

# Fonctionnelles relativistes de la densité pour l'étude du noyau atomique

Kilian Fraboulet

Soutenance de stage sous la direction  
de *Jean-Paul Ebran* et *Elias Khan*

20 juin 2018



## Objectifs du stage

- 3 familles principales d'approches microscopiques pour traiter le problème à N corps nucléaire :
  - Approches ab initio
  - Modèle en couches
  - **Approches de type énergie fonctionnelle de la densité (EDF)**

## Objectifs du stage

- 3 familles principales d'approches microscopiques pour traiter le problème à N corps nucléaire :
  - Approches ab initio
  - Modèle en couches
  - **Approches de type énergie fonctionnelle de la densité (EDF)**
- 3 caractéristiques des EDF violant le principe d'exclusion de Pauli :
  - L'EDF prend une forme différente pour traiter les corrélations nucléoniques normales et d'appariement
  - **L'EDF contient des termes de contact**
  - **L'EDF résulte d'une interaction dépendant explicitement de la densité de nucléons**

## Objectifs du stage

- 3 familles principales d'approches microscopiques pour traiter le problème à N corps nucléaire :
  - Approches ab initio
  - Modèle en couches
  - **Approches de type énergie fonctionnelle de la densité (EDF)**
- 3 caractéristiques des EDF violant le principe d'exclusion de Pauli :
  - L'EDF prend une forme différente pour traiter les corrélations nucléoniques normales et d'appariement
  - **L'EDF contient des termes de contact**
  - **L'EDF résulte d'une interaction dépendant explicitement de la densité de nucléons**
- 2 objectifs :
  - Construire une EDF affranchie de **2 caractéristiques indésirables**
  - Traitement numérique des équations résultant de l'EDF construite

- 1 De la QCD vers un modèle nucléaire
  - Théorie effective des champs
  - Théorie effective des champs chirale
  - Théorie du champ moyen relativiste
  
- 2 Application à l'étude de la phénoménologie nucléaire
  - Notion de symétrie pseudo-spin
  - Technique de résolution numérique des équations du champ moyen relativiste
  - Etude du décalage isotopique du plomb

# Partie formelle

De la QCD vers un modèle nucléaire

# Théorie effective des champs

- **Contexte d'application** d'une théorie effective des champs (EFT) :
  - **Existence** d'une **théorie**  $\mathcal{T}$  bien connue à une échelle d'énergie  $\mathcal{E}$
  - **Difficultés** pour calculer des observables à partir de la **théorie**  $\mathcal{T}$  à une échelle d'énergie  $\mathcal{E}' \neq \mathcal{E}$
- **Définition** d'une EFT :

Méthode systématique permettant de construire un lagrangien effectif de la **théorie**  $\mathcal{T}$  à l'échelle d'énergie  $\mathcal{E}'$
- **Utilité** d'une EFT dans le cas présent :
  - **Existence** de la **QCD** acceptée comme la théorie fondamentale de l'interaction forte
  - **Difficultés** pour calculer des observables nucléaires à partir de la **QCD** à cause de son comportement **non perturbatif** à l'échelle d'énergie de la physique nucléaire
- L'EFT réalisée lors de ce stage est appelée **théorie effective des champs chirale** ( $\chi$ EFT)

## Théorie effective des champs chirale (1/3)

Etape ① de la  $\chi$ EFT : identifier les symétries et les degrés de liberté du lagrangien effectif

- Symétries de la QCD (à 2 saveurs légères) :

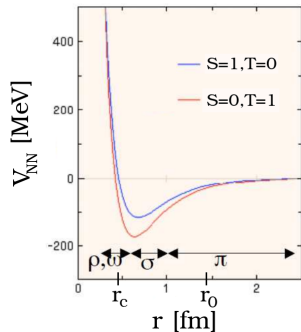
- Symétrie de jauge  $SU(3)_{\text{coul}}$
- Covariance
- Symétries discrètes  $C$ ,  $P$  et  $T$
- **Symétrie chirale**  $U(2)_R \times U(2)_L$

- Degrés de liberté pertinents en physique nucléaire ( $\neq$  quarks) :

- Nucléon
- Pion ( $J^\pi = 0^-, T = 1$ ),  $m_\pi \sim r_0^{-1}$
- Méson  $\omega$  ( $J^\pi = 1^-, T = 0$ ),  $m_\omega \sim r_c^{-1}$
- Méson  $\sigma$  ( $J^\pi = 0^+, T = 0$ ), parité +
- Méson  $\rho$  ( $J^\pi = 1^-, T = 1$ ),  $V_{NN} = f(\text{isospin})$

- Rôle spécial de la **symétrie chirale** dans la  $\chi$ EFT :

- Explicitement brisée (par le terme de masse des quarks)
- Spontanément brisée (avec le pion comme **boson de Goldstone**)



$V_{NN}$  : potentiel nucléon-nucléon  
 $r_0$  : portée de l'interaction nucléaire  
 $r_c$  : portée du cœur dur



## Théorie effective des champs chirale (2/3)

Etape (2) de la  $\chi$ EFT : hiérarchiser les termes du lagrangien effectif

- Echelles d'énergie caractéristiques de la  $\chi$ EFT :

- Echelle douce  $f_\pi \sim 100 \text{ MeV} \sim m_\pi$

$f_\pi$  : constante de désintégration du pion

- Echelle dure  $\Lambda \sim 1 \text{ GeV} \sim m_\omega, m_\sigma, m_\rho, m_N$

$\Lambda$  : *cutoff* ( $\chi$ EFT non valide pour  $\epsilon > \Lambda$ )

- Analyse dimensionnelle naïve ( $\Delta$  Pions ignorés)

- Paramètres d'expansion à disposition :

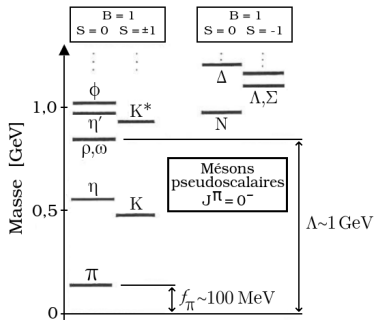
$$\frac{m_{\text{mésion}}}{\Lambda}, \frac{\varphi_{\text{mésion}}}{f_\pi}, \frac{\partial \varphi_{\text{mésion}}}{\Lambda} < 1$$

- Exemple du terme de masse :

$$\frac{1}{2} m_{\text{mésion}}^2 \varphi_{\text{mésion}}^2 = \frac{1}{2} \Lambda^2 f_\pi^2 \underbrace{\frac{m_{\text{mésion}}^2}{\Lambda^2} \frac{\varphi_{\text{mésion}}^2}{f_\pi^2}}_{< 1}$$

- Forme générale des termes du lagrangien effectif :  $g \frac{f_\pi^2 \Lambda^2}{q! r!} \left( \frac{\bar{\psi} \psi}{f_\pi^2 \Lambda} \right)^p \left( \frac{\varphi_{\text{mésion}}}{f_\pi} \right)^b \left( \frac{\partial}{\Lambda} \right)^d$

- Règle de *power counting* :  $\nu = p + b + d$ , règle valide si  $g = \mathcal{O}(1)$



## Théorie effective des champs chirale (3/3)

Etape ③ de la  $\chi$ EFT : tronquer le lagrangien effectif à un certain ordre en  $\nu$

- L'ordre de troncature en  $\nu$  doit être choisi de telle sorte que la condition de naturalité ( $g = \mathcal{O}(1)$ ) soit vérifiée  $\rightarrow$  troncation à l'ordre  $\nu = 5^*$

\* R.J. Furnstahl, B.D. Serot et H.B. Tang, Nuclear Physics A 615 : 441-482 (1997)

- Prise en compte de l'interaction électromagnétique du proton :  
 $\rightarrow$  ajout du terme  $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - e\bar{\psi}\gamma_{\mu}A^{\mu}\left(\frac{1-\tau_3}{2}\right)\psi$
- Une simplification plus poussée mène au lagrangien du **modèle  $\sigma$  non linéaire** :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_N + \mathcal{L}_b + \mathcal{L}_{int}$$

- Terme nucléonique libre :  $\mathcal{L}_N = \bar{\psi}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m_N)\psi$
- Terme bosonique libre :  $\mathcal{L}_b = \frac{1}{2}[(\partial_{\mu}\sigma)(\partial^{\mu}\sigma) - m_{\sigma}^2\sigma^2] - \frac{g_3}{3}\sigma^3 - \frac{g_4}{4}\sigma^4 + \dots$
- Terme d'interaction :  $\mathcal{L}_{int} = -g_{\sigma}\bar{\psi}\psi\sigma + \dots$
- Le terme  $-\frac{g_3}{3}\sigma^3 - \frac{g_4}{4}\sigma^4$  prend en compte les effets du milieu sur l'interaction nucléaire  $\rightarrow$  pas de dépendance explicite de l'interaction en la densité de nucléons  
 $\rightarrow$  Première caractéristique indésirable évitée ✓

## Théorie du champ moyen relativiste (1/2)

- Quantification du champ nucléonique  $\psi$  :

$$\psi(\vec{x}, t) \rightarrow \hat{\psi}(\vec{x}, t) = \sum_{n=1}^A \left( f_n(\vec{x}) e^{-ie_n t} \hat{c}_n + g_n(\vec{x}) e^{ie'_n t} \hat{d}_n^\dagger \right)$$

- Notation :  $f_n(g_n)$  = spineur décrivant un nucléon (antinuécléon) dans l'état  $n$
  - Conséquence : champs bosoniques aussi quantifiés ( $\varphi_{boson} \rightarrow \hat{\varphi}_{boson}$ )
  - Approximations mises en œuvre :
    - Restriction aux noyaux invariants sous l'inversion du temps
    - Dépendance temporelle des champs  $\hat{\varphi}_{boson}$  négligée
    - Approximation *no - sea* ( ~~$g_n(\vec{x}) e^{ie'_n t} \hat{d}_n^\dagger$~~ )
    - Approximation de champ moyen ( $\hat{\varphi}_{boson} \rightarrow \langle \Phi | \hat{\varphi}_{boson} | \Phi \rangle$ )  
 $|\Phi\rangle$  = état fondamental du système de  $A$  nucléons
    - Approximation de la densité locale (termes d'échange ignorés)
- } Approximation **RMF**
- Objectif de ces approximations : **extraire l'EDF** du lagrangien  $\mathcal{L}$

## Théorie du champ moyen relativiste (2/2)

- La transformée de Legendre du lagrangien  $\mathcal{L}$  mène à l'EDF  $\mathcal{E}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \equiv \langle \Phi | \hat{H} | \Phi \rangle &= \sum_{n=1}^A \int d^3x \overline{f_n(\vec{x})} \left( -i\vec{\tau} \cdot \vec{\nabla} + m_N \right) f_n(\vec{x}) - \frac{g_\sigma^2}{2} \int d^3x_1 d^3x_2 \rho_s(\vec{x}_1) D_\sigma(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \rho_s(\vec{x}_2) \\ &+ \frac{g_\omega^2}{2} \int d^3x_1 d^3x_2 \rho_b(\vec{x}_1) D_\omega(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \rho_b(\vec{x}_2) + \frac{g_\rho^2}{2} \int d^3x_1 d^3x_2 \rho_i(\vec{x}_1) D_\rho(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \rho_i(\vec{x}_2) \\ &+ \frac{c^2}{2} \int d^3x_1 d^3x_2 \rho_c(\vec{x}_1) D_\gamma(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \rho_c(\vec{x}_2) - \frac{g_3 g_\sigma^3}{6} \int d^3x_1 \left\{ \int d^3x_2 D_\sigma(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \rho_s(\vec{x}_2) \right\}^3 \\ &- \frac{g_4 g_\sigma^4}{4} \int d^3x_1 \left\{ \int d^3x_2 D_\sigma(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \rho_s(\vec{x}_2) \right\}^4 \end{aligned}$$

**Point clé** : l'expression de l'EDF  $\mathcal{E}$  ne contient aucun terme de contact

→ Deuxième caractéristique indésirable évitée ✓

- Les équations RMF résultent de la minimisation de l'EDF  $\mathcal{E}$  :

$$\begin{aligned} \left\{ -i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + V[\langle \hat{\varphi}_{boson}(\vec{\tau}) \rangle] + \beta(m_N + S[\langle \hat{\varphi}_{boson}(\vec{\tau}) \rangle]) \right\} f_n(\vec{\tau}) &= e_n f_n(\vec{\tau}) \\ \left\{ -\Delta + m_\sigma^2 + g_3 \langle \hat{\sigma}(\vec{\tau}) \rangle + g_4 \langle \hat{\sigma}(\vec{\tau}) \rangle^2 \right\} \langle \hat{\sigma}(\vec{\tau}) \rangle &= -g_\sigma \rho_s(\vec{\tau}) \\ (-\Delta + m_\omega^2) \langle \hat{\omega}^0(\vec{\tau}) \rangle &= g_\omega \rho_b(\vec{\tau}) \\ (-\Delta + m_\rho^2) \langle \hat{\rho}_3^0(\vec{\tau}) \rangle &= g_\rho \rho_i(\vec{\tau}) \\ -\Delta \langle \hat{A}^0(\vec{\tau}) \rangle &= e \rho_c(\vec{\tau}) \end{aligned} \quad \langle \Phi | \hat{\varphi}_{boson} | \Phi \rangle = \langle \hat{\varphi}_{boson} \rangle$$

avec  $\rho_s = \sum_{n=1}^A \overline{f_n} f_n$ ,  $\rho_b = \sum_{n=1}^A f_n^\dagger f_n$ ,  $\rho_i = \sum_{n=1}^A f_n^\dagger \tau_3 f_n$ ,  $\rho_c = \sum_{n=1}^A f_n^\dagger \left( \frac{1 - \tau_3}{2} \right) f_n$

# Partie numérique

Application à l'étude de la  
phénoménologie nucléaire

## Notion de symétrie pseudo-spin pour les noyaux sphériques

- **Origine** de la symétrie pseudo-spin :

- Equation RMF du spineur nucléonique  $f_n$  :

$$h_D(\vec{r})f_n(\vec{r}) = e_n f_n(\vec{r})$$

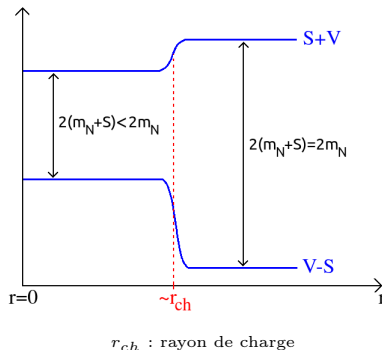
$$\text{avec } h_D = \begin{pmatrix} m_N + S + V & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -m_N + V - S \end{pmatrix}$$

$h_D$  : hamiltonien de Dirac

- Générateurs pseudo-spin :

$$\check{S}_i = \begin{pmatrix} \check{s}_i & 0 \\ 0 & s_i \end{pmatrix} \quad \text{avec } \check{s}_i = h^\dagger s_i h$$

$h = \vec{\sigma} \cdot \vec{p} / |\vec{p}|$  : opérateur d'hélicité



$$[\check{S}_i, h_D] = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Symétrie pseudo-spin}$$

- **Conséquence** de la symétrie pseudo-spin :

- Quasi-dégénérescence entre les états  $(n_r, l, j = l + 1/2)$  et  $(n'_r = n_r - 1, l' = l + 2, j' = l' - 1/2)$
- Avec  $\tilde{l} = l + 1$ , le doublet pseudo-spin devient :

$$\{(n_r, l = \tilde{l} - 1, j = \tilde{l} - 1/2), (n'_r = n_r - 1, l' = \tilde{l} + 1, j' = \tilde{l} + 1/2)\}$$

- Exemples :  $\{2s_{1/2}, 1d_{3/2}\}$ ,  $\{3s_{1/2}, 2d_{3/2}\}$ ,  $\{2p_{3/2}, 1f_{5/2}\}$

## Technique de résolution numérique des équations du champ moyen relativiste

- Equations RMF à résoudre numériquement :

$$\begin{aligned} \left\{ -i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + V [\langle \hat{\varphi}_{boson}(\vec{r}) \rangle] + \beta (m_N + S [\langle \hat{\varphi}_{boson}(\vec{r}) \rangle]) \right\} f_n(\vec{r}) &= e_n f_n(\vec{r}) \\ \left\{ -\Delta + m_\sigma^2 + g_3 \langle \hat{\sigma}(\vec{r}) \rangle + g_4 \langle \hat{\sigma}(\vec{r}) \rangle^2 \right\} \langle \hat{\sigma}(\vec{r}) \rangle &= -g_\sigma \rho_s(\vec{r}) \\ (-\Delta + m_\omega^2) \langle \hat{\omega}^0(\vec{r}) \rangle &= g_\omega \rho_b(\vec{r}) \\ (-\Delta + m_\rho^2) \langle \hat{\rho}_3^0(\vec{r}) \rangle &= g_\rho \rho_i(\vec{r}) \\ -\Delta \langle \hat{A}^0(\vec{r}) \rangle &= e \rho_c(\vec{r}) \end{aligned}$$

Dépendance des potentiels  $V$  et  $S$  par rapport aux champs  $\langle \hat{\varphi}_{boson} \rangle \Rightarrow$  **auto-cohérence**

$\Rightarrow$  Processus itératif pour résoudre les équations RMF (choix initial :  $V + \beta S = V_{Woods-Saxon}$ )

- **Paramètres libres** du modèle construit ajustés aux données expérimentales :

Ensemble de paramètres choisi : **NL3**

$m_\sigma$ [MeV]	$g_3$ [ $\text{fm}^{-1}$ ]	$g_4$	$g_\sigma$	$g_\omega$	$g_\rho$
508,194	-10,431	-28,885	10,217	12,868	4,474

- Les solutions  $f_n$  sont développées sur une base de fonctions propres  $\xi_\alpha$  d'un

potentiel **harmonique déformé** :  $V_{osc}(r_\perp, z) = \frac{1}{2} m_N \omega_\perp^2 r_\perp^2 + \frac{1}{2} m_N \omega_z^2 z^2$

Avantages de cette procédure :

- Forme analytique **bien connues** des fonctions propres  $\xi_\alpha$
- Réduction des équations RMF au problème **bien connu** de diagonalisation d'une matrice symétrique

## Etude du décalage isotopique du plomb (1/4)

- La partie numérique de ce stage est centrée sur le **décalage isotopique du plomb** :

$$\delta r_{ch}^2(N, Z = 82) = r_{ch}^2(N, Z = 82) - r_{ch}^2(N = 126, Z = 82)$$

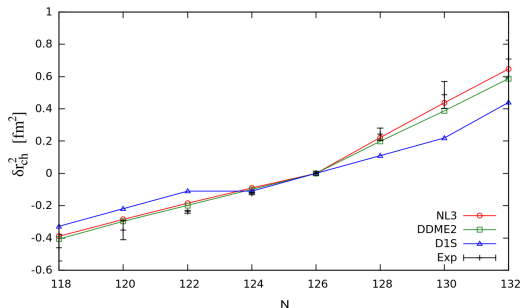
$r_{ch}(N, Z = 82)$  : **rayon de charge** de l'isotope  ${}^A\text{Pb}_N$

- 3 approches seront comparées à l'expérience (Atomic Data and Nuclear Data Tables) :
  - Interaction NL3 (interaction **relativiste contruite pendant ce stage**)
  - Interaction DDME2 (interaction **relativiste** dépendant explicitement de la densité de nucléons)
  - Interaction D1S (interaction **non relativiste** résultant de l'EDF de Gogny)

- Point clé :**

Les interactions **relativistes** reproduisent la discontinuité de pente observée, contrairement à l'interaction **non-relativiste** D1S

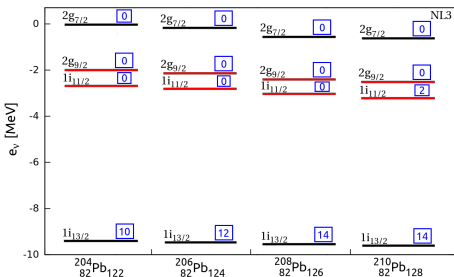
→ **Pourquoi ?**



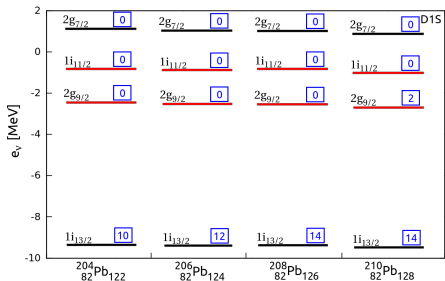


## Etude du décalage isotopique du plomb (2/4)

- Elément de réponse : considérer les états de **neutrons** proches du niveau de Fermi



$$e_\nu(1i_{11/2}) < e_\nu(2g_{9/2})$$



$$e_\nu(1i_{11/2}) > e_\nu(2g_{9/2})$$

→ Pourquoi cette **différence** ?

- Solution **communément admise aujourd'hui** :

Modification des paramètres de l'EDF **non-relativiste** pour diminuer le gap d'énergie entre les partenaires spin-orbite

⇒ Problème pour le pouvoir prédictif de l'EDF **non-relativiste**

## Etude du décalage isotopique du plomb (3/4)

● Solution **proposée** :

Conséquence de la quasi-dégénérescence des partenaires pseudo-spin  $1i_{11/2}$  et  $2g_{9/2}$

⇒ Explique la différence entre les spectres **relativistes** et **non-relativistes**

car **la symétrie pseudo-spin n'est comprise que dans un cadre relativiste**

→ Quel est le lien entre l'occupation du niveau  $\nu 1i_{11/2}$  et la discontinuité de pente du décalage isotopique du plomb ?

● Élément de réponse : considérer l'énergie de symétrie nucléaire  $S_N(A)$ 

$$S_N(A) = \frac{A \int_0^{r_{ch}} d^3r [\rho_n(r) - \rho_p(r)]}{(N - Z) \int_0^{r_{ch}} d^3r \frac{\rho(r)}{S[\rho(r)]}}$$

avec  $N \neq Z$

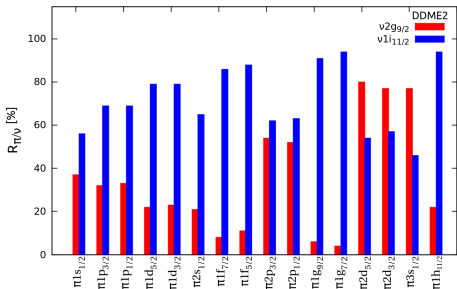
⇒  $S_N(A)$  minimale pour  $\rho_n(r) = \rho_p(r)$

⇒ Recouvrement des densités totales

de protons et de neutrons

⇒ Recouvrement des densités individuelles

de **même structure nodale** (même  $n_r$ )



## Etude du décalage isotopique du plomb (4/4)

- Lien entre le recouvrement des fonctions d'onde individuelles et la discontinuité de pente du décalage isotopique du plomb :

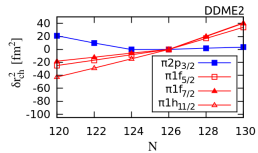
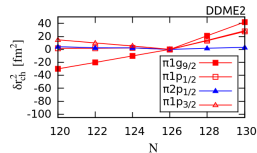
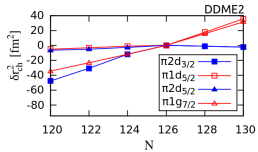
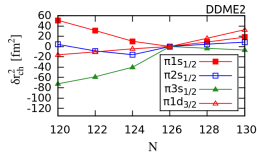
Moment angulaire orbital **élevé** de l'état  $\nu 1i_{11/2}$  ( $l = 6$ )

⇒ Fonction d'onde de l'état  $\nu 1i_{11/2}$  très **étendue** spatialement

⇒ **Étalement** des états protoniques avec  $n_r = 1$  lorsque l'état  $\nu 1i_{11/2}$  est occupé

⇒ **Discontinuité de pente** des décalages isotopiques des états protoniques avec  $n_r = 1$  lorsque l'état  $\nu 1i_{11/2}$  est occupé

⇒ **Discontinuité de pente** du décalage isotopique du plomb induit par la somme des contributions des fonctions d'onde protoniques avec  $n_r = 1$



# Conclusion et perspectives

- Conclusion :

- Partie formelle :

- Une EDF relativiste a été construite à partir de la QCD à l'aide de la  $\chi$ EFT
- L'EDF construite est **affranchie** de 2 des 3 caractéristiques des EDF sources de violation du principe d'exclusion de Pauli

- Partie numérique :

- L'accord commun avec l'expérience des interactions relativistes NL3 et DDME2 montre que la fonctionnelle construite (NL3) contourne **avec succès** le problème de dépendance explicite en la densité de nucléons
- L'origine du décalage isotopique du plomb a été attribuée à la symétrie pseudo-spin, motivant ainsi le caractère relativiste de l'EDF construite

- Perspectives :

- Quantification du champ nucléonique avec une approche d'**intégrale chemin**
- Traitement du problème à N corps à l'aide de la **théorie HFBR** et non RMF
- Application de l'EDF construite à l'étude de l'ensemble de la carte des noyaux

## Violations du principe d'exclusion de Pauli dans le cadre d'approches de type EDF

- Notion de canal particule-trou et particule-particule :

- Matrice densité  $\rho$  :

$$\rho_{ij} = \langle \Phi | c_j^\dagger c_i | \Phi \rangle$$

- Tenseur d'appariement  $\kappa$  :

$$\kappa_{ij} = \langle \Phi | c_j c_i | \Phi \rangle$$

- Violation du principe d'exclusion de Pauli due aux termes de contact :

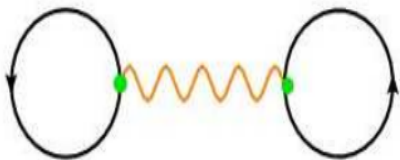


Diagramme direct (Hartree)

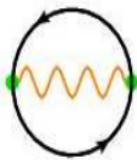
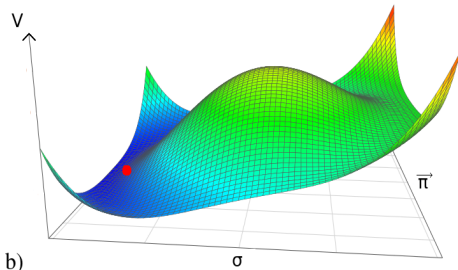
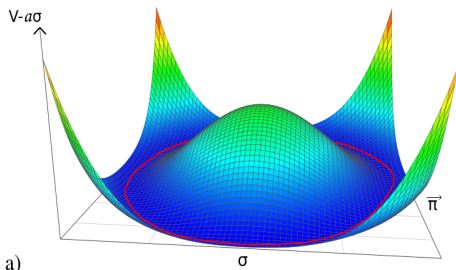


Diagramme d'échange (Fock)

## Brisures spontanée et explicite de la symétrie chirale



- Exemple de lagrangien décrivant l'interaction nucléaire :

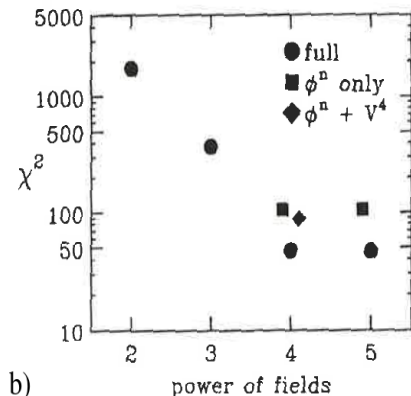
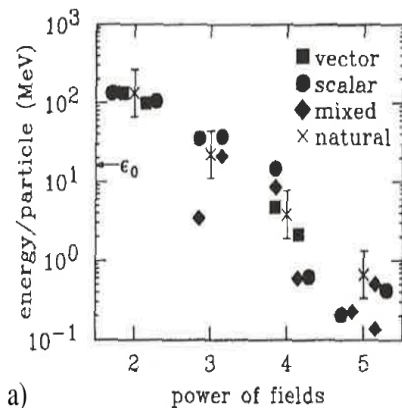
$$\mathcal{L}_X = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \frac{1}{2} [(\partial_\mu\sigma)(\partial^\mu\sigma) + (\partial_\mu\vec{\pi}) \cdot (\partial^\mu\vec{\pi})] + g_\sigma\bar{\psi}\sigma\psi + ig_\pi\bar{\psi}\gamma_5\vec{\pi} \cdot \vec{\tau}\psi - V(\sigma, \vec{\pi})$$

$$\text{avec } V(\sigma, \vec{\pi}) = \frac{\lambda}{4} [(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) - v^2]^2 + a\sigma$$

- Effet des transformations du groupe  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  (sous-groupe du groupe chiral  $U(2)_L \times U(2)_R$ ) sur un champ isospinoriel  $\underline{\psi}$  :

$$\underline{\psi}' = e^{\frac{i}{2}\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}\gamma_5}\underline{\psi} \quad \text{avec } \underline{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_p \end{pmatrix}$$

- Practically Conserved Axial Current* (PCAC) :  $\partial_\mu A^\mu = a\vec{\pi} \sim m_\pi^2\vec{\pi}$

$\chi$ EFT : troncation du lagrangien effectif et condition de naturalité

B.D. Serot et J.D. Walecka, *150 years of Quantum Many-Body Theory*, World Scientific, Singapore (2001)

- a) Lien entre l'indice de *power counting*  $\nu$  et l'importance de l'interaction associée
- b) Pertinence de la troncation à  $\nu = 5$

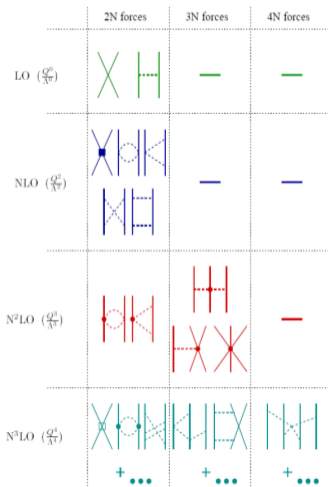
## Notion de corrélations entre nucléons et de champ moyen

Hamiltonien exact d'un système de  $A$  nucléons :

$$\begin{aligned} H_{exact} &= \sum_{i=1}^A \frac{p_i^2}{2M} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} v_{ij} + \frac{1}{3!} \sum_{i \neq j \neq k} v_{ijk} + \dots \\ &= \left[ \sum_{i=1}^A \left( \frac{p_i^2}{2M} + U_i \right) \right] + \left[ \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} v_{ij} + \frac{1}{3!} \sum_{i \neq j \neq k} v_{ijk} + \dots - \sum_{i=1}^A U_i \right] \\ &= H_0 + V_{res} \end{aligned}$$



# Interactions à $N > 2$ corps et $\chi$ EFT



U.G. Meissner, Nucl. Phys. A, 751 :149–166 (2005)

Classification des contributions à l'interaction nucléaire nue issues de la  $\chi$ EFT

## Quantification des champs bosoniques (1/3)

Equations de Klein-Gordon des champs bosoniques du modèle  $\sigma$  non linéaire pour les systèmes nucléaires invariants sous l'inversion du sens temps :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\square + U^2[\sigma]) \sigma = -g_\sigma \bar{\psi} \psi \quad \text{avec} \quad U^2[\sigma] = m_\sigma^2 + g_3 \sigma + g_4 \sigma^2 \\ (\square + m_\pi^2) \vec{\pi} = \frac{f_\pi}{m_\pi} \partial_\nu (\bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\nu \vec{\tau} \psi) \\ (\square + m_\omega^2) \omega_0 = g_\omega \bar{\psi} \gamma_0 \psi \\ (\square + m_\rho^2) \vec{\rho}_0 = g_\rho \bar{\psi} \gamma_0 \vec{\tau} \psi \\ \square A_0 = e \bar{\psi} \gamma_0 \left( \frac{1 - \tau_3}{2} \right) \psi \end{array} \right.$$

## Quantification des champs bosoniques (2/3)

Définition des propagateurs  $D_i$  (avec  $i = \sigma, \pi, \omega, \rho, \gamma$ ) des champs bosoniques du modèle  $\sigma$  non linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\square + U^2 [\sigma]) D_\sigma(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \\ (\square + m_\pi^2) D_\pi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \\ (\square + m_\omega^2) D_\omega(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \\ (\square + m_\rho^2) D_\rho(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \\ \square D_\gamma(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \end{array} \right.$$

## Quantification des champs bosoniques (3/3)

Expression des champs bosoniques du modèle  $\sigma$  non linéaire en fonction de leurs propagateurs :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(\vec{x}_1) = -g_\sigma \int d^3 x_2 D_\sigma(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \bar{\psi}(\vec{x}_2) \psi(\vec{x}_2) \\ \vec{\pi}(\vec{x}_1) = \frac{f_\pi}{m_\pi} \int d^3 x_2 D_\pi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \partial_\nu (\bar{\psi}(\vec{x}_2) \gamma_5 \gamma^\nu \vec{\tau} \psi(\vec{x}_2)) \\ \omega_0(\vec{x}_1) = g_\omega \int d^3 x_2 D_\omega(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \bar{\psi}(\vec{x}_2) \gamma_0 \psi(\vec{x}_2) \\ \vec{\rho}_0(\vec{x}_1) = g_\rho \int d^3 x_2 D_\rho(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \bar{\psi}(\vec{x}_2) \gamma_0 \vec{\tau} \psi(\vec{x}_2) \\ A_0(\vec{x}_1) = e \int d^3 x_2 D_\gamma(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \bar{\psi}(\vec{x}_2) \gamma_0 \left( \frac{1 - \tau_3}{2} \right) \psi(\vec{x}_2) \end{array} \right.$$

# Approximation de champ moyen et champs quantiques

Transformations des champs bosoniques dans le cadre de l'approximation de champ moyen (notation utilisée :  $\langle \Phi | \hat{\varphi}_{boson} | \Phi \rangle = \langle \hat{\varphi}_{boson} \rangle$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\sigma} \rightarrow \langle \hat{\sigma} \rangle \\ \hat{\vec{\pi}} \rightarrow \langle \hat{\vec{\pi}} \rangle = \vec{0} \\ \hat{\omega}^0 \rightarrow \langle \hat{\omega}^0 \rangle \\ \hat{\rho}_i^0 \rightarrow \langle \hat{\rho}_i^0 \rangle = \langle \hat{\rho}_i^0 \rangle \delta_{3i} \quad (\text{soit } \langle \hat{\rho}_1^0 \rangle = \langle \hat{\rho}_2^0 \rangle = 0) \\ \hat{A}^0 \rightarrow \langle \hat{A}^0 \rangle \end{array} \right.$$

Remarques :

- Non conservation de la parité si  $\langle \hat{\vec{\pi}} \rangle \neq \vec{0}$
- Non conservation de la charge d'isospin  $t_3$  si  $\langle \hat{\rho}_1^0 \rangle \neq 0$  et  $\langle \hat{\rho}_2^0 \rangle \neq 0$



## Reparamétrisation des fonctionnelles non-relativistes et spin-orbite

Potentiel spin-orbite dans le cadre de modèles relativistes avec une interaction nucléaire dépendant explicitement de la densité :

$$V_{so}^{(q)} = \frac{[\mathcal{C}_\omega + \mathcal{C}_\rho + \mathcal{C}_\sigma] \frac{d}{dr} \rho_B^{(q)} + [\mathcal{C}_\omega - \mathcal{C}_\rho + \mathcal{C}_\sigma] \frac{d}{dr} \rho_B^{(q' \neq q)}}{2 \left\{ M - \frac{1}{2} \left[ (\alpha_\omega + \alpha_\sigma + \alpha_\rho) \rho_B^{(q)} + (\alpha_\omega + \alpha_\sigma - \alpha_\rho) \rho_B^{(q' \neq q)} \right] \right\}^2} \mathbf{l} \cdot \mathbf{s}$$

$$= \left\{ W_1 \frac{d}{dr} \rho_q(r) + W_2 \frac{d}{dr} \rho_{q' \neq q}(r) \right\} \mathbf{l} \cdot \mathbf{s}$$

- Modèle relativiste (avec dépendance de l'interaction en la densité) traité à l'approximation RMF :

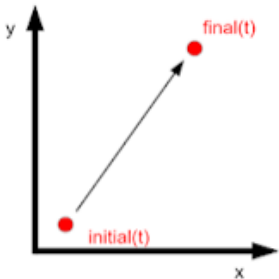
$$W_1/W_2 \approx 1$$

- Modèle non-relativiste (basé sur une fonctionnelle de Skyrme) :

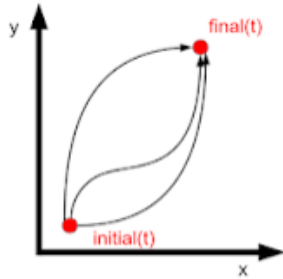
$$W_1/W_2 \approx 2$$

⇒ suggère un lien entre le rapport  $W_1/W_2$  et la discontinuité de pente du décalage isotopique **mais  $W_1/W_2 \approx 2$  pour le même modèle relativiste traité à l'approximation RHF**

# Notion d'intégrale chemin



Particule classique



Particule quantique

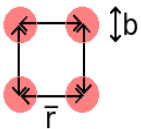
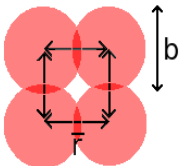
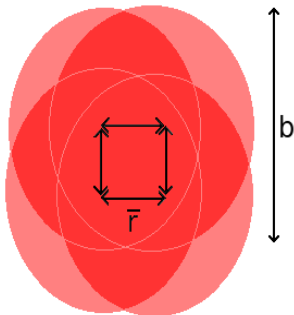
Muonray, *The Path Integral Interpretation of Quantum Mechanics* [en ligne], <http://muonray.blogspot.com/2016/03/the-path-integral-interpretation-of.html>, consulté le 12 juin 2018.

- Définition de l'opérateur évolution du temps  $U(t_i, t_f)$  :

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \langle x_f | e^{-iH(t_i - t_f)/\hbar} | x_i \rangle = \langle x_f | U(t_i, t_f) | x_i \rangle$$

- Expression de l'opérateur  $U(t_i, t_f)$  avec une intégrale de chemin :

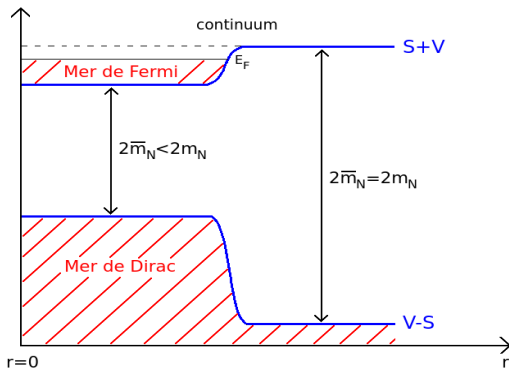
$$U(t_i, t_f) = \int \mathcal{D}x(t) e^{iS[x(t)]/\hbar}$$

Etat agrégat (ou *cluster*)cristal  
 $\alpha < 1$ cluster  
 $\alpha \sim 1$ QL  
 $\alpha > 1$ 

$$\alpha = \frac{b}{\bar{r}} \sim \left( \frac{\hbar}{\text{action du système}} \right)^2$$



## Phénomène de saturation nucléaire



- Petite et grande composante du spineur nucléonique  $f_n$  :

$$f_n(x^\mu) = \begin{pmatrix} \phi_n(x^\mu) \\ \chi_n(x^\mu) \end{pmatrix}$$

- Expression de la densité scalaire  $\rho_s$  :

$$\rho_s(x^\mu) = \sum_n \left( |\phi_n(x^\mu)|^2 - |\chi_n(x^\mu)|^2 \right)$$

## Spin-orbite

Hamiltonien de Dirac réduit :

$$h_D^{red} = T + V_{cent} + V_{so} + V_p$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} T = \mathfrak{B}_0 (\epsilon_k \mathfrak{B}_0 - 1) \Delta \\ V_{cent} = S + V \\ V_{so} = 2\mathfrak{B}_0^2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (V - S) \vec{l} \cdot \vec{\sigma} \\ V_p = -\mathfrak{B}_0^2 \vec{\nabla} (V - S) \cdot \vec{\nabla} - \frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} \mathfrak{B}_0^2 \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} (S + V) - \frac{1}{2} (S + V) \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} \mathfrak{B}_0^2 \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \\ \quad + \epsilon_k \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} \mathfrak{B}_0^2 \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \end{array} \right.$$

Dans la matière nucléaire :

- $V - S \approx 720 \text{ MeV}$
- $V + S \approx -80 \text{ MeV} \ll m_N \approx 1 \text{ GeV}$

Notion de *self-energy*

Equation de Dirac du spineur nucléonique  $\psi$  dans le cadre du modèle  $\sigma$  non linéaire :

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - \underbrace{(m_N + \Sigma(x^\mu))}_{m_N^*(x^\mu)}] \psi(x^\mu) = 0$$

$$\Leftrightarrow [\gamma_\nu (i\partial^\nu - V^\nu(x^\mu)) - (m_N + S(x^\mu))] \psi(x^\mu) = 0$$

$$\text{avec } \begin{cases} S(x^\mu) = g_\sigma \sigma(x^\mu) + \frac{f_\pi}{m_\pi} \gamma_5 \gamma_\nu (\partial^\nu \vec{\pi}(x^\mu)) \cdot \vec{\tau} \\ V^\nu(x^\mu) = g_\omega \omega^\nu(x^\mu) + g_\rho \vec{\rho}^\nu(x^\mu) \cdot \vec{\tau} + eA^\nu(x^\mu) \left( \frac{1 - \tau_3}{2} \right) \end{cases}$$

$\Sigma$  : *self-energy*