(\tau)} \in L^2(\mathbb{R})$ avec $A(\tau)$ (*resp.* $\phi(\tau)$) égal à son développement de Taylor d'ordre L (*resp.* N) pour $\tau \to t$:

$$\log(A(\tau)) = \sum_{k=0}^{L} \frac{[\log(A)]^{(k)}(t)}{k!}(\tau - t)^k \text{ et } \phi(\tau) = \sum_{k=0}^{N} \frac{\phi^{(k)}(t)}{k!}(\tau - t)^k$$

Proposition 3: Nouvel estimateur de modulation d'ordre k

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ satisfaisant la définition ci-dessus avec $L \leq N$, les $N-1$ opérateurs de modulation complexes locaux $\widetilde{q}_{\eta,f}^{[k,N]}$ t.q. $\Re\mathrm{e}\left\{\widetilde{q}_{\eta,f}^{[k,N]}(t,\eta)\right\} = \phi^{(k)}(t) \Big/ (k-1)!$, $k = 2, \ldots, N$, sont calculés: $\widetilde{q}_{\eta,f}^{[N,N]}(t,\eta) = y_N(t,\eta)$

et $\widetilde{q}_{\eta,f}^{[j,N]}(t,\eta) = y_j(t,\eta) - \sum_{k=j+1}^{N} x_{k,j}(t,\eta)\widetilde{q}_{\eta,f}^{[k,N]}(t,\eta)$ pour $j = N-1, N-2, \ldots, 2$,

où $y_j(t,\eta)$ et $x_{k,j}(t,\eta)$ sont définis dans[6].

[6] D.-H. Pham and S. Meignen, High-order synchrosqueezing transform for multicomponent signals analysis - with an application to gravitational-wave signal, *IEEE Transac tions on Signal Processing*, vol. 65, pp. 3168-3178, June 2017.

Synchrosqueezing de la TFCT d'ordres supérieurs (FSSTn)[6]

Définition 8: Nouvel estimateur de FI

On définit un estimateur de FI complexe local d'ordre N par:

$$\widetilde{\omega}_{\eta,f}^{[N]}(t,\eta) = \begin{cases} \widetilde{\omega}_f(t,\eta) + \sum_{k=2}^{N} \widetilde{q}_{\eta,f}^{[k,N]}(t,\eta)\left(-x_{k,1}(t,\eta)\right), & \text{if } V_f^g(t,\eta) \neq 0 \\ & \text{and } \partial_\eta x_{j,j-1}(t,\eta) \neq 0 \text{ for } j = 2\dots N. \\ \widetilde{\omega}_f(t,\eta) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, $\widehat{\omega}_{\eta,f}^{[N]}(t,\eta) = \Re\mathrm{e}\{\widetilde{\omega}_{\eta,f}^{[N]}(t,\eta)\}$ est un nouvel estimateur de FI.

Proposition 4

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ satisfaisant la définition 7 avec $L \leq N$, alors $\phi'(t) = \widehat{\omega}_{\eta,f}^{[N]}(t,\eta)$.

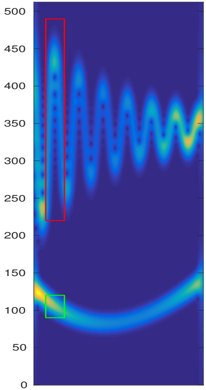
Définition 9: Synchrosqueezing de FSSTn

Le synchrosqueezing d'ordre supérieur FSSTn avec seuil γ est alors défini par:

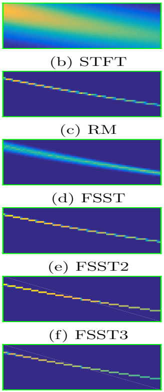
$$T_{N,f}^{g,\gamma}(t,\omega) = \int_{|V_f^g(t,\eta)|>\gamma} V_f^g(t,\eta)\delta\left(\omega - \widehat{\omega}_{\eta,f}^{[N]}(t,\eta)\right) d\eta. \tag{10}$$

Synchrosqueezing de la TFCT d'ordres supérieurs (FSSTn)[6]

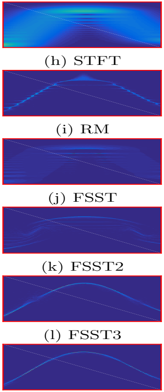
- **Calcul des opérateurs de FSST4**: en utilisant 11 différentes TFCTs (pour la FSSTn: 3n-1 de TFCTs).
- **Comparaison des représentations TF**



(a) STFT



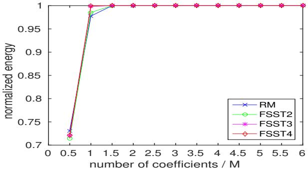
(b) STFT (c) RM (d) FSST (e) FSST2 (f) FSST3 (g) FSST4



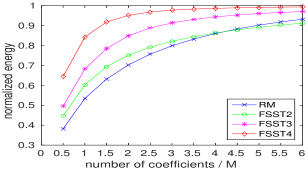
(h) STFT (i) RM (j) FSST (k) FSST2 (l) FSST3 (m) FSST4

Synchrosqueezing de la TFCT d'ordres supérieurs (FSSTn)[6]

- **Évaluation de concentration d'énergie** en utilisant de l'énergie normalisée en fonction du nombre de coefficients TF triés par module décroissant.

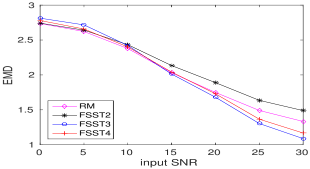


(a): phase polynomiale d'ordre supérieure

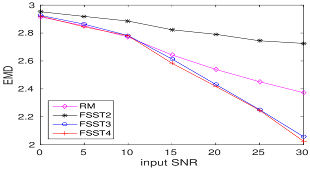


(b): fonction sinusoïde amortie

- **Évaluation de la précision de la localisation des transformées réallouées en utilisant l'Earth movers distance (EMD).**



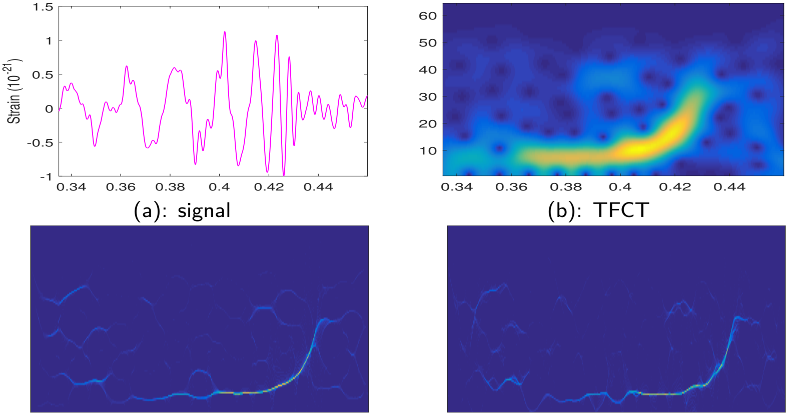
(a): phase polynomiale d'ordre supérieure



(b): fonction sinusoïde amortie

Synchrosqueezing de la TFCT d'ordres supérieurs (FSSTn)[6]

- **Une application aux ondes gravitationnelles: Hanford observé GW150914**.



(a): signal

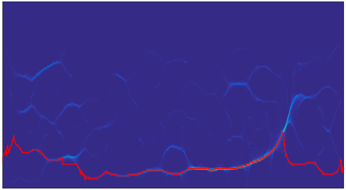
(b): TFCT

(c): FSST2

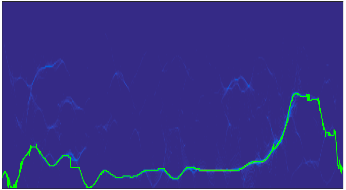
(d): FSST4

Synchrosqueezing de la TFCT d'ordres supérieurs (FSSTn)[6]

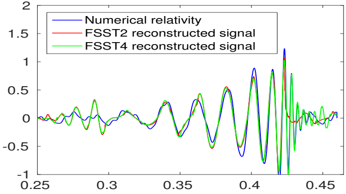
- **Une application aux ondes gravitationnelles: Hanford observé GW150914.**



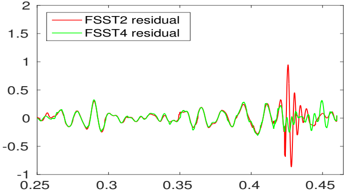
(e): FSST2+ridge estimé



(f): FSST4+ridge estimé



(e): reconstruction



(f): résidus

Plan de l'exposé

Perspectives

- ⋆ Étude de l'impact du bruit (Gaussiens, impulsion, Poisson et modèles autorégressifs et moyenne mobile (ARMA) en utilisant L-estimation[7]) sur les opérateurs de synchrosqueezing[8].
- ⋆ Extension de ces techniques au cas multivariés[9][10].

[7] I. Djurovic, L. Stankovic, and J. F. Bohme, "Robust l-estimation based forms of signal transforms and time-frequency representations," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 51, no. 7, pp. 1753–1761, 2003.

[8] H. Yang, "Statistical analysis of synchrosqueezed transforms," *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2017.

[9] A. Ahrabian and D. P. Mandic, "A class of multivariate denoising algorithms based on synchrosqueezing.," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 63, no. 9, pp. 2196–2208, 2015.

[10] L. Stanković, D. Mandić, M. Daković, *et al.*, "Time-frequency decomposition of multivariate multicomponent signals," *Signal Processing*, vol. 142, pp. 468–479, 2018.

Merci de votre attention!