Summer Camp
Dynamique des galaxies et matière noire

B. Epinat (benoit.epinat@lam.fr)

14 juin 2018

Table des matières

1 L'effet Doppler-Fizeau

L'effet Doppler-Fizeau traduit le fait que la longueur d'onde dépend de la vitesse relative entre la source et l'observateur. Pour les ondes lumineuses, cela se traduit par le fait que la longueur d'onde est plus bleue pour un objet que se rapproche de l'observateur et plus rouge pour un objet qui s'éloigne. Le décalage en longueur d'onde est appelé décalage spectral ou en 'redshift' et s'exprime ainsi :

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}$$

où λ_0 est la longueur d'onde au repos (dans le référentiel de la source) et λ est la longueur d'onde observée.
On montre que

$$z = \frac{1 + v_r/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1$$

Il s'agit de la formule de l'effet Doppler relativiste où v est la vitesse de la source par rapport à l'observateur, v_r est la vitesse projetée sur la ligne de visée et c est la célérité de la lumière dans le vide.
Dans le cas où $v \ll c$, on peut alors écrire

$$z = \frac{v_r}{c}$$

2 Courbe de rotation des galaxies spirales

Les galaxies spirales ont la particularité d'être aplaties. Ainsi, les particules (gaz et étoiles) sont en première approximation en rotation dans un plan. La courbe de rotation est la vitesse circulaire des particules en fonction du rayon et peut être mesurée grâce à l'effet Doppler-Fizeau à partir de raies en émission du gaz (neutre ou ionisé) ou de raies d'absorption des étoiles.

Les lois utilisées pour déterminer la vitesse de rotation sont celles de la mécanique Newtonienne. D'une part, on a la force de gravitation due à une particule de masse M sur une particule test de masse m séparées d'une distance r :

$$\vec{F_g} = -G\frac{mM}{r^2}\vec{e_r} \tag{1}$$

où $\vec{e_r}$ est le vecteur unitaire dirigé de M vers m.
Dans le cas d'une force gravitationnelle due à une distribution de particules décrite par une densité ρ s'écrit

$$\vec{F_g}(\vec{r}) = Gm\sum_{\vec{r'}}\frac{\vec{r'}-\vec{r}}{|\vec{r'}-\vec{r}|^3}\delta M(\vec{r'}) = mG\int_{\vec{r'}}\frac{\vec{r'}-\vec{r}}{|\vec{r'}-\vec{r}|^3}\rho(\vec{r'})d^3\vec{r'} = m\vec{g} \tag{2}$$

où $\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi$ est le vecteur gravitationnel qui peut s'écrire comme le gradient d'un potentiel gravitationnel Φ. Ce dernier peut se déterminer grâce à la loi de Poisson :

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho \tag{3}$$

D'autre part, toute particule de masse m se déplaçant sur une orbite circulaire de rayon r à une vitesse v_c (donc en rotation) est soumise à une force centrifuge due à l'accélération de cette particule :

$$\vec{F_c} = m\frac{v_c^2}{r}\vec{e_r} \tag{4}$$

Pour un système en équilibre, la somme des forces étant nulle, on a donc

$$\vec{F_g} + \vec{F_c} = \vec{0} \tag{5}$$

Pour des systèmes à symétrie cylindrique ou sphérique, la vitesse circulaire ne dépend que du rayon et on peut montrer qu'elle se détermine à partir du potentiel gravitationnel :

$$v_c^2(r) = r\frac{\partial\Phi}{\partial r} \tag{6}$$

2.1 Modèle 1 : masse unique au centre

Ce modèle fait l'hypothèse que toute la masse M de la galaxie est concentrée (la masse est négligeable à grand rayon). On peut appliquer la seconde loi de Newton à une particule test de masse m :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F_g}$$

où

- $\vec{p}$ est la quantité de mouvement ($m\vec{a}$). Puisque la particule test est en rotation à la vitesse v_c au rayon r, on a donc (force centrifuge) :

$$m\vec{a} = \frac{mv_c^2}{r}\vec{e_r}$$

- $\vec{F_g}$ est la force de gravitation :

$$\vec{F_g} = -G\frac{mM}{r^2}\vec{e_r}$$

On en déduit donc que

$$v_c = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Si la masse est unique au centre, on a une décroissance dite Képlérienne à grand rayon (figure 1).

Si à grand rayon la masse des galaxies ne croît plus, on s'attend donc que la courbe décroisse, ce qui n'est pas le cas.

2.2 Modèle 2 : disque de Freeman

Ce modèle fait l'hypothèse que la matière est distribuée dans un disque infiniment mince dont la densité de surface varie exponentiellement. Cette description est motivée par le fait que la luminosité de surface ($W/m^2/arcsec^2$) des galaxies spirales suit ce type de loi. Il s'agit de la luminosité de la distribution des étoiles :

$$I(r) = I_0 \exp\left(-\frac{r}{r_d}\right)$$

Remarque : on peut exprimer cette loi en magnitude (brillance de surface) :

$$B = -2.5 \log I = -2.5 \log I_0 + 2.5 \log e \times \frac{r}{r_d} = B_0 + 2.5 \log e \times \frac{r}{r_d}$$

En faisant l'hypothèse que la masse M est proportionnelle à la luminosité L, on obtient :

$$\sigma(r) = I(r) \times \frac{M}{L} = \frac{M}{L} I_0 \exp\left(-\frac{r}{r_d}\right) = \sigma_0 \exp\left(-\frac{r}{r_d}\right)$$

On peut déterminer la masse d'un disque exponentiel incluse dans un rayon R :

$$\begin{aligned} M(R) &= \int_0^R \sigma(r)dS = \int_0^R \sigma_0 \exp\left(-\frac{r}{r_d}\right) \times 2\pi r dr \\ &= 2\pi\sigma_0 \int_0^R \exp\left(-\frac{r}{r_d}\right) r dr \\ &= 2\pi\sigma_0 r_d^2 \int_0^{R/r_d} \exp(-x) x dx \text{ , en posant } x = \frac{r}{r_d} \Rightarrow dr = r_d dx \\ &= -M_0 \left[\exp(-x) + x\exp(-x)\right]_0^{R/r_d} \\ &= M_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{R}{r_d}\right) - \frac{R}{r_d}\exp\left(-\frac{R}{r_d}\right)\right] \end{aligned}$$

où $M_0 = M(\infty) = 2\pi\sigma_0 r_d^2$ est la masse totale.

Dans le cas du disque de Freeman, on peut déterminer l'expression de la courbe de rotation à partir du potentiel gravitationnel (obtenu grâce à l''équation de Poisson 3) en utilisant l'équation 6. On montre que l'expression de la courbe de rotation est :

$$v_c^2(R) = 4\pi G\sigma_0 r_d y^2 \left[I_0(y)K_0(y) - I_1(y)K_1(y)\right]$$

où $y = \frac{R}{2r_d}$, I_0, I_1, K_0 et K_1 sont des fonctions de Bessel modifiées. À grande distance, cette courbe a une décroissance proche de la décroissance Képlérienne (figure 1).

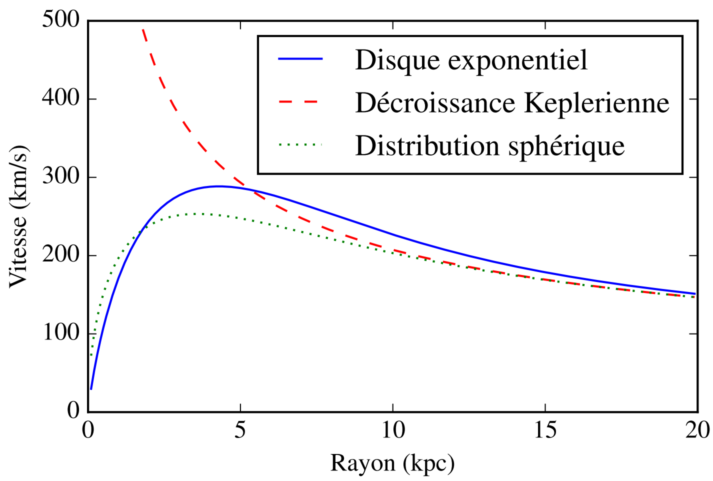

FIGURE 1 – Courbe de rotation obtenue pour un modèle de disque exponentiel (avec $r_d = 2$ kpc), un modèle où toute la masse est placée au centre et un modèle à distribution sphérique avec la même masse en fonction du rayon que le disque exponentiel. Les trois modèles possèdent la même masse totale (10^{11} $M_\odot$). À grand rayon les courbes se rejoignent.

2.3 Modèles de masse

Une galaxie est composée de différents constituants : étoiles, gaz, matière noire.

Localement, la densité est la somme des densités des diverses composantes (étoiles, gaz et matière noire) :

$$\rho = \rho_* + \rho_g + \rho_{mn}$$

Vue la linéarité de l'opérateur Laplacien, on peut réécrire l'équation de poisson :

$$\Delta\Phi = 4\pi G(\rho_* + \rho_g + \rho_{mn}) = 4\pi G\rho_* + 4\pi G\rho_g + 4\pi G\rho_{mn}$$

En introduisant des potentiels associés aux diverses composantes :

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_* &= 4\pi G\rho_*(r) \\ \Delta\Phi_g &= 4\pi G\rho_g(r) \\ \Delta\Phi_{mn} &= 4\pi G\rho_{mn}(r) \end{aligned}$$

on peut écrire $\Phi = \Phi_* + \Phi_g + \Phi_{mn}$.

On peut réécrire la vitesse de rotation :

$$v_c^2(r) = r\frac{\partial(\Phi_* + \Phi_g + \Phi_{mn})}{\partial r} = r\frac{\partial\Phi_*}{\partial r} + r\frac{\partial\Phi_g}{\partial r} + r\frac{\partial\Phi_{dm}}{\partial r} = v_*^2(r) + v_g^2(r) + v_{dm}^2(r)$$

comme étant la somme des vitesses circulaires pour chacune des composantes.

2.3.1 Distribution stellaire

La densité de la composante stellaire peut être mesurée à partir d'observations de la brillance de surface des galaxies (e.g. disque de Freeman). Cela permet de déterminer $v_*^2(r)$.

2.3.2 Distribution du gaz

La distribution du gaz peut être déterminée à partir d'observations du gaz neutre (HI à 21 cm). Cela permet de déterminer $v_g^2(r)$.

2.3.3 Distribution de la matière sombre

La distribution de matière sombre ne peut pas directement être observée.

Par contre, en faisant l'hypothèse que sa distribution est à symétrie sphérique (densité ρ_{dm} ne dépend que du rayon r), on peut déterminer le lien entre la vitesse de rotation et la distribution de masse en utilisant le théorème de Gauss qui stipule que la force de gravitation exercée par une distribution à symétrie sphérique sur une particule test de masse m placée à un rayon r du centre de la distribution est déterminée par la masse à l'intérieur de ce rayon. D'où :

$$v_{dm}^2(r) = \frac{GM_{dm}(r)}{r}$$

où

$$M_{dm}(r) = \int_0^r \rho_{dm}(x) 4\pi x^2 dx$$

est la masse comprise dans une sphère centrée de rayon r.

La connaissance de ρ_*, de ρ_g et de $v_c(r)$, la courbe de rotation mesurée par grâce à l'effet Doppler, permet donc de contraindre la distribution de la matière sombre dans les galaxies spirales.

3 Loi de Hubble et décalage spectral cosmologique

Hubble fut le premier à observer que plus les galaxies sont éloignées, plus elles s'éloignent rapidement. La relation entre la vitesse d'éloignement v et la distance d est linéaire :

$$v = H_0 \times d$$

avec $H_0 \sim 70$ km/s/Mpc, appelée constante de Hubble. Cette relation traduit le fait que l'Univers est en expansion et n'est en fait valable rigoureusement que pour les galaxies proches.

Pour les galaxies lointaines, on utilise généralement le décalage spectral plutôt que la distance ou que la vitesse d'éloignement due à l'expansion. On peut montrer que la composition du décalage spectral cosmologique z_c avec le décalage spectral dû au mouvement de la source (faible devant c) est telle que :

$$1 + z = (1 + z_c)\left(1 + \frac{v_r}{c}\right)$$

A Unités de distances

Distance Terre-Soleil = unité astronomique, notée ua

$$1 \text{ ua} = 1.496 \times 10^{11} \text{ m}$$

L'année lumière est la distance que parcours la lumière dans le vide durant une année :

$$1 \text{ AL} = c \times 365.25 \times 24 \times 3600 = 9.46 \times 1015 \text{ m}$$

Le parsec est l'unité de distance la plus communément utilisée en astronomie. Il s'agit de la distance qu'aurait un objet de parallaxe d'une demi seconde d'arc.

La parallaxe est la plus grande différence de direction d'un objet par rapport à une direction fixe (objet à l'infini) à 6 mois d'intervalle. Il s'agit de l'angle θ formé entre les deux positions de la Terre et l'objet. La base de ce triangle isocèle est $b = 2$ ua, la hauteur est la distance d. On a

$$\theta = \frac{b}{d}$$

avec θ en radian, d et d en mètres. On obtient donc, si $\theta = 0.5'' = \frac{0.5}{3600}$ deg $= \frac{\pi}{2\times3600\times180}$ rad.

$$d = 1 \text{ pc} = 3.09 \times 10^{16} \text{ m}$$

B Magnitudes

La magnitude m est une échelle logarithmique :

$$m = -2.5 \log F + C$$

où F est le flux observé (en W/m^2) dans une bande spectrale donnée et C un constante qui dépend de la bande spectrale et du système de magnitude utilisé.

On appelle magnitude absolue la magnitude qu'aurait un objet situé à une distance de 10 parsecs. La relation entre la magnitude et la magnitude absolue fait intervenir la distance d :

$$m - M = 5 \log d - 5$$

<u>Démonstration :</u> Par définition, $M = -2.5 \log F_{10pc} + C$. Par ailleurs, on relie la luminosité L (en W), le flux F et la distance d en faisant l'hypothèse que la lumière est émise de manière isotrope : $L = F \times 4\pi d^2$, d'où :

$$m - M = 2.5 \log F_{10pc} - 2.5 \log F_d = -2.5 \log \frac{F_d}{F_{10pc}} = -2.5 \log \frac{10^2}{d^2} = 5 \log d - 5$$

C Corps noir

— La luminance spectrique (en $W/m^2/st/\mu m$) d'un corps noir de température T suit la loi de Planck :

$$\frac{dL_e}{d\lambda}(\lambda) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1}$$

— La luminance spectrique présente un unique maximum (dérivée nulle) dont la longueur d'onde λ_m est définie par la loi du déplacement de Wien :

$$\lambda_m T = K_1 = 2898 \ \mu m.K$$

— La loi de Stephan relie l'exitance totale (en W/m^2) du corps noir à sa température T :

$$M_e = \sigma T^4$$

avec $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ W.m^{-2}.K^{-4}, la constante de Stefan.