

Ajustement de la Matrice CKM et Modèle à Deux Doublets de Higgs

Valentin Niess

Laboratoire de Physique Corpusculaire de Clermont-Ferrand
Université Blaise Pascal & IN2P3/CNRS

pour le Groupe CKMfitter:

J. Charles,
O. Deschamps ,
S. Descotes-Genon,
R. Itoh,
A. Jantsch,
C. Kaufhold,
H. Lacker,

theory, CPT Marseille
LHCb, LPC Clermont-Ferrand
theory, LPT Orsay
Belle, Tsukuba
Atlas, Munich
theory, LAPP, Annecy-le-Vieux
Atlas, Berlin

A. Menzel,
S. Monteil,
J. Ocariz,
S. T'Jampens,
V. Tisserand,
K. Trabelsi,

Atlas, Berlin
LHCb, LPC Clermont-Ferrand
BABAR, LPNHE Paris
LHCb, LAPP, Annecy-le-Vieux
BABAR, LAPP Annecy-le-Vieux
Belle, Tsukuba



Plan



I) Outils Statistique:

Tests d'hypothèses fréquentiste; intervalles de confiance

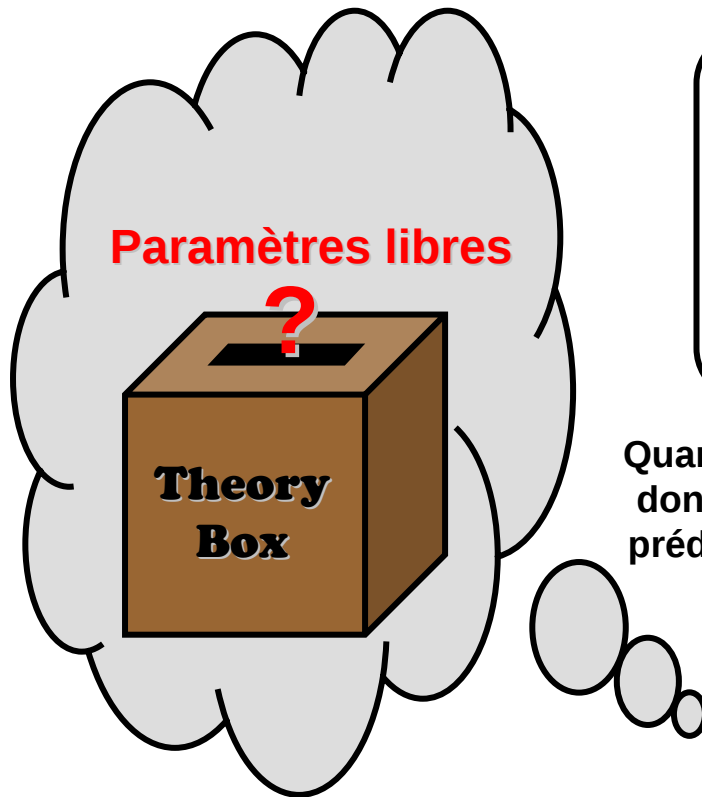
II) Ajustement de la Matrice CKM:

Test du mécanisme KM et contraintes sur les paramètres de Wolfenstein de la matrice CKM.

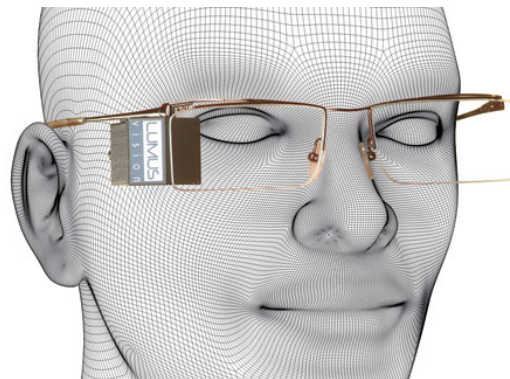
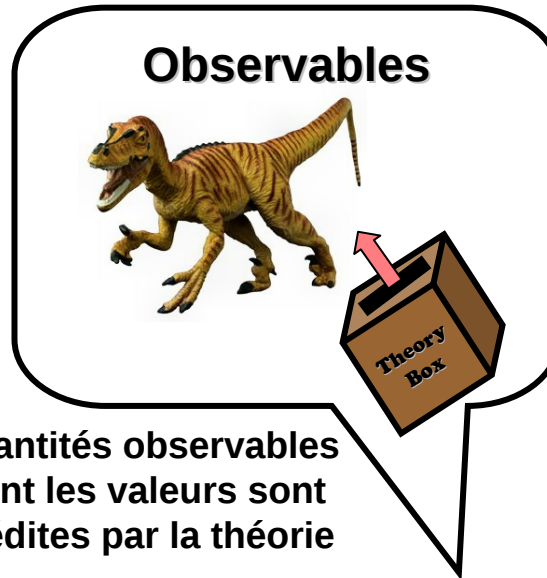
III) Ajustement d'un Modèle à 2 Doublets de Higgs

Recherches indirectes d'un Higgs Chargé; contraintes sur sa masse

I) Outils Statistique



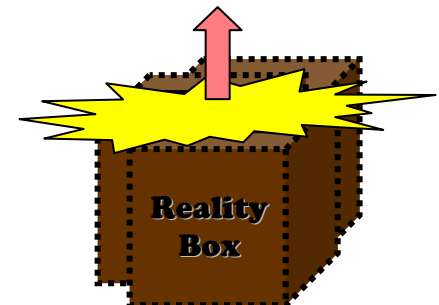
Une théorie prédictive



Observation



Observables altérées par des erreurs de mesure



Objectifs

- 1) Donner un degré de vraisemblance pour la théorie
- 2) Mesurer les valeurs des paramètres libres de la théorie

2 types d'erreurs de mesures si l'on considère la répétition de l'observation dans des conditions *identiques*:

-**Systematiques**: la mesure introduit une déviation constante de l'observation par rapport à la valeur prédite de l'observable.

-**Statistiques**: fluctuations inhérentes à l'expérience qui peuvent être décrites par une **distribution statistique** (ex: **Gaussienne**, en vertu du théorème de la limite centrale)

⇒ Recours à des **outils statistiques** de **test d'hypothèse Fréquentiste**, l'hypothèse à tester étant la théorie

Ingrédient clef: **loi de décision** pour notre test d'hypothèse de la théorie sous la forme d'un *test statistique*, ex: $\chi^2(x_{\text{obs}}|H_0) > 9$? $\Leftrightarrow$ **ordonner les valeurs possible de l'observation** selon leur degré de vraisemblance avec la théorie, ex: en fonction de leur $\chi^2(x_{\text{obs}}|H_0)$.

- Prise de décision: on construit un test (ex: $\chi^2(x_{\text{obs}}|H_0) > 9$?) permettant d'accepter ou de rejeter une hypothèse statistique dite 'nulle' H_0 .

2 risques d'erreurs:

Vérité → ↓ Décision	H_0 vraie	H_0 faux
Rejeter 😊 H_0	ERREUR Type I	OK
Accepter 😞 H_0	OK	ERREUR Type II

Erreur de type I / Echec à la détection

Erreur de type II / Fausse alarme

Probabilités
calculables
directement
sous H_0

Pb mal posé:
 H_0 faux ne
spécifie pas
la dist. stat.
du test

En général on ne peut
quantifier que le risque de 1^{ère}
espèce $\Rightarrow$ idéalement le
résultat du test permet de
rejeter H_0



Différents Tests, Même Loi d'Ordonnement



Deux tests ont les mêmes performances de décision si ils définissent un même ordonnancement des valeurs possibles de l'observation.

■ Test statistique par comparaison d'une fonction de vraisemblance à un seuil

Par exemple H_0 : l'observation x suit une loi normale centrée sur μ et d'écart type σ , $N(\mu, \sigma)$ tel que:

$$p(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

On rejette l'hypothèse H_0 pour:

$$T := \{x; p(x; \mu, \sigma) < p_0\} \Leftrightarrow \left\{x; \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2} > -2\ln(p_0) = \chi_0^2\right\} \Leftrightarrow \left\{x; \alpha(x; \mu, \sigma) = \operatorname{erfc}\left(\frac{|x - \mu|}{\sqrt{2}\sigma}\right) < 1 - \text{CL}\right\}$$

■ Ces 3 tests définissent la même relation d'ordre entre les valeurs possibles de l'observation. Ils sont équivalents le seuil p_0 étant 'muet'. **La grandeur significative est le risque de 1^{ère} espèce associé à la valeur seuil du test:**

$$\alpha(p_0) = \int_T p(x; \mu, \sigma) dx = \operatorname{erfc}(\sqrt{-\ln(p_0)}) = \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\chi_0^2}{2}}\right) = \alpha(\chi_0^2)$$

'Fonction de répartition' sur les valeurs réordonnées de l'observation

■ **Renverser le problème**: on se refuse à faire le test; information binaire: peu être/non. Mais plutôt on intéressé par la valeur de seuil maximale pour laquelle le test rejettera l'observation, ex: $p_{\text{obs}} = p(x_{\text{obs}}; \mu, \sigma)$, χ^2_{obs} , ou $\alpha_{\text{obs}} = \alpha(p_0 = p_{\text{obs}})$.

$\Rightarrow \alpha_{\text{obs}} = \alpha(p_0 = p_{\text{obs}})$ est la probabilité critique d'erreur de 1^{ère} espèce (**p-value**) lorsque l'observation tombe '*pile*' sur la valeur seuil du test.

■ Par construction, un test plus risqué ou audacieux que p-value -dont le seuil p_0 est tel que le risque d'erreur de 1^{ère} espèce est plus grand que la probabilité critique, $\alpha(p_0) > \alpha_{\text{obs}}$ - rejettera H_0 :

$$p(x_{\text{obs}}; \mu, \sigma) < p_0 \Leftrightarrow \alpha_{\text{obs}} < \alpha(p_0) \quad (\alpha \text{ fonction de répartition} \Rightarrow \text{croissante})$$

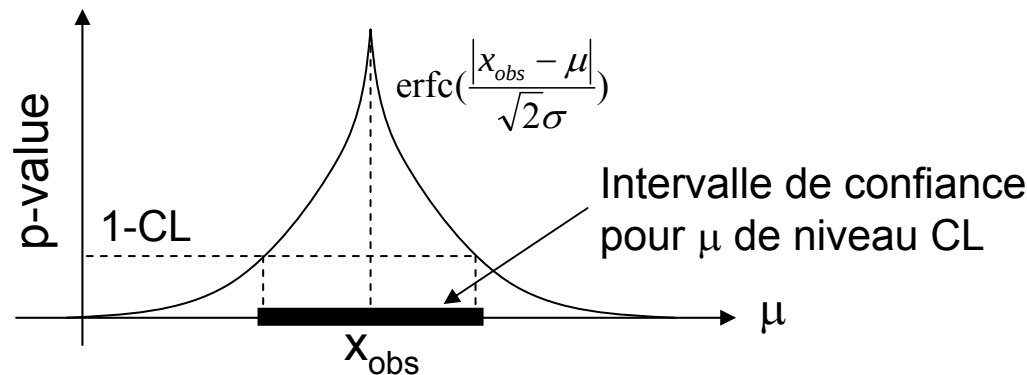
$\Rightarrow$ La p-value, α_{obs} , ne dépend que de la loi d'ordonnancement utilisée. On 'escamote' ainsi le paramètre intermédiaire de seuil du test.

■ Attention: la p-value n'est pas la probabilité que H_0 soit vraie: **la valeur seuil de rejet de H_0 ne doit pas être '*ajustée*' à l'observation ...** Il s'agit d'une mesure de signification de H_0 dans $[0;1]$ qui peut être **comparée directement à un niveau de confiance, CL, choisit indépendamment de l'observation; ex: 3σ , 5σ .**

La théorie dépend de **paramètres libres** θ :

⇒ On utilise le test d'hypothèse comme un *algorithme de détection* dans un scan des valeurs de paramètre plausibles.

■ On répète le test d'hypothèse pour l'ensemble des $H_0: \theta = \theta_0$ en utilisant un même seuil du risque de 1^{ère} espèce: $\alpha = 1 - \text{CL}$ dans $[0; 1]$. CL est la probabilité de détection de l'algorithme. Les valeurs de paramètres que l'on n'a pas pu rejeter, $p\text{-value} = \alpha_{\text{obs}} \geq 1 - \text{CL}$, définissent un **intervalle de confiance de niveau CL** pour les valeurs de paramètres θ . Cet intervalle dépend de la valeur particulière de l'observation.



■ **Propriété fréquentiste**: on a fixé la proba de détection à CL, en particulier pour le cas où l'hypothèse H_0 est vraie. Donc, *si la vérité fait bien partie des hypothèses testées*, notre construction 'réussie' dans CL des cas. L'intervalle de confiance fréquentiste ainsi obtenu contiendra bien la valeur vraie de θ dans une fraction CL des cas.

Dit autrement ...

La loi d'ordonnement associé à un test détermine sa puissance statistique de discrimination, i.e. sa capacité à minimiser le risque de 1^{ère} espèce (maximiser la proba. détection) pour un risque de 2^{ème} espèce (fausse alarme) fixé.

Les risques α et β ne peuvent être minimisés simultanément:
 $\alpha \rightarrow 0 \Rightarrow \beta \rightarrow 1$ et réciproquement

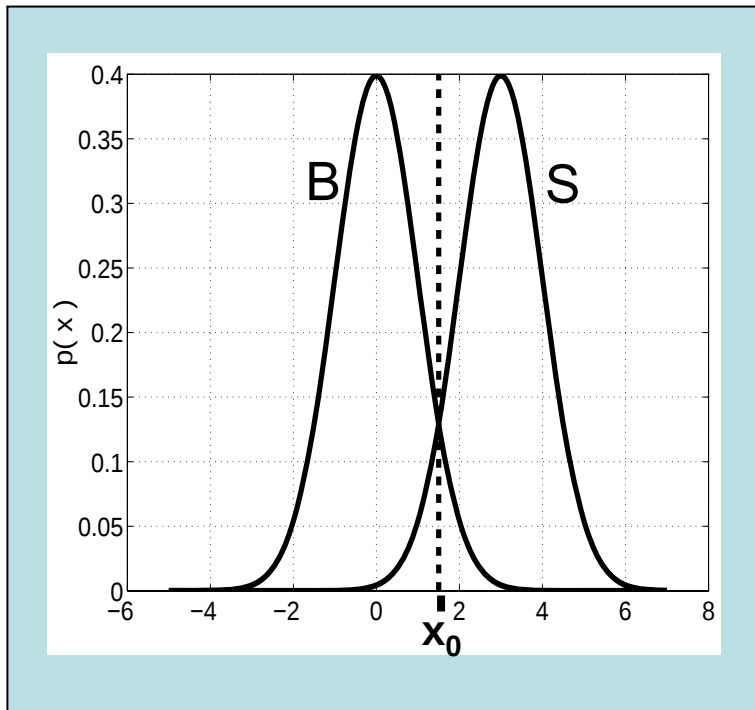


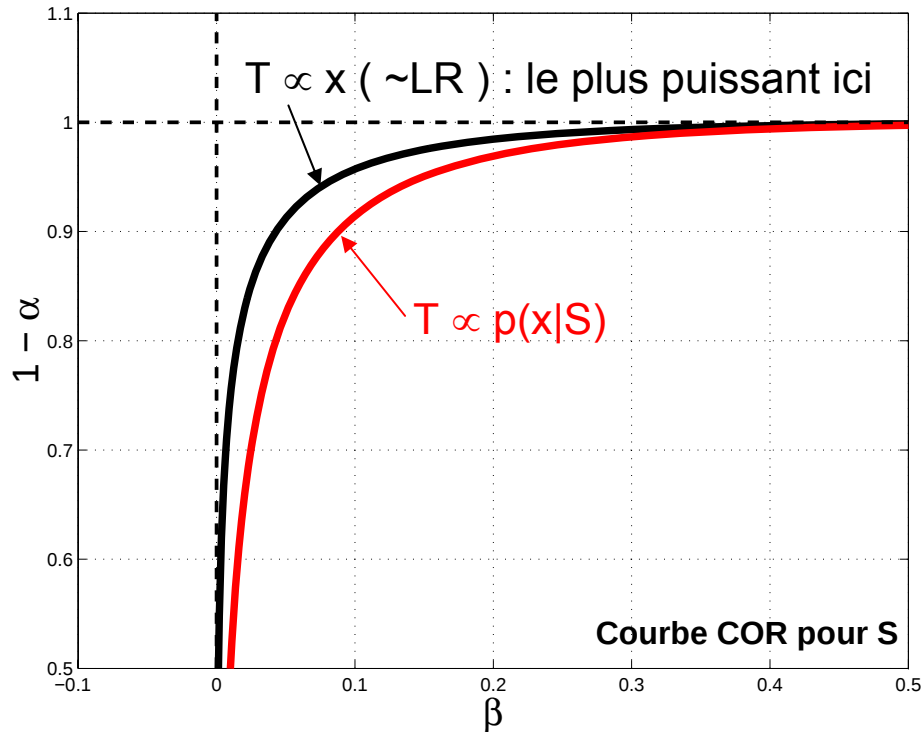
Illustration avec un système à 2 états:
 B ou S normalement distribués centrés en 0 ou 3 avec un écart type de 1.

$B \sim N(0,1)$ et $S \sim N(3,1)$

H_0 : On suppose que l'état est S et on construit un test *pertinent*.

Test 1: $T := \{x; x \leq x_0\}$ (tient compte de S et B)

Test 2: $T := \{x; p(x | S) \leq p_0\}$ (tient compte de S uniquement)



- **Erreur de Type I**: rejeter S alors que c'est vrai / Echec à la détection

$$\alpha = 1 - \int_T p(x|S) dx$$

- **Erreur de Type II**: accepter S alors que c'est faux / Fausse alarme

$$\beta = \int_T p(x|N) dx$$

Connu ici!

■ Le compromis le plus *puissant* est obtenu pour un ordonnancement selon le rapport des vraisemblance (LR) $T = p(x|S) / p(x|B)$: C'est le **lemme de Neyman-Pearson**. (Ici, le rapport de vraisemblance conduit au même ordonnancement que $T = \{x; x \leq x_0\}$).

■ Mais ... dans le cas général l'hypothèse alternative: $\{ H_1 = H_0 \text{ faux} \}$, ne permet pas à elle seule de spécifier la loi de probabilité; ex: $\mu \neq \mu_0 \dots \Rightarrow ???$ Dans ces conditions il n'y a pas de critère exact donnant le test le plus puissant.

■ Par analogie avec le lemme de Neyman-Pearson on peut utiliser un rapport de maximum de vraisemblance (MLR). On confronte l'hypothèse H_0 à l'hypothèse alternative H_1 la plus vraisemblable; obtenue pour les valeurs de paramètres les plus vraisemblables données par l'observation:

$$\text{Feldman \& Cousins} \rightarrow T = \left\{ \vec{x}; \frac{p(\vec{x}; \vec{\theta})}{\max_{\vec{\theta}} (p(\vec{x}; \vec{\theta}))} < t_0 \right\} \Leftrightarrow \left\{ x; \Delta\chi^2 = \chi^2 - \chi_{\min}^2 > -2 \ln(t_0) \right\}$$

CKMfitter

■ C'est le critère utilisé par Feldman & Cousins dans leur construction *unifiée*: **G.J. Feldman and R.D. Cousins, Phys. Rev. D 57(7) (1998).** Mais construction purement numérique dans l'article d'origine + tabulation des résultats. En fait, dans les cas simples, on sait résoudre analytiquement en calculant explicitement la p-value; ex: *The CKMFitter Group, J. Charles et al., p14-15, Eur. Phys. J. C 41, 1-131 (2005).*

⇒ Illustration avec formules analytiques compactes pour le cas 1D Gaussien borné.

Déterminer μ borné dans $[\mu_{\min}; \mu_{\max}]$

Densité de probabilité:

$$p(x; \mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

σ connu

Ordonnement selon MLR

$$\Delta\chi^2 = \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2} - \chi_{\min}^2 \quad \text{avec}$$

$$\chi_{\min}^2 = \begin{cases} (x - \mu_{\min})^2 / \sigma^2 & \text{si } x < \mu_{\min} \\ 0 & \text{si } x \in [\mu_{\min}; \mu_{\max}] \\ (x - \mu_{\max})^2 / \sigma^2 & \text{si } x > \mu_{\max} \end{cases}$$

$$p\text{-value} = \alpha(x_{\text{obs}}; \mu) = \int_T p(x; \mu) dx$$

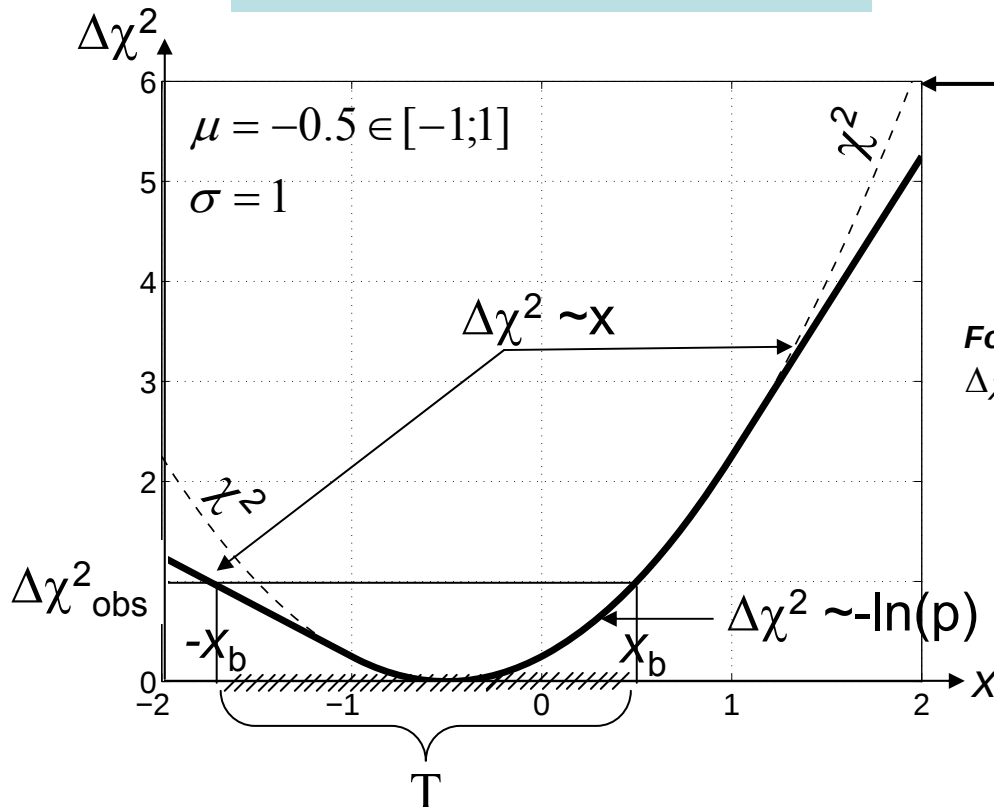
Fonction convexe:

$$\Delta\chi^2 \leq \Delta\chi_{\text{obs}}^2 \Leftrightarrow -X_b(X_{\min}, \Delta\chi_{\text{obs}}^2) \leq \frac{x - \mu}{\sigma} \leq X_b(X_{\max}, \Delta\chi_{\text{obs}}^2)$$

Limites du domaine d'intégration T

$$X_b(x, y) = \begin{cases} \sqrt{y} & \text{si } y \leq x^2 \\ \frac{1}{2}\left(x + \frac{y}{x}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$X_{\min/\max} = \frac{|\mu - \mu_{\min/\max}|}{\sigma}$$



$$p_{MLR}(\mu) = \frac{1}{2} \left[\text{erfc}\left(\frac{X_b(X_{\min}, \Delta\chi_{\text{obs}}^2)}{\sqrt{2}}\right) + \text{erfc}\left(\frac{X_b(X_{\max}, \Delta\chi_{\text{obs}}^2)}{\sqrt{2}}\right) \right]$$

• Pour un ordonnancement selon une simple vraisemblance (L) on aurait :

$$p_L(\mu) = \text{erfc}(\sqrt{\chi_{\text{obs}}^2 / 2})$$

$$\chi^2 = \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2}$$

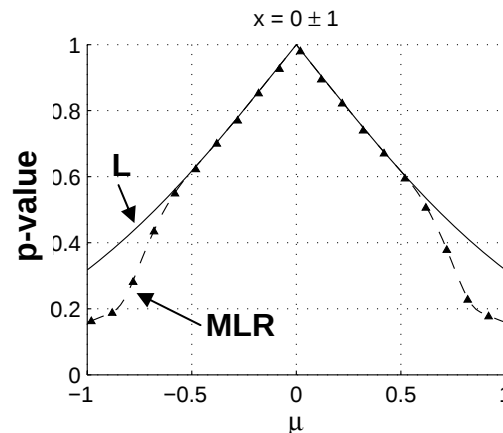
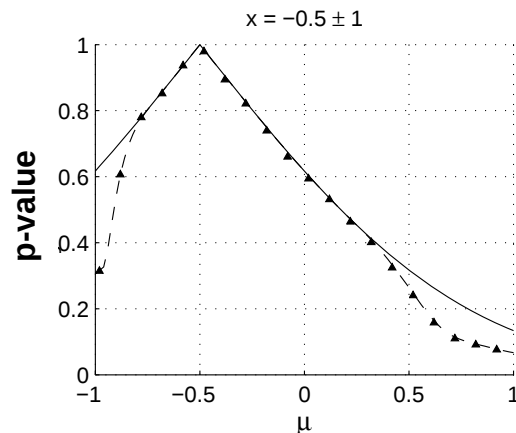
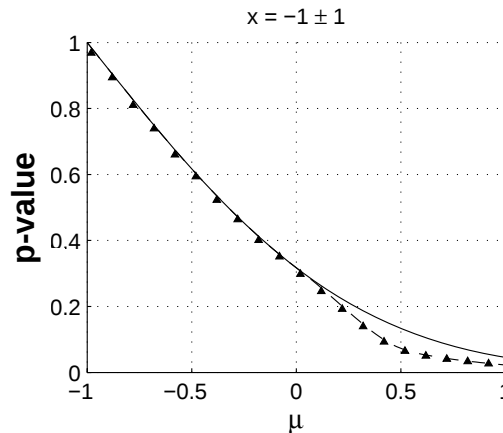
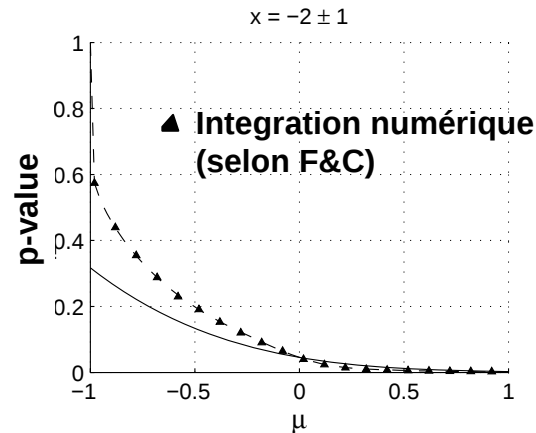
• L'ordonnement MLR est plus robuste proche des bornes

Reproduit les résultats de:

*The CKMFitter Group,
J. Charles et al., p14-15, Eur.
Phys. J. C 41, 1-131 (2005)*

• Proposition d'exercice: étudier les propriétés d'un ordonnancement du type filtre adapté:

$$T(x; \mu) = p(x; \mu)^2 / \int_{\mu_{\min}}^{\mu_{\max}} p(x; \mu)^2 d\mu$$



Cas simples jusqu'ici. En général la théorie dépend de plusieurs paramètres libres θ et certains sont plus intéressants que d'autres. On souhaite donner un intervalle de confiance sur un **sous-ensemble restreint μ** des paramètres, indépendamment des valeurs des autres **paramètres ν qui sont dits nuisibles**.

Naïf: construire un intervalle de confiance sur μ, ν puis projeter en prenant à chaque fois le pire cas de figure pour ν ... ☹ **très pessimiste ...**

Problème: idéalement on devrait choisir le test statistique tel que sa loi de probabilité sous l'hypothèse H_0 ne dépendent pas de la valeur particulière des paramètres nuisibles. Mais ... **on ne sait pas faire dans le cas général ...**

⇒ rapport de maximum de vraisemblance généralisé (MLR). Pour H_0 on utilise les valeurs des paramètres nuisibles les plus vraisemblables d'après l'observation:

$$T(x; \mu) = \frac{\sup_{\nu} (p(x; \mu, \nu))}{\sup_{\mu, \nu} (p(x; \mu, \nu))} = \frac{p(x; \mu, \hat{\nu})}{p(x; \hat{\mu}, \hat{\nu})}$$

Pour un maximum régulier tel que: $\frac{\partial}{\partial \nu} p(x; \mu, \hat{\nu}) = 0$

autour des valeurs de paramètre les plus vraisemblables la distribution du test ne dépend pas des paramètres nuisibles au 1^{er} ordre d'approximation.

Mais ... rigoureusement la distribution du MLR dépend des paramètres de nuisance ...

■ **Méthode du supremum**: on majore la p-value sur l'ensemble des valeurs possibles des paramètres de nuisance: $\alpha_{\text{sup}}(\mu) = \sup_{\nu}(\alpha_{\text{obs}}(\mu, \nu))$

⇒ conservatif / prudent par construction. Mais en pratique lorsque le problème devient intraitable analytiquement: extrêmement coûteux numériquement: Monte-Carlo + double optimisation.

■ **Approximation parabolique**: asymptotiquement le MLR suit une distribution de χ^2 à $N_{\text{eff}} = \dim(\mu)$ degrés de liberté.

⇒ Facile à mettre en œuvre: $\alpha_{\text{obs}} = 1 - \text{chi2cdf}[\Delta\chi^2_{\text{obs}}, N_{\text{eff}}] = \text{Prob}[\Delta\chi^2_{\text{obs}}, N_{\text{eff}}]$
⇒ Bonne approximation en général ... mais on peut avoir des surprises sur la valeur effective du nombre de degrés de libertés à utiliser ... ⇒ **utilisée dans CKMfitter**

■ **Méthode du chapeau**: (plugin) utiliser les valeurs de paramètres nuisibles les plus vraisemblables, $\hat{\nu}$, pour calculer la p-value sous $H_0: \mu = \mu_0$. On intègre $p(x; \mu, \hat{\nu})$ par Monte-Carlo sur le domaine critique définie par le test à la valeur limite donnée par l'observation.

⇒ Tend à être plus fiable que la méthode précédente si N_{eff} est mal définis.
⇒ Il faut refaire la minimisation du test sur $N_{\text{toy}} \sim 1,000 - 10,000$ expériences Monte-Carlo, coûteux en temps de calcul mais abordable.

- On peut restreindre la maximisation de la p-value à un intervalle de confiance pour les paramètres nuisibles: **R.R. berger, D.D. Boos, JASA 89, 427 (1994)**

Si on dispose préalablement d'un intervalle de confiance C_β de niveau β pour v , alors la p-value restreinte sur C_β :

$$\alpha_{obs,\beta}(\mu) = \sup_{v \in C_\beta} (\alpha_{obs}(\mu, v)) + \beta$$

est correcte pour construire un test d'hypothèse de niveau α de μ .

- Implicitement c'est ce que l'on fait, en négligeant β devant α : $\beta \ll \alpha$. On donne un intervalle '*certain*' pour v .
- Très pratique numériquement car on peut restreindre la minimisation à un intervalle autour des valeurs les plus vraisemblables des paramètres *nuisibles*.

Utilisé dans CKMfitter

Systematiques = *paramètres de nuisance* contraints dans $\pm\Delta$

⇒ Intervalle de confiance

'suffisante' de largeur 2Δ sur lequel on minimise le χ^2

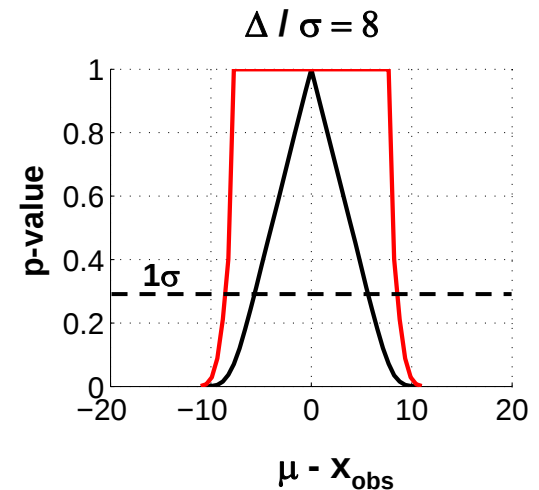
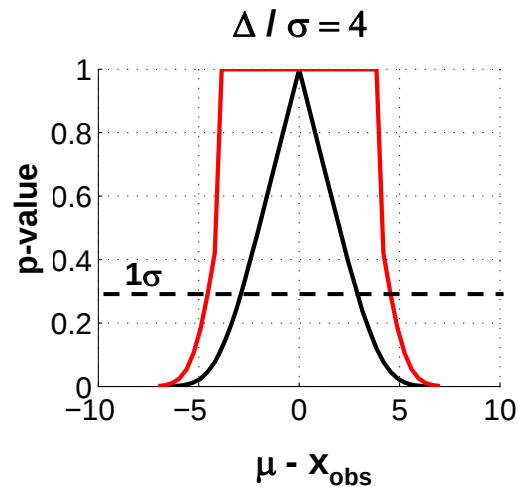
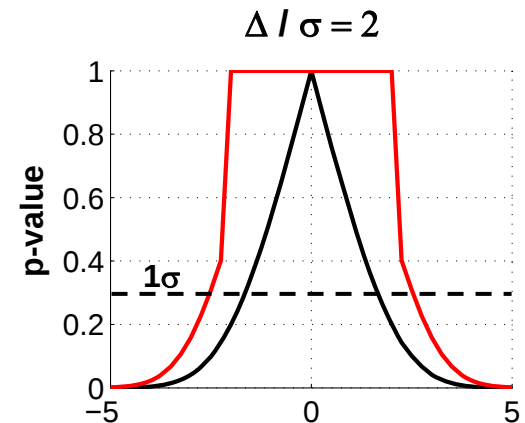
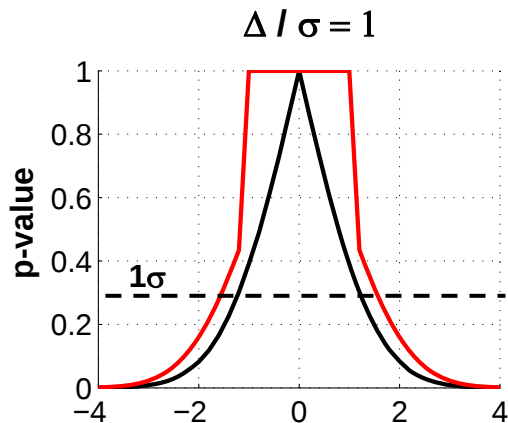
Sur cet intervalle la signifiante du test est uniforme.

Attention: résultat très différent de ce que l'on obtient en modélisant statistiquement la systématique (e.x: densité de proba uniforme)

Exemple simple admettant une résolution analytique (en annexe):

$$x = \mu + \sigma N[0,1] + \Delta_x$$

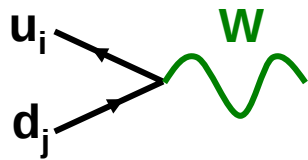
↑ Observation
↓ Paramètre
↑ Erreur stat.
↑ Systématique



— dist. Gaussienne + systématique uniforme
 — dist. Gaussienne + systématique bornée sur un intervalle

II) Ajustement de la Matrice CKM

- Dans le secteur des quarks les états propres de masse et de saveur différent:



$$\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}_{Li} V_{ij} \gamma^\mu d_{Lj} W_\mu + \text{h.c.}$$

- Mélange des états de saveur selon la matrice unitaire 3x3 de Cabbibo-Kobayashi-Maskawa:

$$V_{CKM} = \begin{bmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{bmatrix} \begin{matrix} d \\ s \\ b \end{matrix} \begin{matrix} u \\ c \\ t \end{matrix}$$

- 3 familles $\Rightarrow$ paramétrisation par 3 angles d'Euler θ_{ij} + 1 phase δ (source unique de violation de CP)

- Hiérarchie: transitions entre générations peu probables $\Rightarrow$ paramétrisation de Wolfenstein de V_{CKM}

$$V_{CKM} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3 [\bar{\rho} - i\bar{\eta}] \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3 [1 - \bar{\rho} - i\bar{\eta}] & -A\lambda^2 & 1 \end{bmatrix} + O(\lambda^4)$$

$$\begin{cases} A = 0.8117 [+0.0096 - 0.0236] \\ \lambda = \sin(\theta_{12}) = 0.2252 \pm 0.0008 \\ \bar{\rho} = 0.145 [+0.024 - 0.034] \\ \bar{\eta} = 0.339 [+0.019 - 0.015] \end{cases} \quad (1\sigma \text{ CL})$$

(CKMfitter Summer 08)

- L'unitarité de V_{CKM} impose 6 relations dans le plan complexe, reliés à 4 Mesons (en excluant les relations liées top). Ces relations définissent une 'égalité triangulaire' dans le plan complexe ($\vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}$)

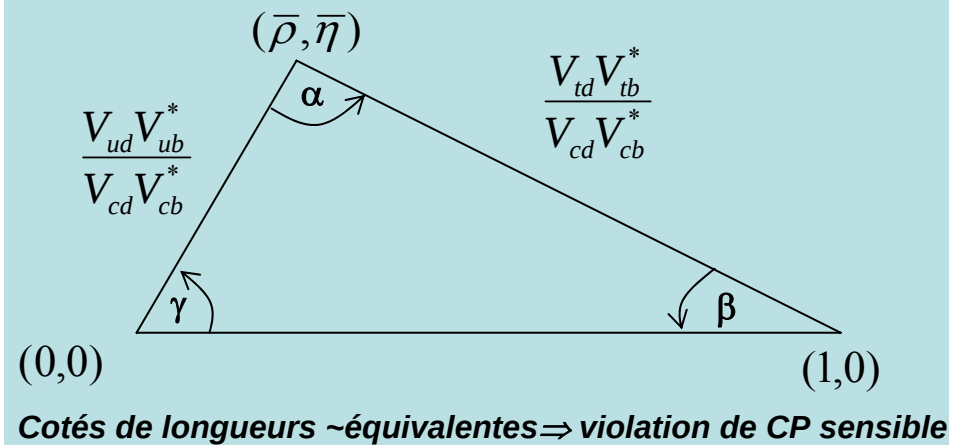
$$B_d \quad \sum_{i \in \{u, c, t\}} V_{ib}^* V_{id} = 0 \quad (\lambda^3, \lambda^3, \lambda^3)$$

$$B_s \quad \sum_{i \in \{u, c, t\}} V_{ib}^* V_{is} = 0 \quad (\lambda^4, \lambda^2, \lambda^2)$$

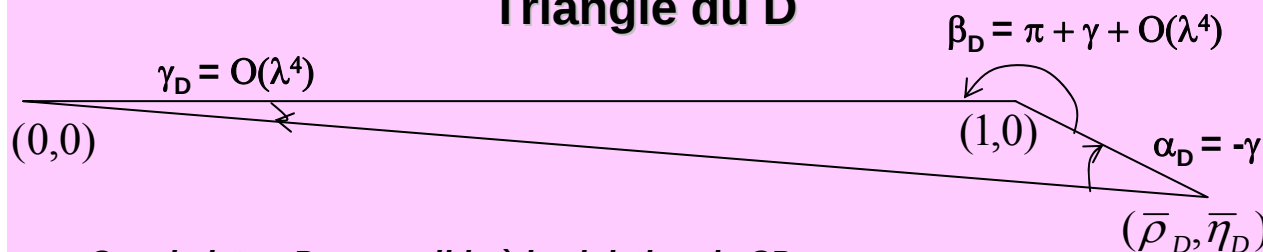
$$K \quad \sum_{i \in \{u, c, t\}} V_{is}^* V_{id} = 0 \quad (\lambda, \lambda, \lambda^5)$$

$$D \quad \sum_{j \in \{d, s, b\}} V_{cj}^* V_{uj} = 0 \quad (\lambda, \lambda, \lambda^5)$$

Triangle d'Unitarité du B_d (TU)



Triangle du D



Quasi plat $\Rightarrow$ Peu sensible à la violation de CP
Sensible à l'angle γ uniquement

Observable directes
mesures à $\sim 5\text{-}10\%$
 $\Rightarrow$ Contraintes
indirectement via CKM

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} \boxed{V_{ud}} & \boxed{V_{us}} & \boxed{V_{ub}} (\gamma) \\ \boxed{V_{cd}} & \boxed{V_{cs}} & \boxed{V_{cb}} \\ \boxed{V_{td}} (\beta) & \boxed{V_{ts}} & \boxed{V_{tb}} \end{pmatrix}$$

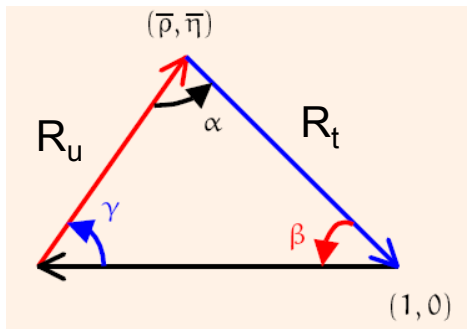
Paramétrisation de Wolfenstein
modifiée selon EPJ C41,1-131 (2005)

4 paramètres physiques: $A, \lambda, \bar{\rho}$ et $\bar{\eta}$

- Paramétrisation unitaire à tout ordre en λ et indépendante de la convention de phase ($\sim$ invariant de Jarlskog):

$$\lambda^2 = \frac{|V_{us}|^2}{|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2}, \quad A^2 \lambda^4 = \frac{|V_{cb}|^2}{|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2} \quad \text{et} \quad \bar{\rho} + i\bar{\eta} = -\frac{V_{ud} V_{ub}^*}{V_{cd} V_{cb}^*}$$

- Les angles α , β et γ du TU renseignent sur la phase complexe violant CP:



$$\alpha = \arg \left[-\frac{V_{td} V_{tb}^*}{V_{ud} V_{ub}^*} \right], \quad \beta = \arg \left[-\frac{V_{cd} V_{cb}^*}{V_{td} V_{tb}^*} \right], \quad \gamma = \arg \left[-\frac{V_{ud} V_{ub}^*}{V_{cd} V_{cb}^*} \right]$$

Ajustement global de V_{CKM} dans le cadre du Modèle Standard:

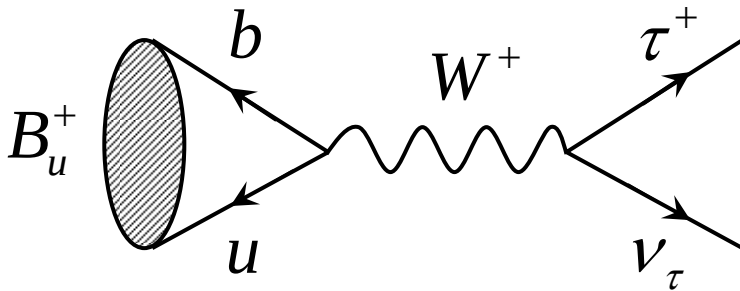
- Rapport de maximum de vraisemblance/ différence de χ^2 minimisés. Incertitudes théoriques à la RFit.
- Combinaison d'observables contrôlées théoriquement

CP A, λ $ \bar{\rho} + i\bar{\eta} $ Modules et cotés par les taux de désintégration	$ V_{ud} $	Désintégrations β (noyaux exotiques)	Towner&Hardy, PRC 77 025501 (2008)
	$ V_{us} $	Désintégrations semi-leptoniques de mésons K et B_u ($K \rightarrow \pi l \nu$, $B \rightarrow X_c l \nu$, $B \rightarrow X_d l \nu$)	Moyenne FlaviaNet: KLOE
	$ V_{ub} $		HFAG (incl.+excl. $B \rightarrow X_c l \nu$ et $B \rightarrow X_d l \nu$)
	$ V_{cb} $		
	$Br[B \rightarrow \tau \nu] (\rightarrow V_{ub})$	Désintégration leptonique de mésons B_u	Moyenne 2008 (BaBar/Belle)
	$\Delta m_d (\rightarrow V_{td})$	Mélange des mésons neutres B_d ou B_s	HFAG $B_d^0 - \bar{B}_d^0$
	$\Delta m_s (\rightarrow V_{ts})$		CDF $B_s^0 - \bar{B}_s^0$
CP $\bar{\rho}, \bar{\eta}$ Angles par la phase dans l'interférence	$ \varepsilon_K $	Asymétrie dans l'interférence mélange /désintégrations des K^0 ($K_S/K_L \rightarrow \pi\pi$)	PDG08 (KLOE, NA48, KTeV)
	α	Asymétries dépendant du temps dans l'interférence entre mélange et désintégration des B_d	Moyenne à partir de $B \rightarrow \pi\pi$, $\rho\pi$ et $\rho\rho$ (Br et asymétries HFAG: BaBar/Belle)
	β		HFAG charmonium
	γ	Interférence entre les transitions $b \rightarrow c$ et $b \rightarrow u$ dans $B^- \rightarrow D^0 K^-$ (CP directe)	Moyenne 2008 à partir de $B^- \rightarrow D^0 K^-$ (3 méthodes, moyennes exp. HFAG)

- Illustration de la problématique avec une expression simple:

$$\mathfrak{B}[M_{ij}^{\pm} \rightarrow \ell^{\pm} \nu_{\ell}] = G_F^2 \frac{m_M m_{\ell}^2}{8\pi} \left(1 - \frac{m_{\ell}^2}{m_M^2}\right)^2 f_M^2 \tau_M |V_{ij}|^2$$

Observable
Constante de désintégration (LQCD)
Elément de matrice CKM



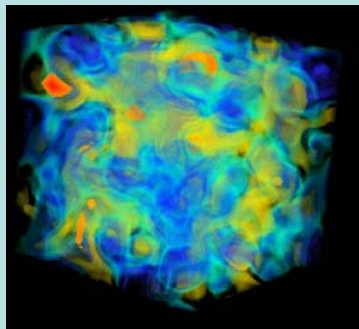
- L'observable est le rapport d'embranchement $\mathfrak{B}$.
- L'interaction forte est factorisée dans la constante de désintégration $\Rightarrow$ estimation théorique par QCD sur réseau = paramètre de nuisance.

- Intrication entre effets faibles pertinents et interaction forte pour les observables.

⇒ Effets QCD souvent factorisables en quantités évaluées numériquement sur réseau (LQCD): constant de désintégration, f_B , facteur de sac, B_B , facteur de forme, f_0 , f_+ .

- Prédictions théoriques de plus en plus précises: $\sim 2-3\%$, mais différentes techniques, résultats et estimation des systématiques selon les collaborations.

⇒ combiner les résultats: beaucoup de méthodes là aussi ☹!



LQCD: TQC avec intégrale de chemin à la Feynman évaluée numériquement en *discrétisant* le problème sur un réseau. Observable $\mathcal{O}$ à partir fonction partition Z :

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}A \hat{\mathcal{O}}[A] \det[S_f[A]]^{N_f} \exp(-S_{YM}[A])$$

Erreurs: **stat.** (MC) + **systématiques** (Taille finie, pas du réseau, modélisation, ect).

- Moyenne CKMfitter pour la prédiction réseau $\langle \mathcal{O} \rangle$ (http://ckmfitter.in2p3.fr/plots_Moriond09/ckmEval_results_Moriond09.pdf)

- 1) Préselection des prédictions selon la méthode (*unquenched 2, 2+1*)
- 2) On sépare les sources d'erreur statistiques et systématiques pour chaque prédiction.
- 3) Traitement à la RFit pour extraire la valeur centrale la plus vraisemblable de $\langle \mathcal{O} \rangle$.
- 4) On fait la moyenne quadratique des erreurs statistiques et prend une minoration pour l'erreur systématique.

⇒ La précision des prédictions LQCD contribue significativement à l'ajustement global

■ Mélange des mésons neutres = riche laboratoire pour CKM

■ Taux d'oscillation des mésons B renseigne sur $|V_{td}|$ et $|V_{ts}|$

$$\Delta m_q = \frac{G_F^2}{6\pi^2} M_W^2 M_{B_q} \hat{B}_{B_q} f_{B_q}^2 \eta_B S\left[\frac{m_t^2}{m_W^2}\right] |V_{tb} V_{tq}^*|^2$$

↑ observable ↑ LQCD ↓ CKM

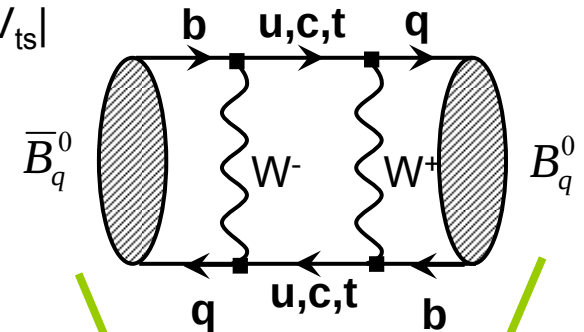
(dominé par échange de quarks top pour les mésons B)

■ Violation de CP se manifeste dans l'interférence entre le mélange et la désintégration $\Rightarrow$ Asymétrie dépendant du temps:

$$a_{f_{CP}}(t) = \frac{\Gamma[\bar{B}^0(t) \rightarrow f_{CP}] - \Gamma[B^0(t) \rightarrow f_{CP}]}{\Gamma[\bar{B}^0(t) \rightarrow f_{CP}] + \Gamma[B^0(t) \rightarrow f_{CP}]}$$

$$= C_{CP} \cos(\Delta m_q t) + S_{CP} \sin(\Delta m_q t)$$

■ Modes en Or: $C_{CP} = 0$ et $S_{CP} = \sin(2\text{Arg}[V_{tb} V_{tq}^*])$
 ex: $B_d \rightarrow J/\psi K_S \Rightarrow \sin(2\beta)$



$\bar{A}_{f_{CP}}$

$A_{f_{CP}}$

$f_{CP}(t)$

Désintégration vers un état propre commun de CP

■ Asymétrie dans le mélange des mésons K

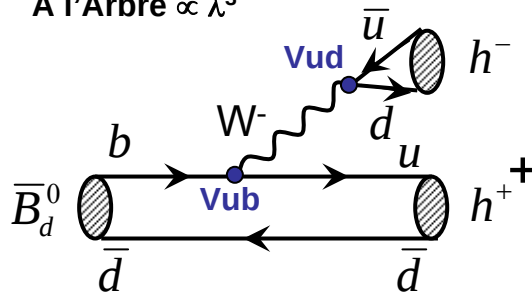
■ Asymétries dépendant du temps dans l'interférence entre le mélange des B_d et les désintégrations $b \rightarrow u$: $B_d \rightarrow \pi\pi, \rho\pi, \rho\rho$

Pollution par modes pingouins:

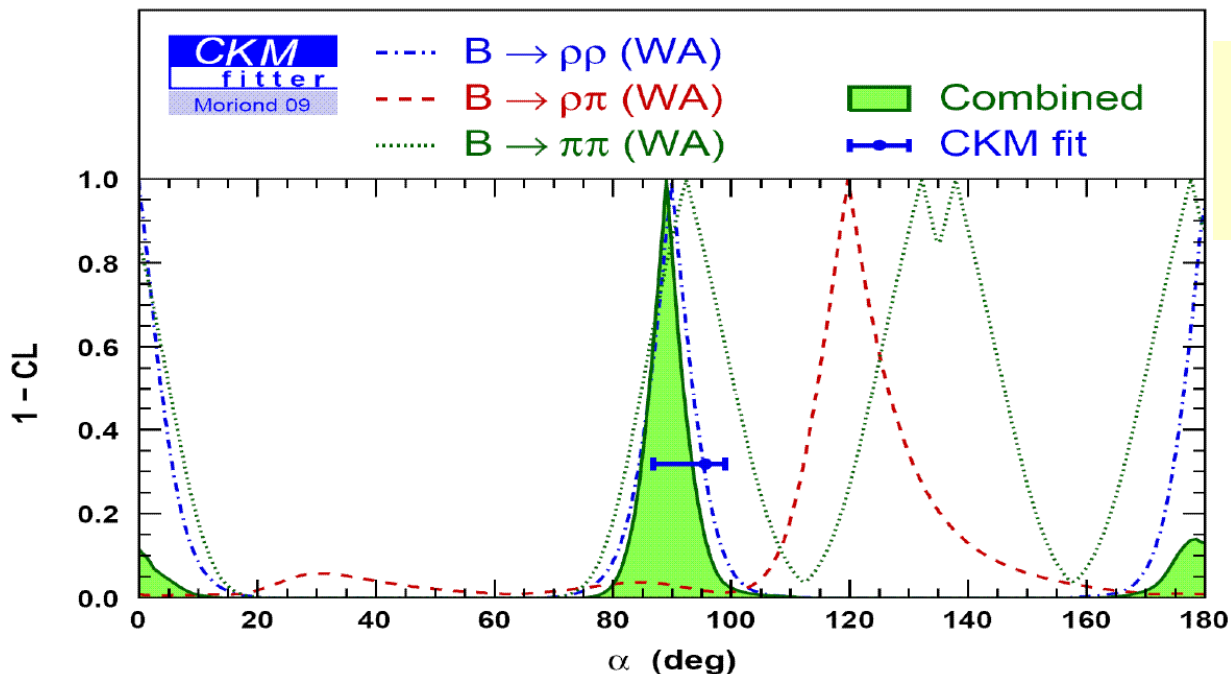
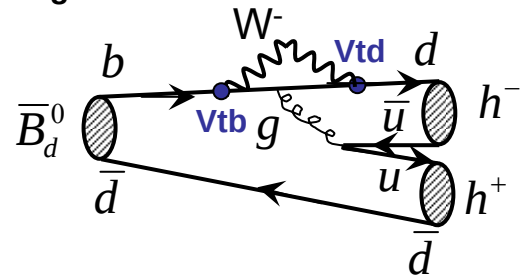
$$A[\bar{B}_d^0 \rightarrow h^+ h^-] = V_{ub} V_{ud}^* T + V_{tb} V_{td}^* P$$

$\Rightarrow \sin(2\alpha - 2\Delta\alpha)$
on extrait α et $\Delta\alpha$ de $\mathfrak{B}$ et asymétries avec hyp. supplémentaire SU(2); [Gronau & London PRL65, 3381 (1990)]

À l'Arbre $\propto \lambda^3$



Pingouin $\propto \lambda^3$



Solutions dégénérées, mais la combinaison des contraintes $\pi\pi, \rho\pi$ et $\rho\rho$ permet une bonne détermination de α (dominée par $\rho\rho$)

$$\alpha = (89.0^{+4.4}_{-4.2})^\circ$$

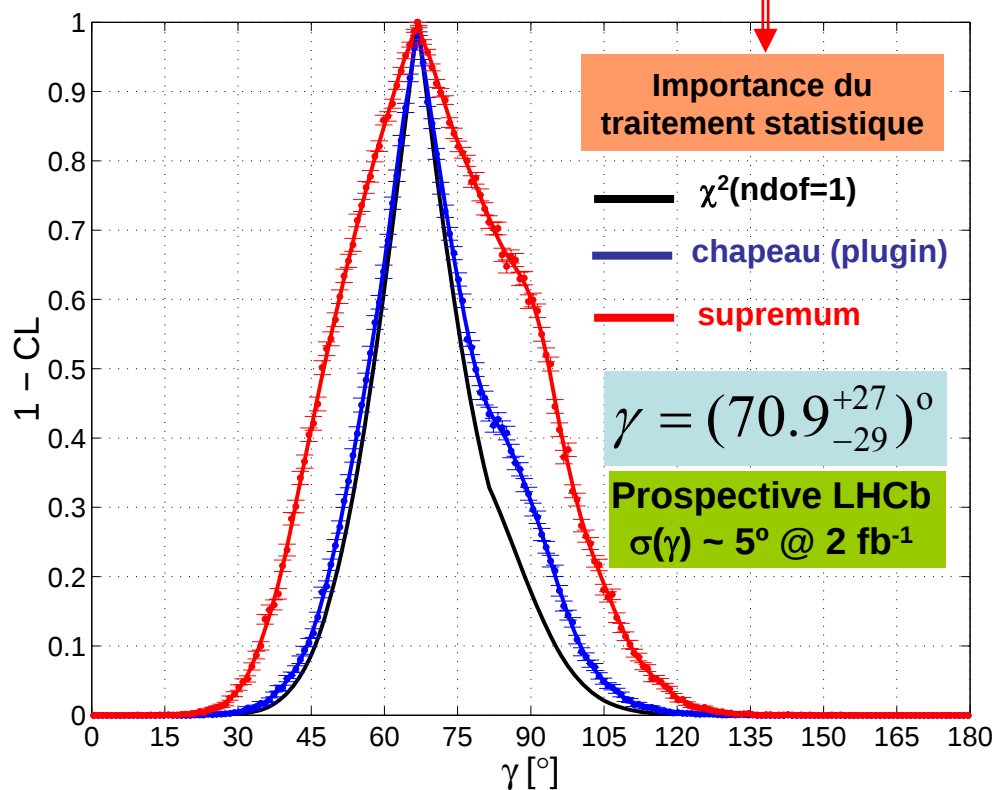
α est maintenant une mesure précise @ 5%
 β est mesuré @ 4.2%
 $\sin(2\beta) = 0.671 \pm 0.023$ [HFAG]

L'Angle γ

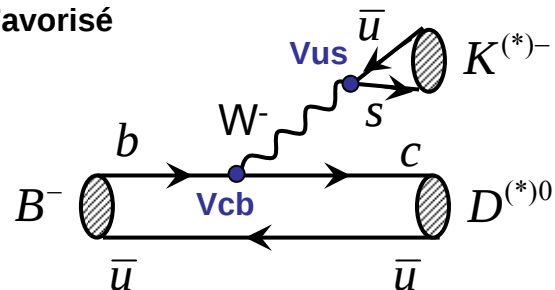
- Mesure de l'angle γ par violation de CP directe: interférence entre processus $b \rightarrow c$ et $b \rightarrow u$ avec même état final $\tilde{D}^{(*)0} K^{(*)-}$ ($\tilde{D}^0 \equiv [D^0 \text{ ou } \bar{D}^0]$) / Mesures limitées par la stat. $\Rightarrow$ LHCb
- Suppression de couleur: $\sim 0.1-0.2$

$$\frac{A_{ub}}{A_{cb}} = r_B e^{i(\delta_B - \gamma)}$$

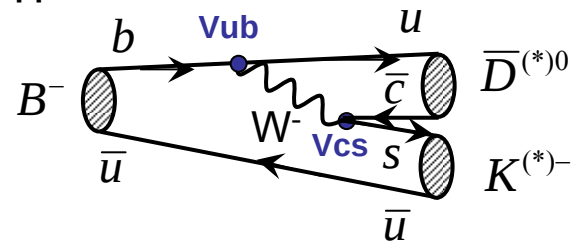
Différentes méthodes;
Ex. ajustement global
analyse Dalitz



Favorisé



Supprimé



Phase forte Phase faible

Ajustement Globale du TU

Observables

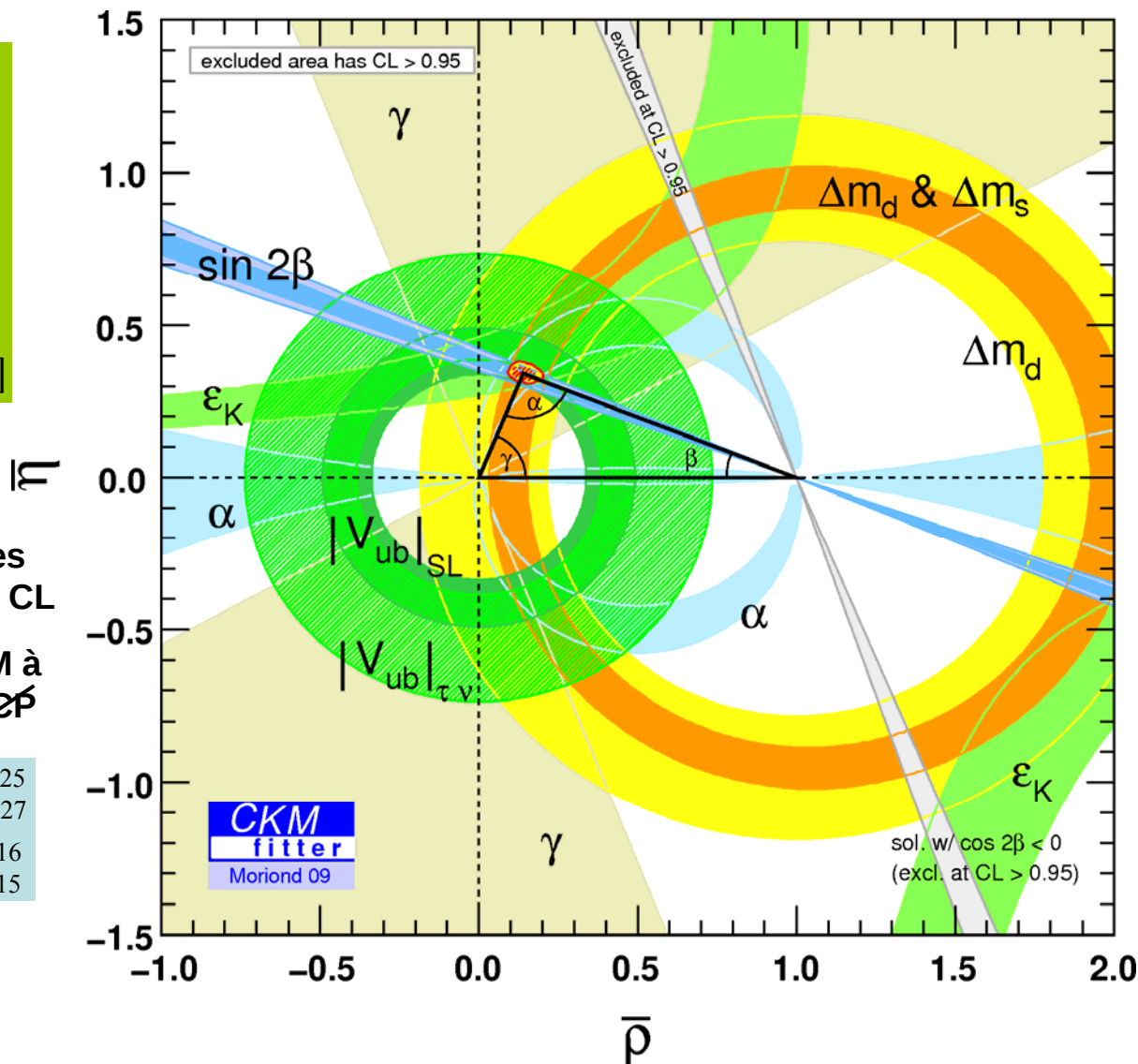
$$\begin{aligned} &|V_{ud}|, |V_{us}| \\ &|V_{cb}|, |V_{ub}| \\ &\mathcal{B}[B \rightarrow \tau \nu] \\ &\Delta m_d, \Delta m_s \\ &|\varepsilon_K| \\ &[\alpha], \sin(2\beta), [\gamma] \end{aligned}$$

Cohérence des
mesures à 95% CL

Mécanisme KM à
l'œuvre pour $\overline{\rho}$

$$\overline{\rho} = 0.139^{+0.025}_{-0.027}$$

$$\overline{\eta} = 0.341^{+0.016}_{-0.015}$$



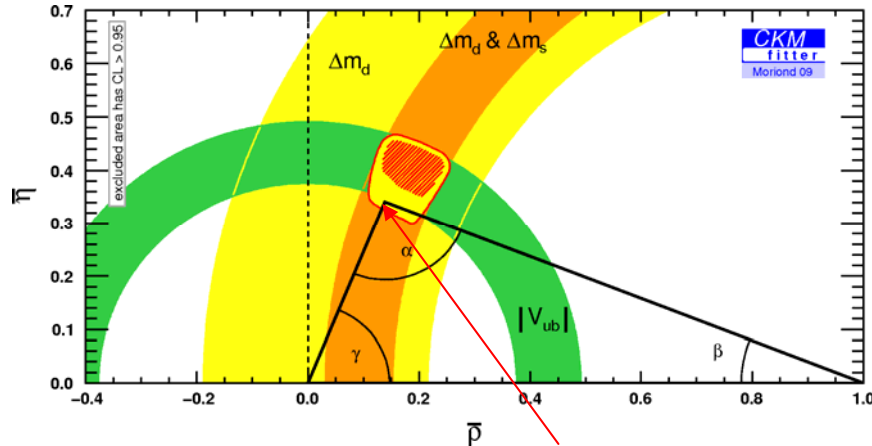
p-value

$\sim$
45%



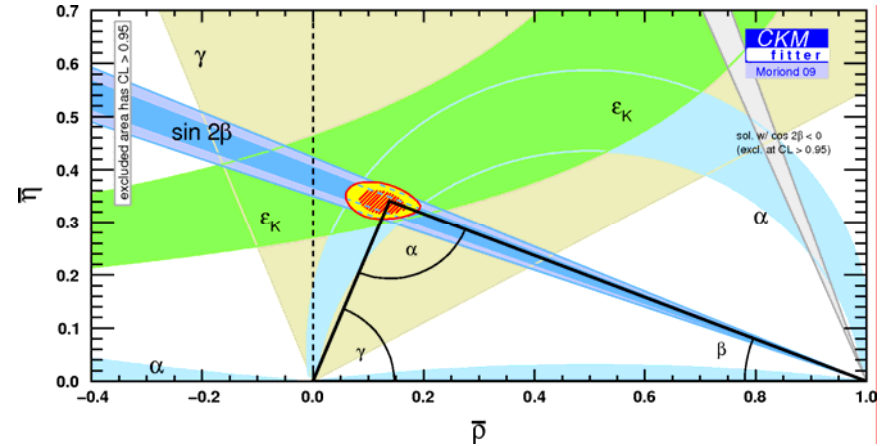
Ajustement Global: Différents Observables

CP: $|V_{ub}|, \mathcal{B}[B \rightarrow \tau \nu], \Delta m_d, \Delta m_s$

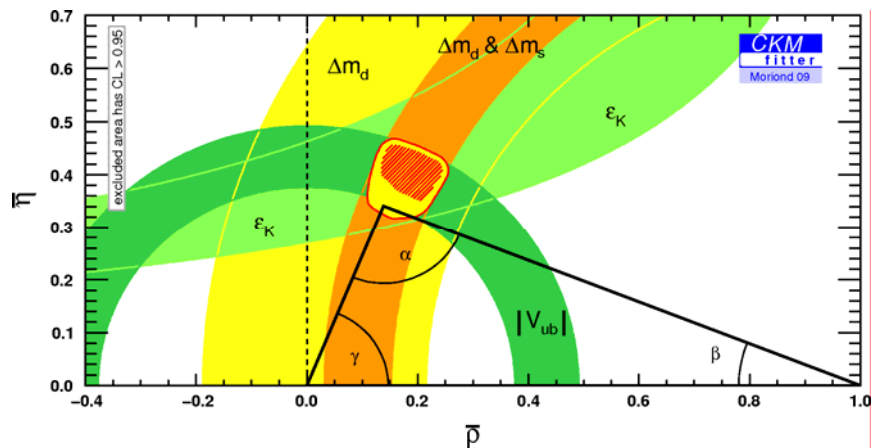


tension de $\sim 2.4 \sigma$ entre $\sin(2\beta)$ et $B \rightarrow \tau \nu$ (via $|V_{ub}|$)

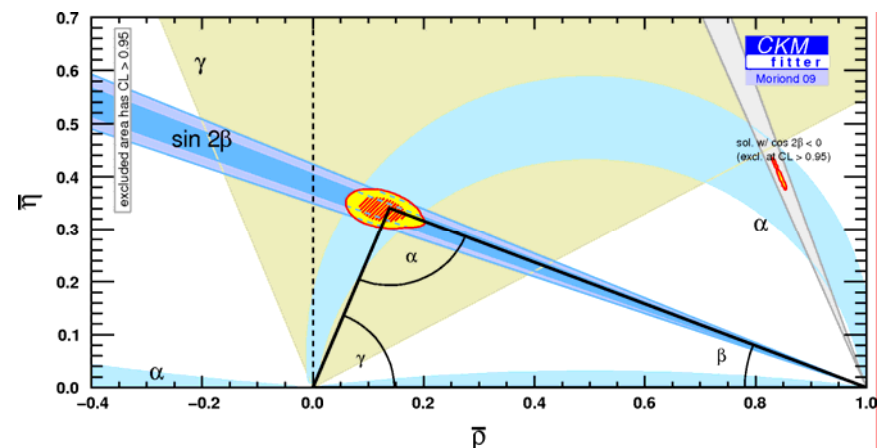
$\not{\text{CP}}$: $|\varepsilon_K|, [\alpha], \sin(2\beta), [\gamma]$



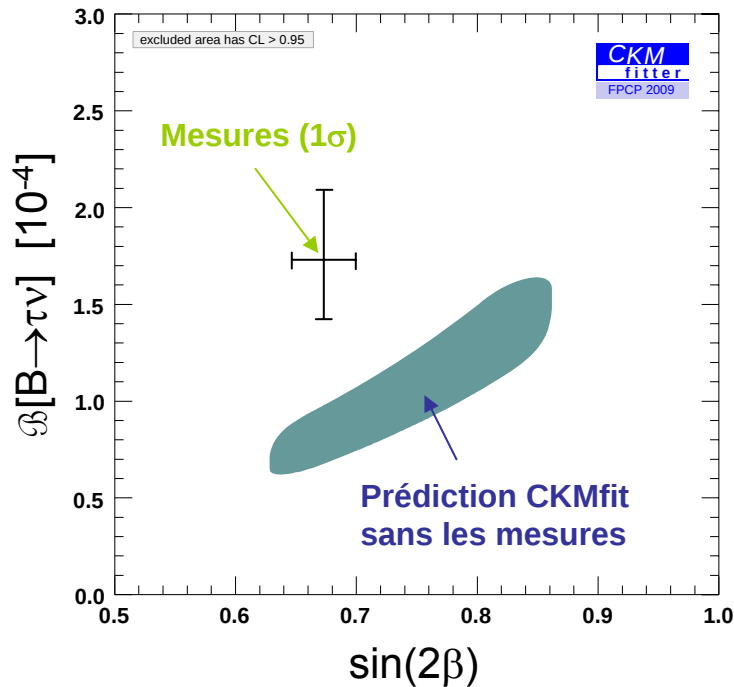
cotés: $|V_{ub}|, \mathcal{B}[B \rightarrow \tau \nu], \Delta m_d, \Delta m_s, |\varepsilon_K|$



angles: $[\alpha], \sin(2\beta), [\gamma]$



Tension entre $\sin(2\beta)$ et $\mathcal{B}[B \rightarrow \tau \nu]$



Origine de la tension ?

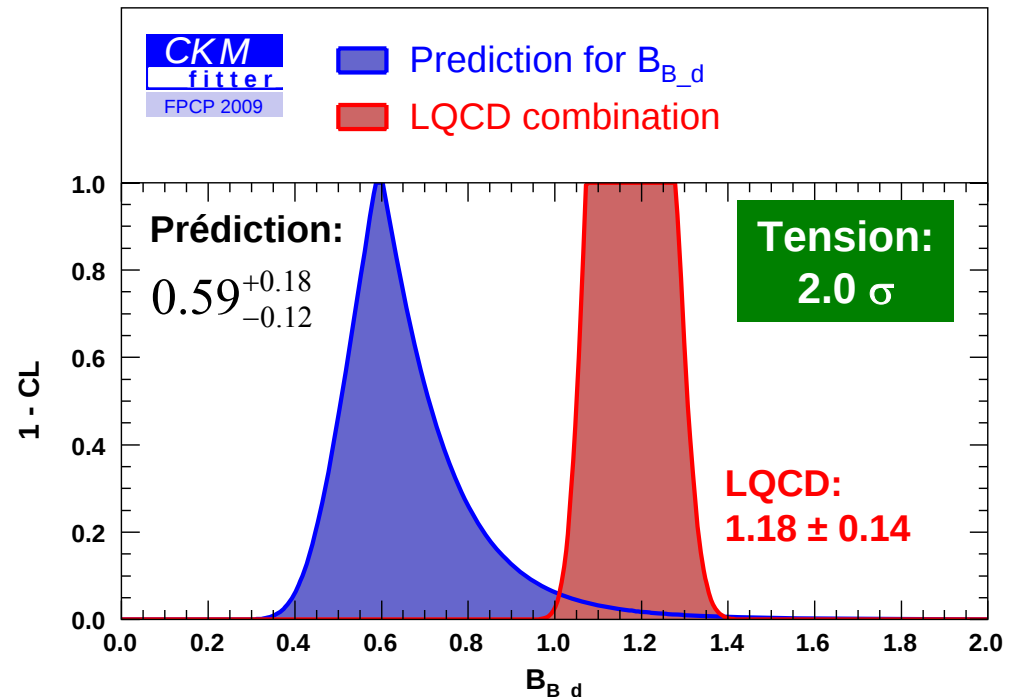
Problème de mesure?
conspiration LQCD?

⇒ pas dominé par $|V_{ub}|$, f_B ou $|\epsilon_K|$

Indice de Nouvelle Physique?

Prédiction du paramètre de sac B_B à partir de $\mathcal{B}[B \rightarrow \tau \nu]$ et Δm_d : on élimine la dépendance à la constante de désintégration f_B calculée sur réseau:

$$\frac{\mathcal{B}[B \rightarrow \tau \nu]}{\Delta m_d} = \frac{3\pi}{4} \frac{m_\tau^2 \tau_B}{m_W^2 S[x_t]} \left(1 - \frac{m_\tau^2}{m_B^2}\right) \frac{\sin^2(\beta)}{\sin^2(\gamma)} \frac{1}{|V_{ud}|^2 B_{B_d}}$$



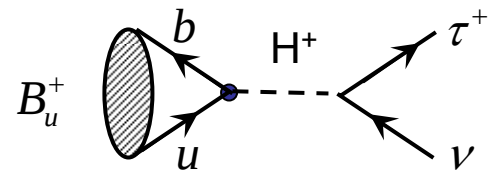
III) Modèle à Deux Doublets de Higgs

- 2HDM (Two Higgs Doublet Model): extension du modèle standard à **deux doublets de Higgs ϕ_1 et ϕ_2** . En plus des polarisations des bosons $W^\pm$ et Z^0 on génère:
 $\Rightarrow$ 3 Higgs neutres: h^0 (léger), H^0 (lourd) et A^0 et **2 Higgs chargés: $H^\pm$**
- Ici modèle dit de **Type II** (2HDM(II)): ϕ_1 se couple aux quarks de type 'up' et ϕ_2 aux quarks de type 'down'. **Reproduit la structure en saveur du Modèle Standard**:
 $\Rightarrow$ Absence de changements de saveur par courant neutre à l'arbre (FCNC), mais nouveaux courants chargés par échange de $H^\pm \sim W^\pm$.
- **Deux nouveaux paramètres**: $M_{H^\pm}, \tan(\beta) = v_2 / v_1$ avec corrections à l'arbre ou en boucle par 'substitution' $H^\pm \rightarrow W^\pm$ (ex: $B \rightarrow \tau \nu$ ☺). Couplage en $\tan(\beta) / M_{H^\pm}$ (up like) et $1 / M_{H^\pm}$ (down like).
 $\Rightarrow$ On retrouve le modèle standard dans la **limite de découplage**: $m_{H^\pm}^2 \gg m_Z^2$.

- Les modèles supersymétriques tels que le **MSSM** demandent un deuxième doublet de Higgs qui a une phénoménologie de **Type II à l'arbre**. Par ailleurs de $m_{H^\pm}$ et β on peut alors déduire les masses des 3 Higgs neutres. En particulier dans la **limite de découplage**, à l'arbre:

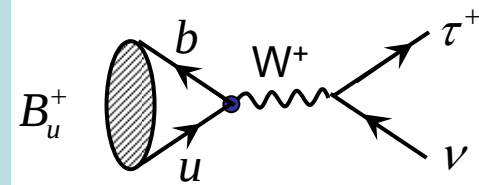
$$M_A \approx M_H \approx M_{H^\pm} \gg M_Z \quad \text{et} \quad M_h \approx M_Z$$

- **Cas simple:** les contributions H_+ modifient le rapport d'embranchement par un terme multiplicatif, selon:



$$\mathcal{B}[M \rightarrow l \nu] = \mathcal{B}[M \rightarrow l \nu]_{MS} (1 + r_{H^+})^2$$

$$r_{H^+} = \left(\frac{m_{q_u} - m_{q_d} \tan^2(\beta)}{m_{q_u} + m_{q_d}} \right) \left(\frac{m_M}{m_{H^+}} \right)^2$$



⇒ Pas directement affecté par la suppression d'hélicité : **r_{H^+} ne dépend pas de m_ℓ !**

- 2 cas remarquables si $\mathcal{B}[M \rightarrow l \nu]_{obs} \approx \mathcal{B}[M \rightarrow l \nu]_{MS}$:

$r_H \approx 0, m_{H^+} \gg m_M$ **solution de découplage**

$r_H \approx -2$ **ajustement fin** impliquant une corrélation entre m_{H^+} et $\tan(\beta)$ dépendant de la masse du méson considéré.

■ Sélection d'observables standard affectés par des contributions $H^\pm$

A l'arbre: couplage en $m_{\text{Mésion}}/m_{H^\pm}$

⇒ **Désintégrations purement leptoniques:**
Pas de suppression d'hélicité des effets $H^\pm$!

$$\Gamma[K \rightarrow \mu\nu]/\Gamma[\pi \rightarrow \mu\nu], \mathcal{B}[D \rightarrow \mu\nu], \\ \mathcal{B}[D_s \rightarrow \mu\nu], \mathcal{B}[D_s \rightarrow \tau\nu] \text{ et } \mathcal{B}[B \rightarrow \tau\nu]$$

⇒ **Désintégrations semi-leptoniques:**
 $H^\pm$ dans facteur forme scalaire uniquement + suppression d'hélicité

$$\mathcal{B}[B \rightarrow D\tau\nu]/\mathcal{B}[B \rightarrow De\nu], \\ \mathcal{B}[K \rightarrow \pi\mu\nu]/\mathcal{B}[K \rightarrow \pi e\nu]$$

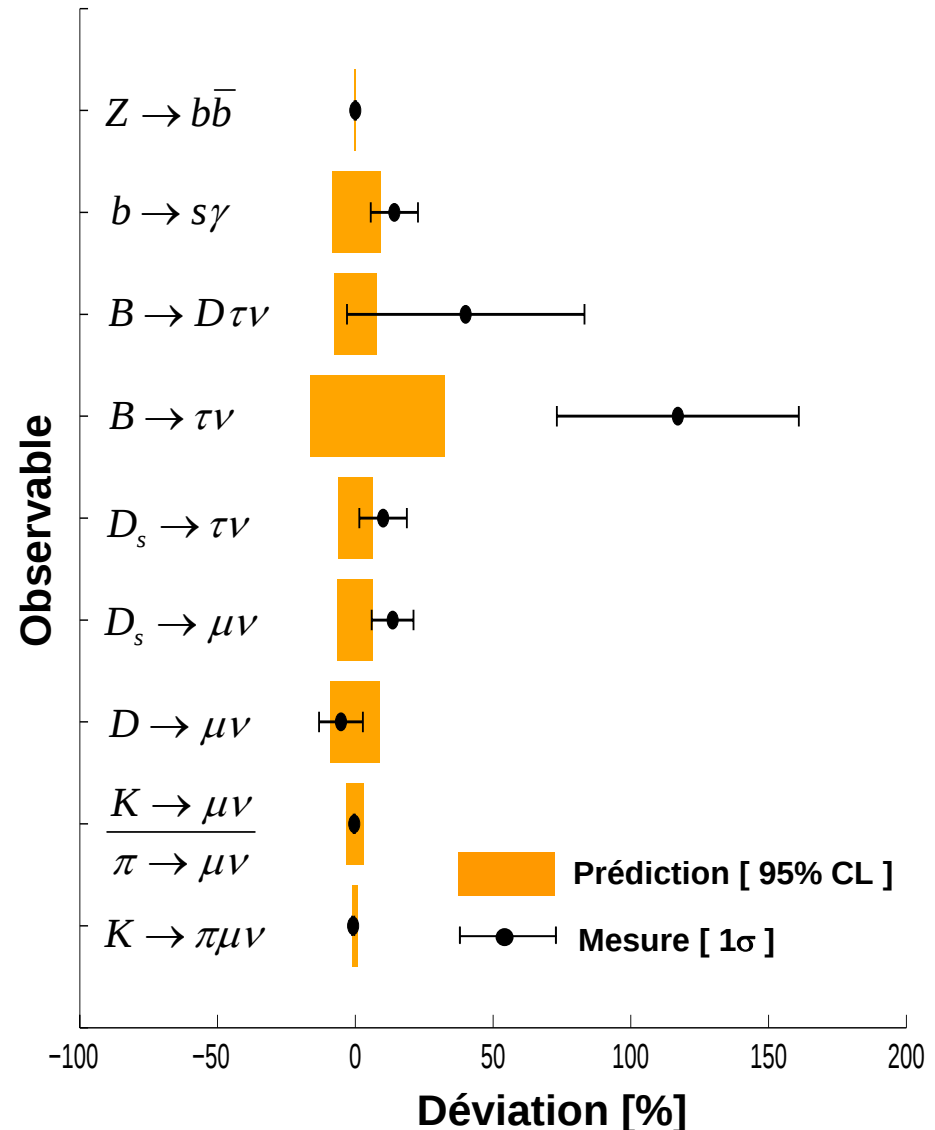
En boucle: couplage en $m_t/m_{H^\pm}$

⇒ **Largeur partielle de $Z \rightarrow b\bar{b}$:**
Largement étudié comme indicateur de NP

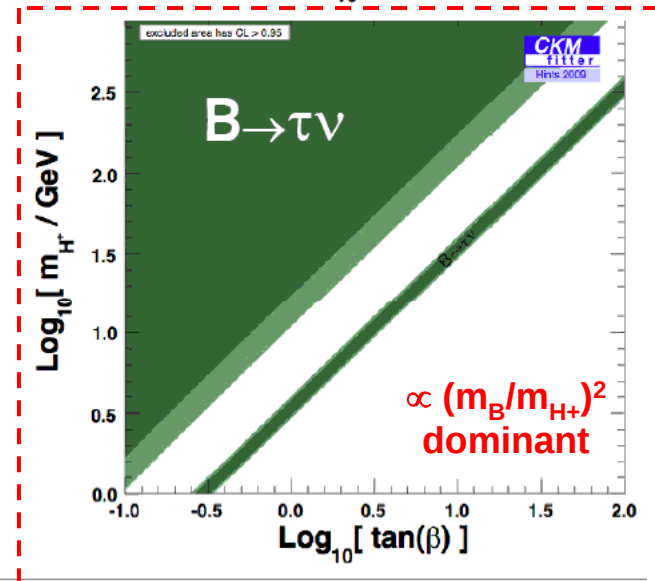
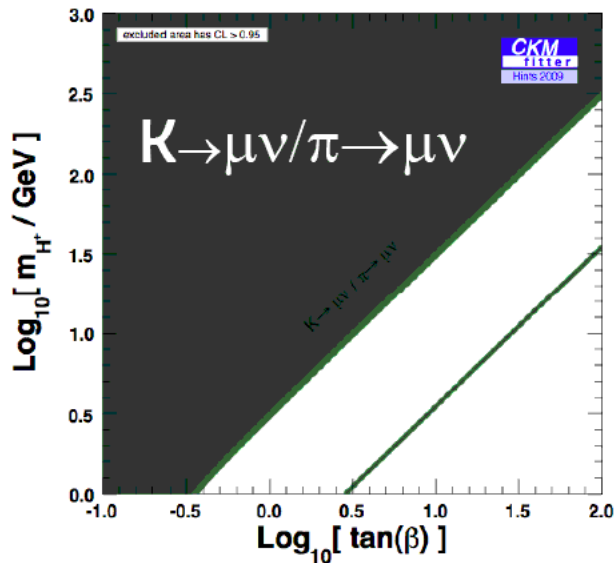
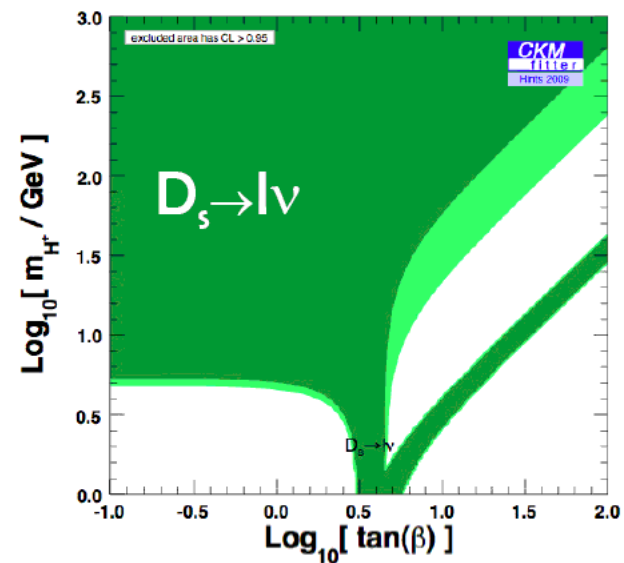
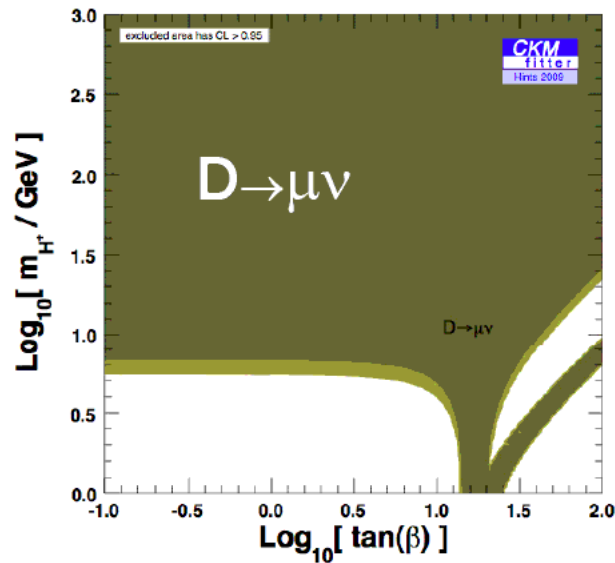
$$\Gamma[Z \rightarrow b\bar{b}]/\Gamma[Z \rightarrow \text{hadrons}]$$

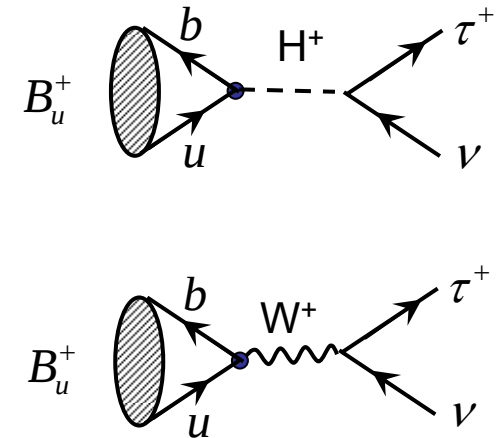
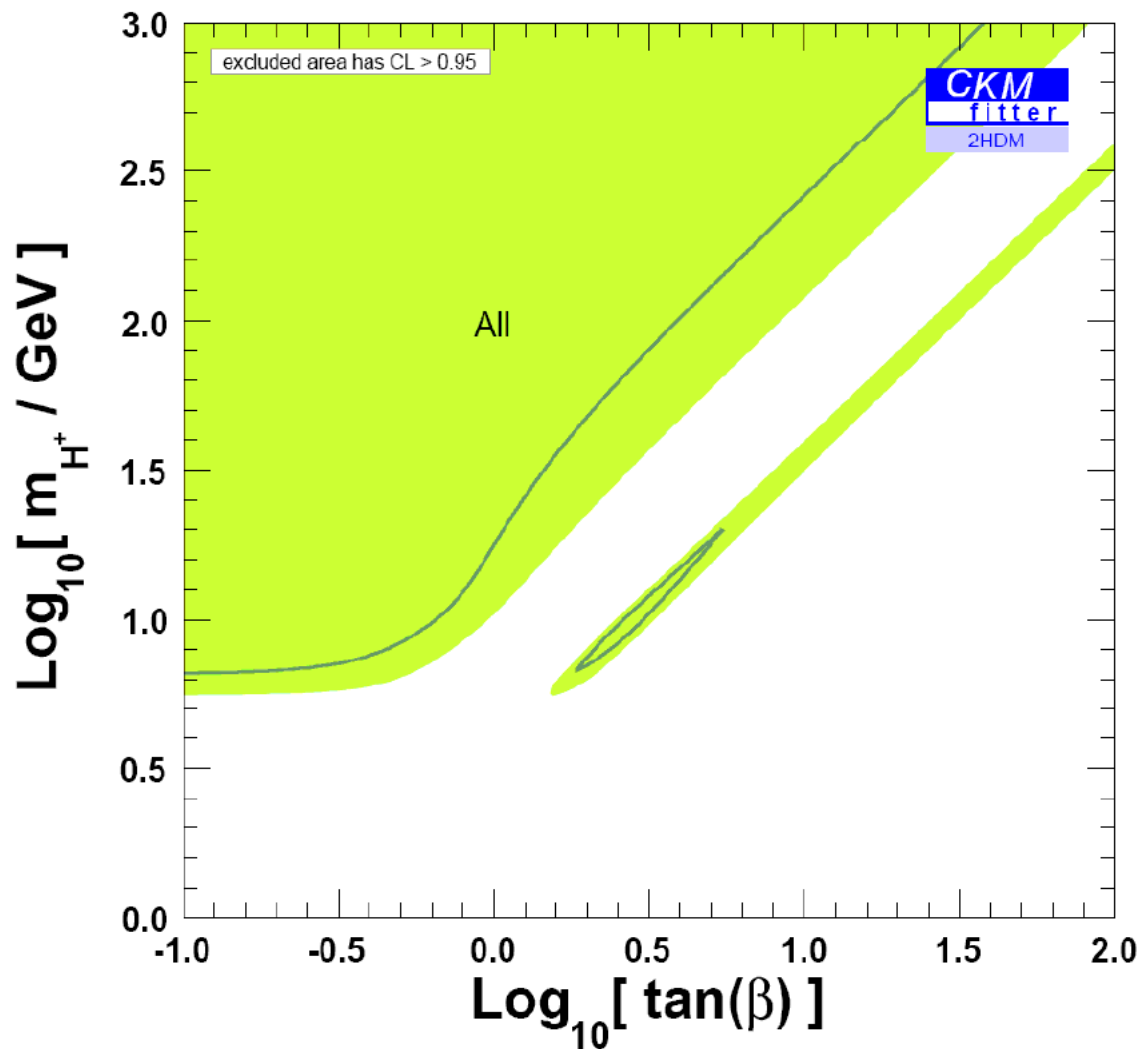
⇒ **Désintégration radiatives $b \rightarrow s\gamma$**
Prédiction théorique @ NNLO!

$$\mathcal{B}[\bar{B} \rightarrow X_s\gamma]/\mathcal{B}[\bar{B} \rightarrow X_\ell\ell\nu]$$



Désintégrations Leptoniques



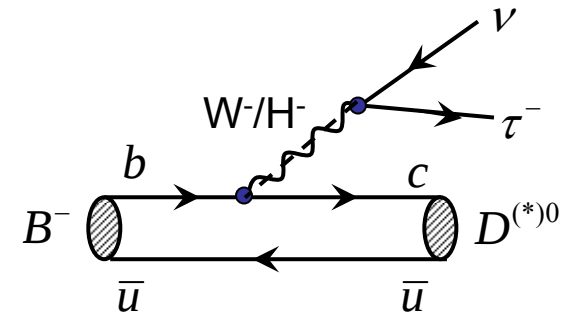
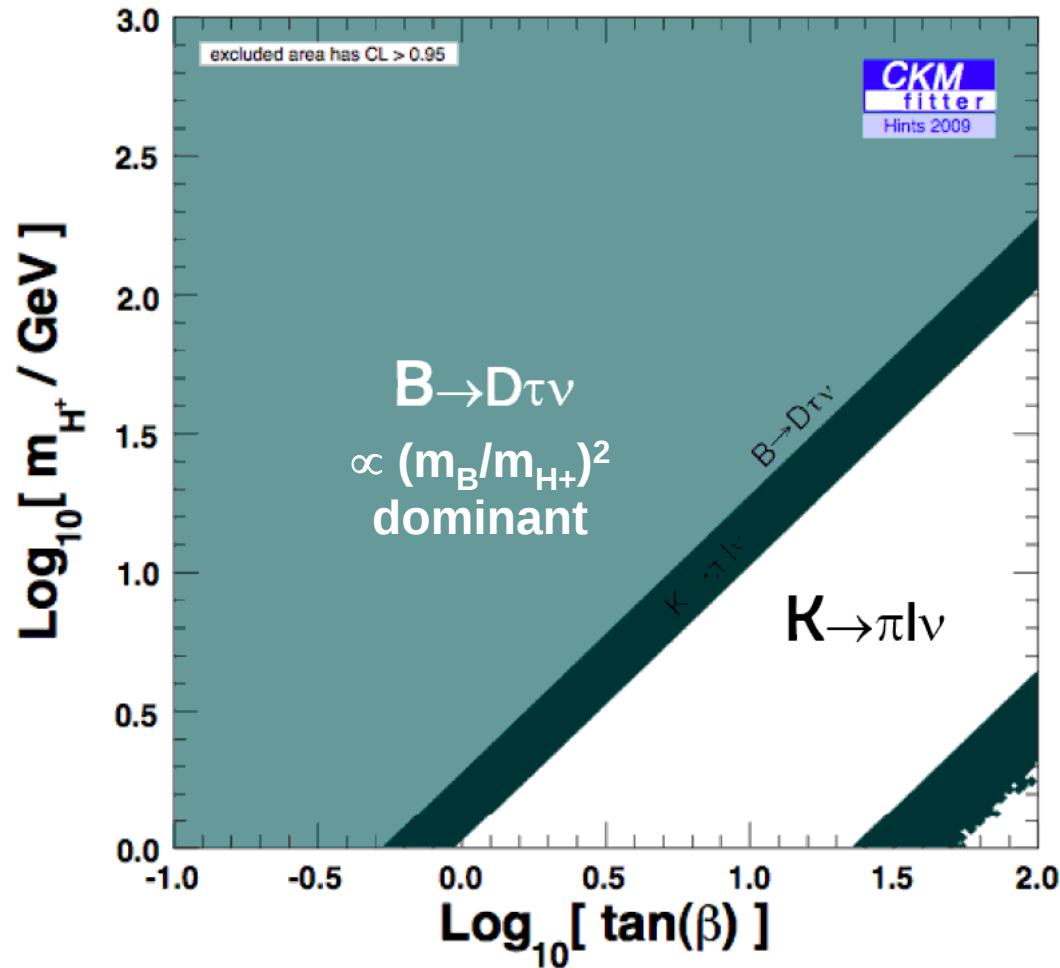


Exclusion sur:

$$\frac{m_{H^+}}{\tan(\beta)} \geq 12.9 \text{ GeV} \quad [95\%]$$

Solution de découplage,
dominée par $B \rightarrow \tau \nu$

Limite la plus contraignante
à grand $\tan(\beta)$



Prédiction théorique plus complexe:

- 1) Facteur scalaire, sensible à H^+ mais suppression d'hélicité
- 2) Facteur vectoriel, non sensible à H^+ , pas de suppression d'hélicité

$B \rightarrow D \tau \nu$ dominant, mais pas compétitif pour l'instant $\Rightarrow$ limité par précision expérimentale

- Contributions H^+ en boucle $\sim m_t/m_{H^+}$ et ne dépendant pas de $\tan(\beta) > 1$
 $\Rightarrow$ **Forte contrainte sur m_{H^+}**

- Mais ... prédiction théorique complexe: calculs NLO puis NNLO contribuent significativement à la prédiction MS: Misiak *et al.*, Phys.Rev.Lett. **98**, 022002 (2007)



- Rapport de branchement normalisé selon:

$$R_{b \rightarrow s \gamma} = \frac{Br(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)}{Br(\bar{B} \rightarrow X_c e \bar{\nu})} = \left| \frac{V_{ts}^* V_{tb}}{V_{cb}} \right|^2 \frac{6\alpha_{em}}{\pi C} (P + N)$$

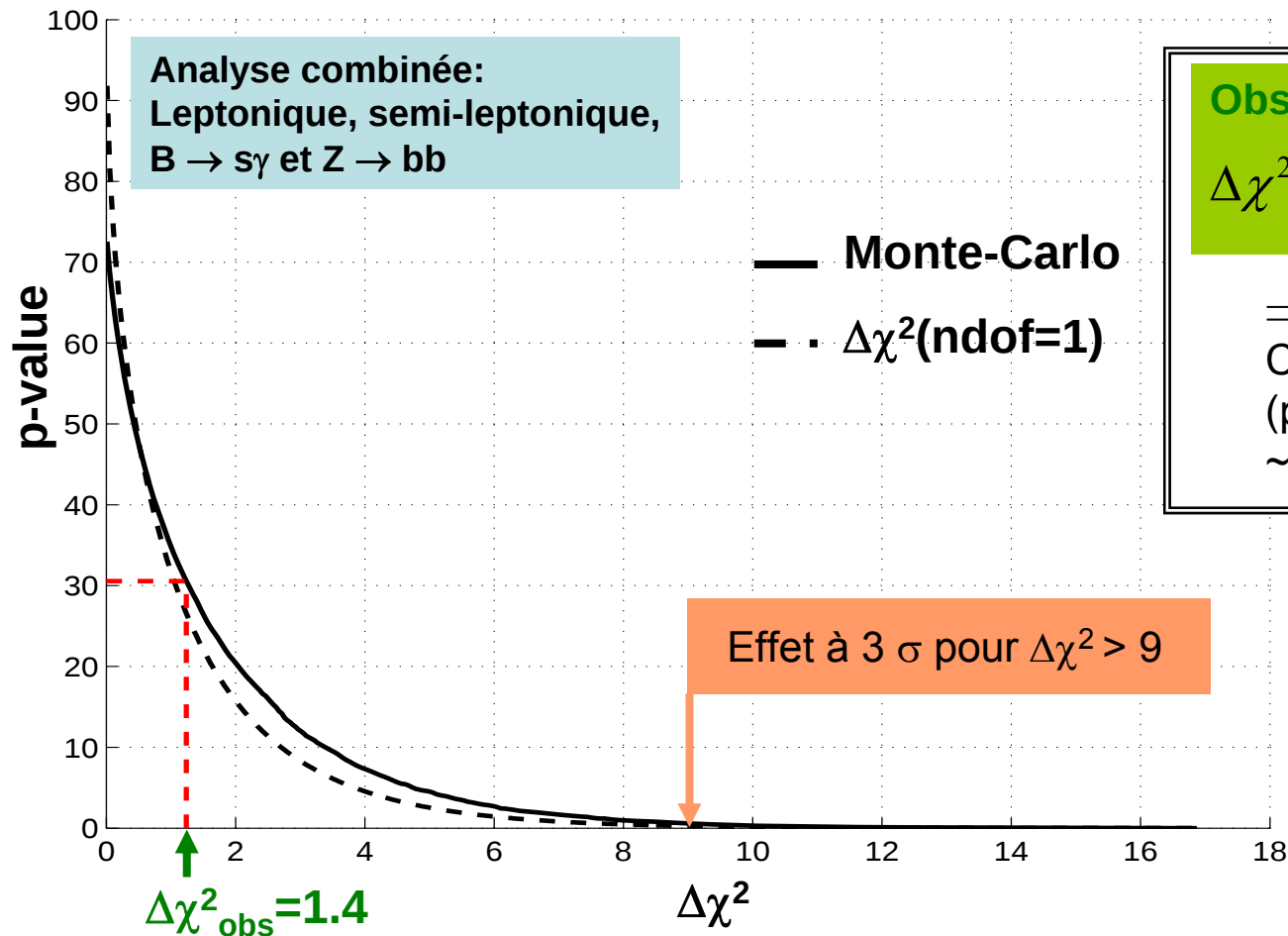
- Paramétrisation de $P+N$ à partir des résultats de [SusyBSG](#) (arXiv:0712.3265) selon:

$$P + N = (C_{7,MS}^{eff,(0)} + A C_{7,H^+}^{eff,(0)})^2 + B$$

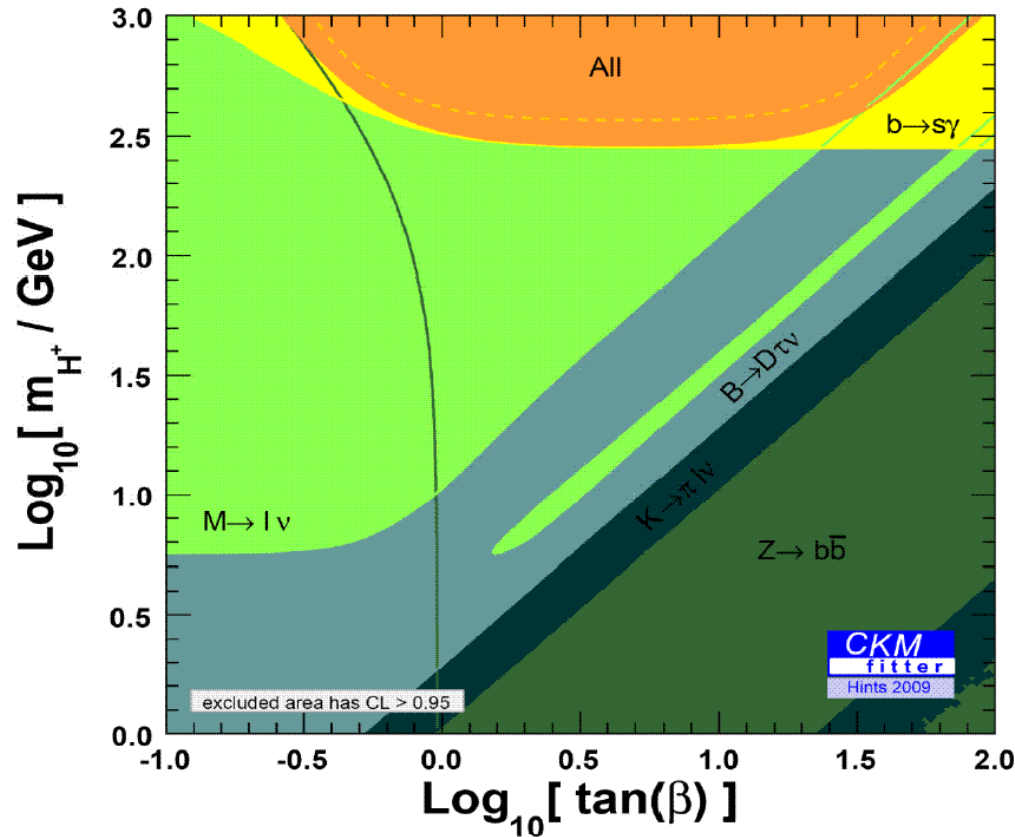
Avec A et B fonctions dépendant des paramètres clefs du calcul: m_t , m_b et m_c .
 $\Rightarrow$ 15 % de variation sur la limite @ 95% CL sur m_{H^+} selon la barre d'erreur théorique attribuée à m_c ...

- 2HDM: mêmes observables que MS mais 2 paramètres en plus, reproduit MS dans limite de découplage:

⇒ 2HDM ne peut que faire mieux que MS, mais? Amélioration significative?



Ajustement Global de $M_H - \tan(\beta)$



■ **Rb** est contraignant à petit $\tan(\beta)$ < 1 uniquement; exclu par LEP dans MSSM

■ Contrainte quasi 1D dominée par **B $\rightarrow$ s γ**

$$m_{H^+} \geq 303 \text{ GeV} \quad [95\% \text{ CL}]$$

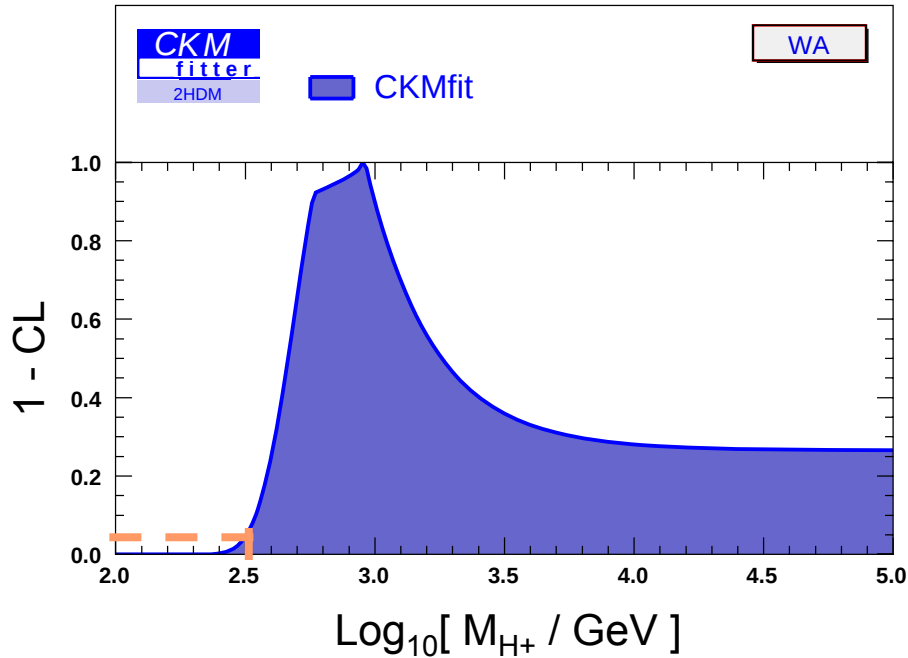
par Monte-Carlo (plugin) -Préliminaire-

■ **B $\rightarrow$ $\tau \nu$** domine à grand **$\tan(\beta)$ > 30**; contrainte 1D sur $m_{H^+}/\tan(\beta)$

$$\frac{m_{H^+}}{\tan(\beta)} \geq 12.9 \text{ GeV} \quad [95\% \text{ CL}]$$

2HDM(II) est acculé dans sa solution de découplage

Limites sur M_{H+} ou $\tan(\beta)$



Limite sur M_{H+} :

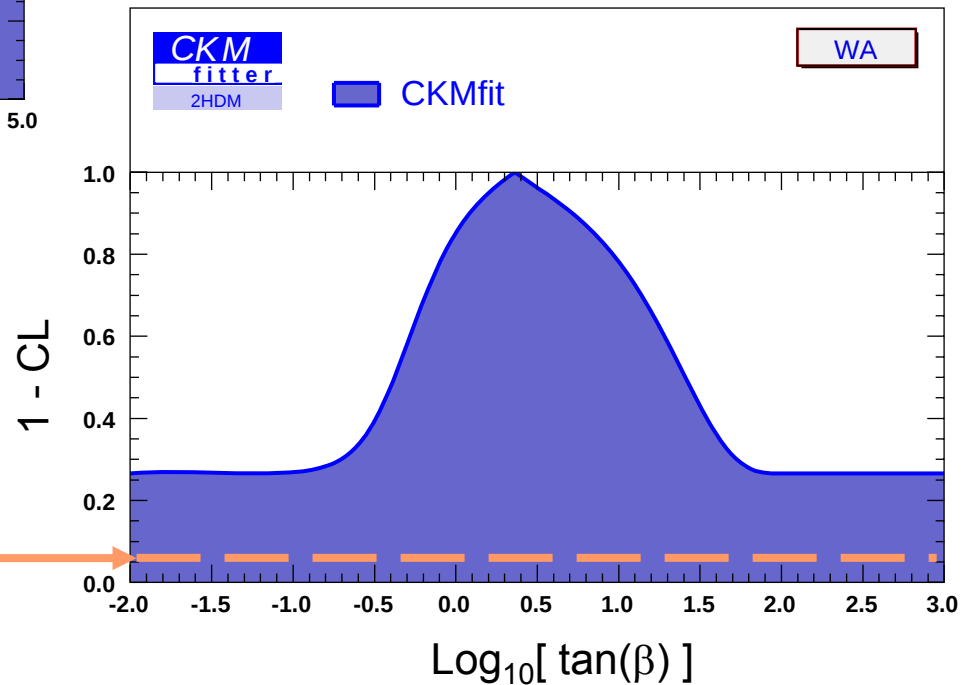
$$m_{H+} \geq 303 \text{ GeV} \quad [95\% \text{ CL}]$$

par Monte-Carlo (plugin) –Préliminaire–

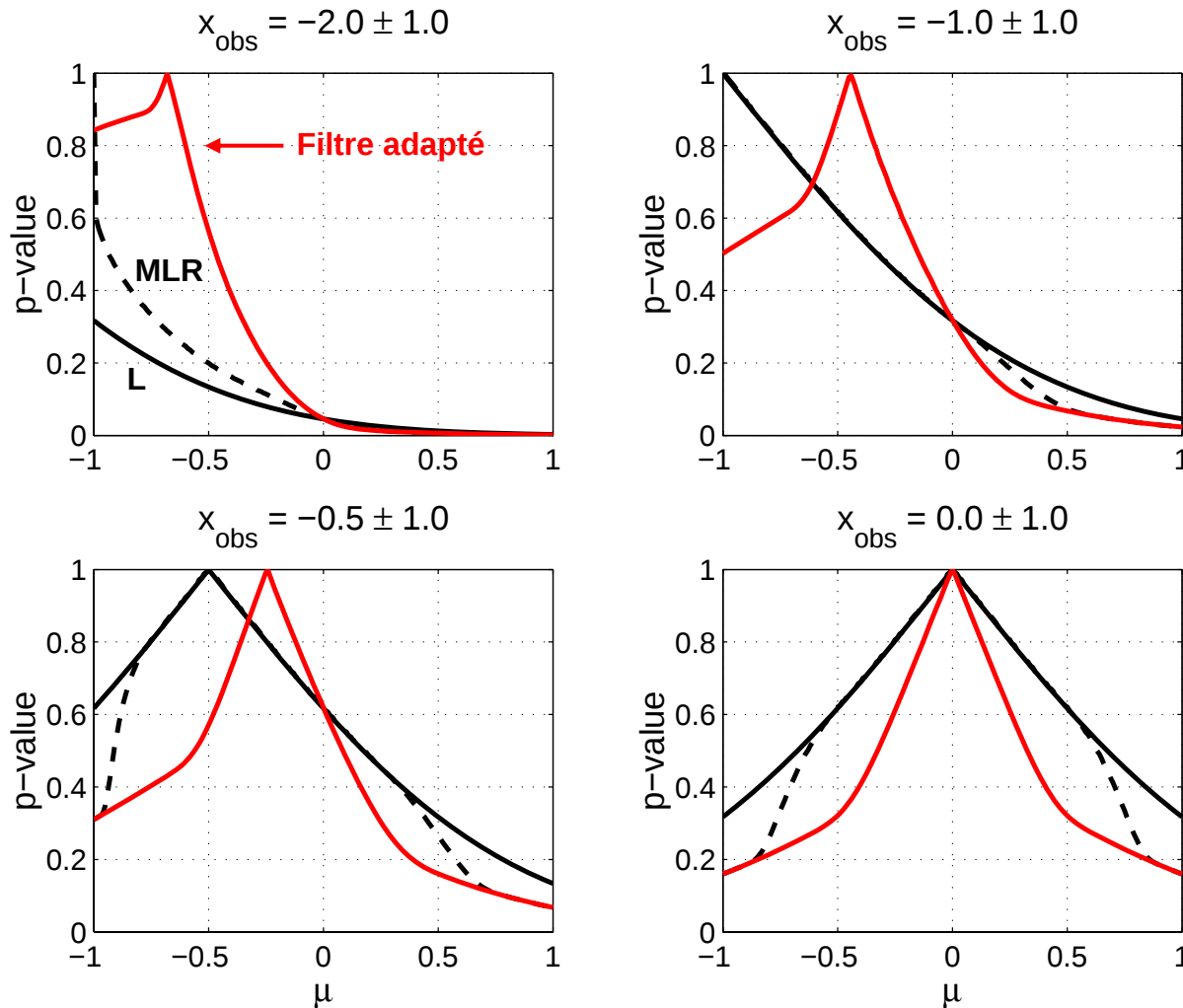
Mais limite indirecte:

$\Rightarrow$ effet $\sim 15\%$ avec précision attribuée à m_c

Pas de contrainte sur $\tan(\beta)$
@ 95% CL



Annexes



A grand niveau de confiance ($\geq 2\sigma$) le filtre adapté et le MLR conduisent au même résultat. Le filtre adapté tend à être plus puissant à $\sim 1\sigma$.

Déterminer μ borné dans $[0; +\infty[$

Loi de probabilité discrète:

$$p(n; \mu) = \frac{(\mu + b)^n}{n!} \exp(-(\mu + b))$$

Bruit, b , connu

Ordonnement selon MLR

$$\frac{\Delta\chi^2}{2} = \begin{cases} \mu - n \ln(1 + \frac{\mu}{b}) & \text{si } n < b \\ (\mu + b - n) + n \ln(\frac{n}{\mu + b}) & \text{sinon} \end{cases}$$

Fonction convexe

Limites du domaine T

$$n_{\min}(\mu, t) = \begin{cases} (\mu + b)G^{-1}(\frac{t/2}{\mu + b}) & \text{si } 0 \leq \frac{t}{2} < \mu - b \ln(1 + \frac{\mu}{b}) \\ \frac{\mu - t/2}{\ln(1 + \mu/b)} & \text{si } \mu - b \ln(1 + \frac{\mu}{b}) \leq \frac{t}{2} < \mu \\ 0 & \text{si } \mu \leq \frac{t}{2} \end{cases}$$

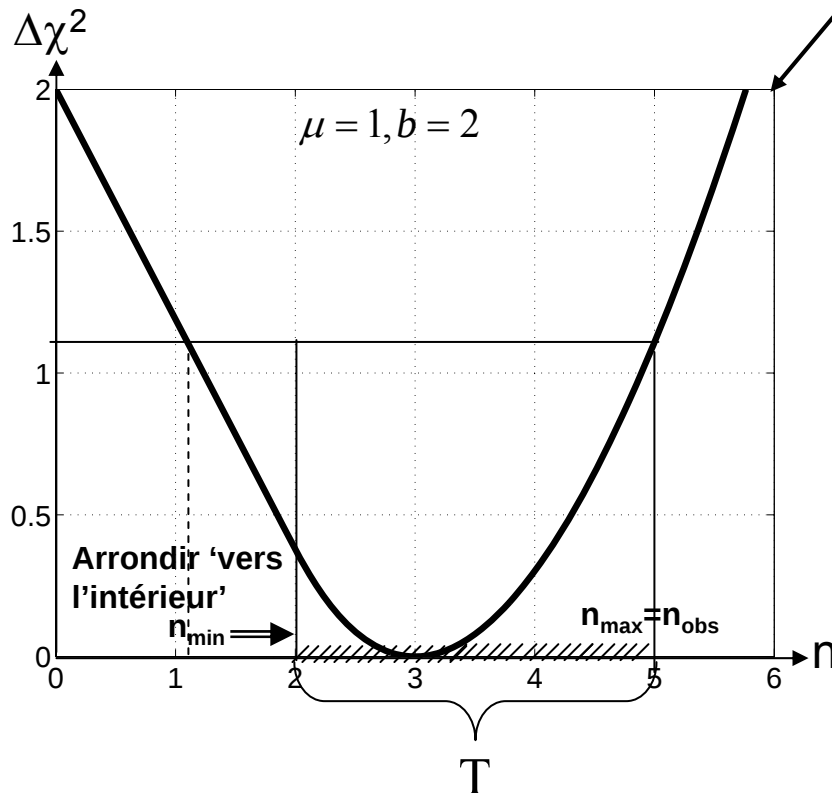
avec $G(x) = 1 - x + x \ln(x)$

$$n_{\max}(\mu, t) = \frac{\mu + b}{F^{-1}(\frac{t/2}{t/2 + (\mu + b)})}$$

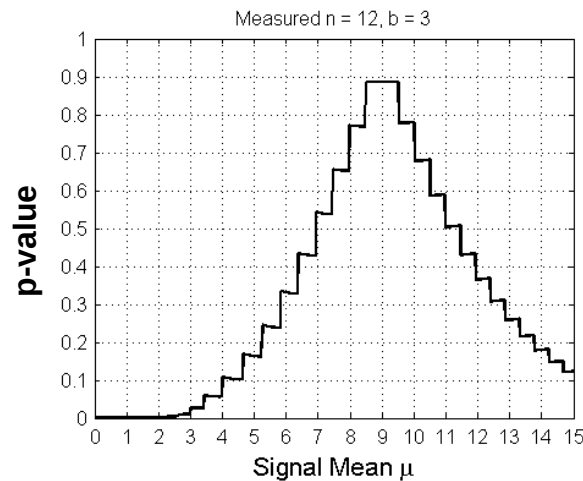
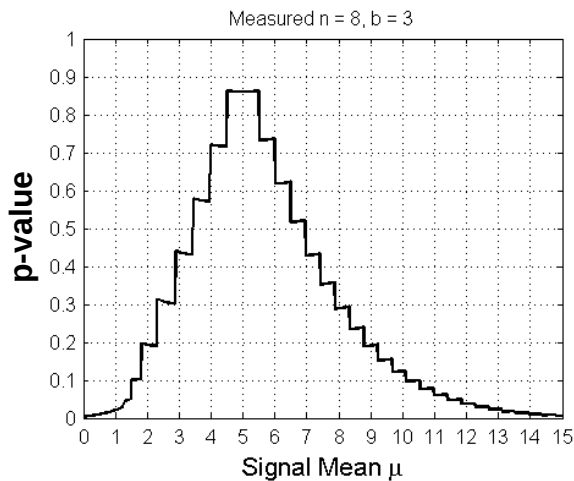
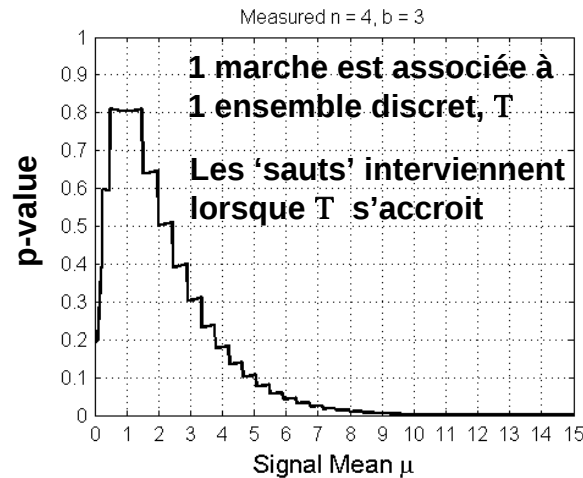
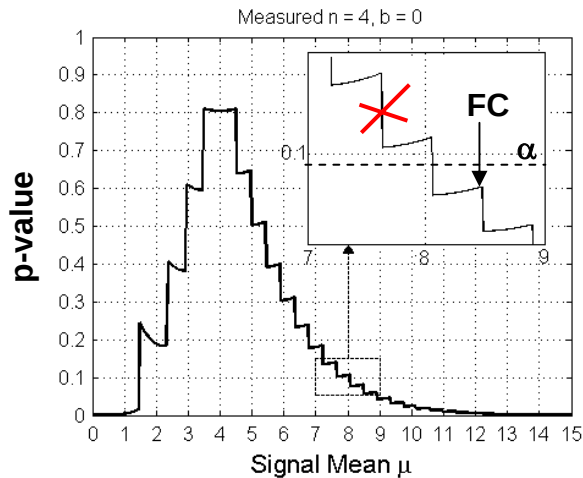
avec $F(x) = 1 - \frac{x}{2x - 1 - \ln(x)}$

$n_{\min}$ ou $n_{\max}$
coïncide avec
l'observation

F^{-1} and G^{-1} sont
bien approximées
par des
polynômes
d'ordre 2 en
 $\sqrt{x}, \sqrt{1-x}$



Loi de Poisson : p -value

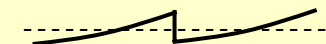


La p -value est segmentée:

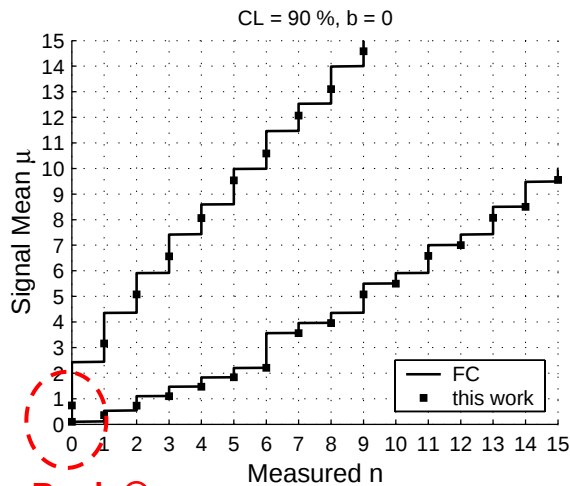
$$p(\mu) = 1 - \sum_{n \in \Sigma(t_{obs})} p(n; \mu)$$

2 pathologies:

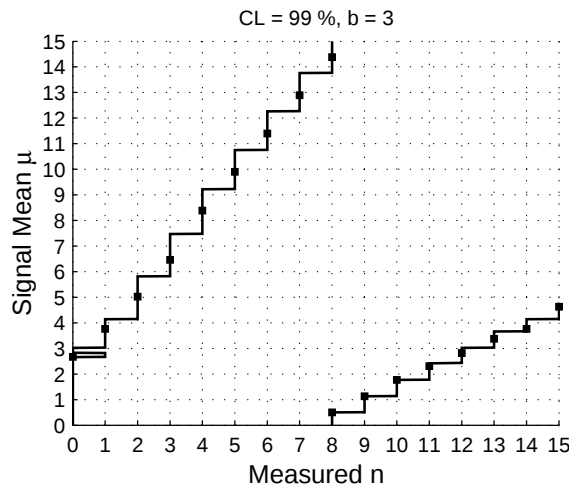
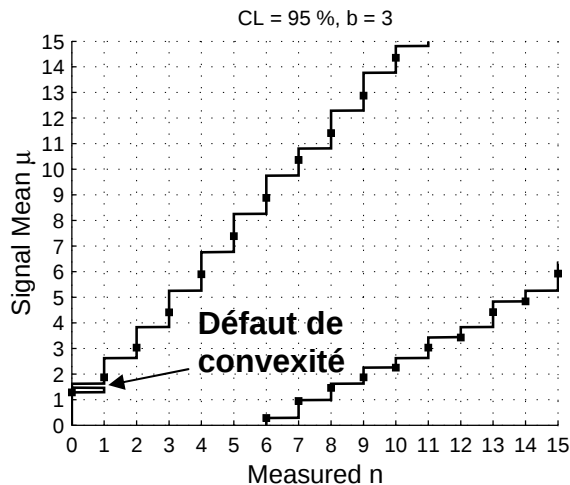
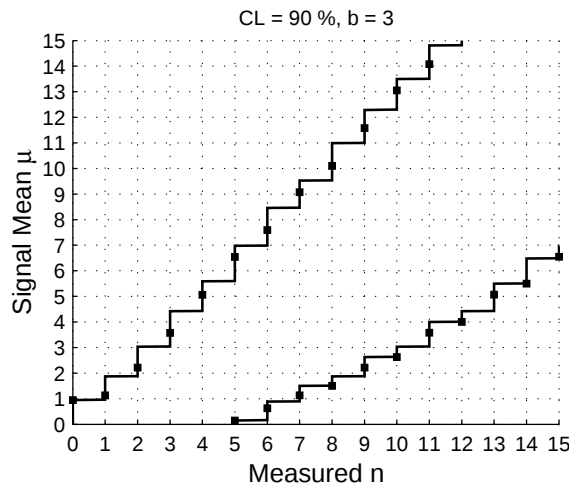
• Discontinuités: 
(T croît par morceaux)
 $\Rightarrow \alpha$ est mal définie

• Défauts de convexité:

 $\Rightarrow$ Les intervalles de confiance ont des 'trous'!

*Ambigüité sur la définition de l'intervalle de confiance ...
'over-coverage' à la FC? Interpolation?*



Bouh ☹



L'interpolation des p-value permet une interpolation des intervalles de confiance de FC

Si les intervalles obtenus par les deux méthodes diffèrent significativement il y a quelque chose de pathologique avec la valeur de α demandée ... Mieux vaudrait prendre une autre valeur ...

Les petits b, n_{obs} sont pathologiques

Voir les résultats de FC:

G.J. Feldman and R.D. Cousins, Phys. Rev. D 57(7) (1998)

• Soit N_{toy} expériences Monte-Carlo indépendantes dont le résultat est $n_i = \{0; 1\}$. On observe le résultat total K distribué selon:

$$K = \sum_{i=1}^{N_{toy}} n_i, \quad n_i = \begin{cases} 0 & : \text{probabilité } 1-p_1 \quad (t_i \leq t_{obs}) \\ 1 & : \text{probabilité } p_1 \quad (t_i > t_{obs}) \end{cases}$$

⇒ On veut déterminer la valeur vraie de p_1 , ex: fréquence d'un bruit après coupure, efficacité au signal, ect ...

• 1^{ère} Méthode: on estime p à partir de: $\lim_{N_{toy} \rightarrow \infty} \left(\frac{K}{N_{toy}} \right) = p_1$

• K suit une distribution Binomiale avec: $\frac{\langle K \rangle}{N_{toy}} = p_1$ et $\frac{\sigma_K}{N_{toy}} = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{N_{toy}}}$

$$\Rightarrow p_1 \approx \frac{k_{obs}}{N_{toy}} \text{ et } \sigma_{p_1} \approx \frac{1}{N_{toy}} \sigma_K [p_1 \leftarrow \frac{k_{obs}}{N_{toy}}]$$

Validité? Comportement pathologique pour k_{obs} petit ou proche de N_{toy}

- 2^{ème} Méthode: On donne un intervalle de confiance pour le paramètre p , étant donné l'observation globale Monte-Carlo k_{obs} et étant connu la densité de probabilité:

$$p_{N_{toy}}(K = k) = \frac{N_{toy}!}{k!(N_{toy} - k)!} p_1^k (1 - p_1)^{N_{toy} - k}$$

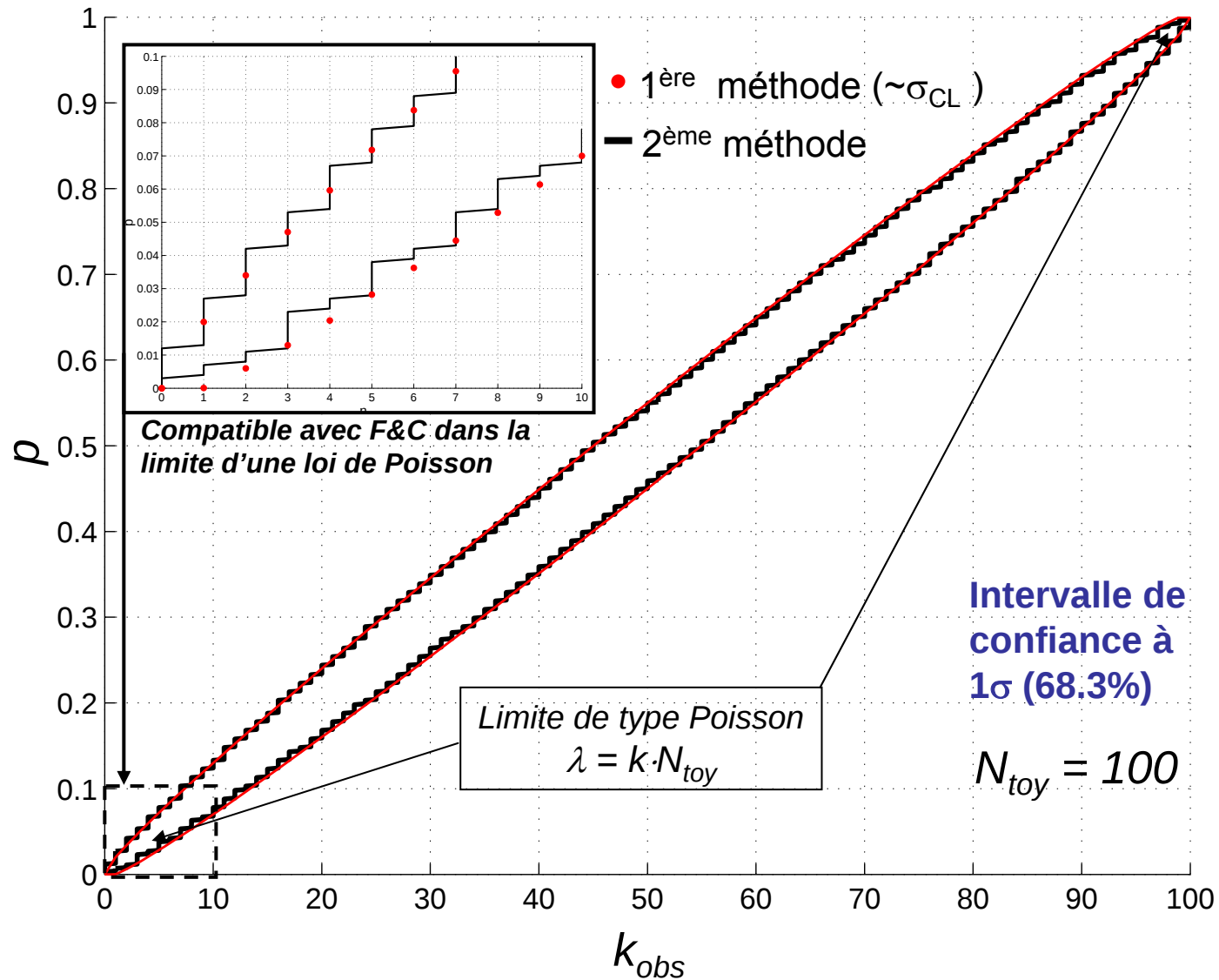
- On utilise un ordonnancement du type MLR et on construit l'intervalle de confiance avec:

$$T = -\ln \left(\frac{p_{N_{toy}}}{\sup_{p_1}(p_{N_{toy}})} \right) = \tilde{p} \ln \left(\frac{\tilde{p}}{p_1} \right) + (1 - \tilde{p}) \ln \left(\frac{1 - \tilde{p}}{1 - p_1} \right), \quad \tilde{p} = \frac{k}{N_{toy}}$$

$\Rightarrow$ Robuste aux bornes / k_{obs} petit ou proche de N_{toy}

- Construction numérique ici: Ordonner les valeurs de $p_{N_{toy}}$ selon $\Delta\chi^2$ et les additionner jusqu'à atteindre un niveau de confiance de 1σ :

$$1 - \sum_{k=T}^{\{0, N_{toy}\}} p_{N_{toy}}(k) \geq 68.3\%$$



L'observable x , centrée sur le paramètre d'intérêt μ , est la somme d'une erreur Gaussienne centrée d'écart type σ et d'une erreur systématique Δ_x dans $[-\Delta; \Delta]$, considérée comme un paramètre nuisible. Soit: $x = \mu + \sigma N[0,1] + \Delta_x$

Densité de probabilité:

$$p(x; \mu + \Delta_x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu - \Delta_x)^2}{2\sigma^2}\right)$$

σ connu

Ordonnancement selon MLR

$$\Delta\chi^2 = \min_{\Delta_x}(\chi^2) - \min_{\Delta_x, \mu}(\chi^2) = \begin{cases} 0 & \text{si } x - \mu \in [-\Delta; \Delta] \\ (|x - \mu| - \Delta)^2 / \sigma^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Attention, $\Delta\chi^2$ ne dépend pas explicitement de Δ_x par construction mais sa distribution statistique et la p-value en dépendent:

$$\text{p-value} = \int_{T(x_{\text{obs}})} p(x; \mu + \Delta_x) dx =$$

$$\begin{cases} 1 & \text{si } x - \mu \in [-\Delta; \Delta] \\ \frac{1}{2} \left(\text{erfc}\left[\frac{|x_{\text{obs}} - \mu| + \Delta_x}{\sqrt{2}\sigma}\right] + \text{erfc}\left[\frac{|x_{\text{obs}} - \mu| - \Delta_x}{\sqrt{2}\sigma}\right] \right) & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $T(x_{\text{obs}}) = \{x; \Delta\chi^2(x; \mu) < \Delta\chi^2_{\text{obs}}\}$

Attention au choix fait ici d'une **inégalité stricte**.

Dans ce cas de figure simple le **supremum** est toujours réalisé pour $\Delta_x = \pm\Delta$

