

# Quelques illustrations de la théorie quantique

Claude Aslangul

(LPTMC - UPMC-Sorbonne Université)

VIII<sup>es</sup> Rencontres d'été de physique de l'infiniment grand à l'infiniment petit

Orsay, 18 juillet 2018

## 1 Introduction

L'objectif de cette contribution est de présenter quelques applications de la théorie quantique – étant entendu qu'aucun inventaire exhaustif ne saurait être fait – et aussi de montrer par quelques exemples que cette théorie, souvent perçue comme devant s'appliquer exclusivement à l'infiniment petit, est en fait la clé ouvrant la porte sur la compréhension du monde à *toutes* les échelles observables. J'ai déjà brièvement évoqué l'autre jour quelques situations où, sans l'arsenal théorique et conceptuel de cette phénoménale construction de l'esprit humain, rien de ce que l'on observe au quotidien ne trouverait d'explication fondamentale, justifiant que l'on puisse aujourd'hui affirmer que, jusqu'au mur de Planck, tout système physique a à voir, de près ou de loin, avec la théorie quantique ; pour sûr, ceci ne veut toutefois pas dire que tout phénomène physique exige le maniement explicite de cette théorie, car la question du réductionnisme peut (et doit) toujours être posée : elle a été discutée lors du débat de 2016<sup>1</sup>, sujet sur lequel on se doit de renvoyer à un célèbre article d'Anderson<sup>2</sup>.

Si dès que l'on parle de théorie quantique on pense *fonction d'onde*, un autre concept tout aussi fondamental est celui de *spin*, qui est le moment cinétique intrinsèque de toute particule et qui n'a pas d'équivalent classique<sup>3</sup>. L'importance majeure de ce concept tient au fait que l'on en est venu à classer les particules en deux catégories aux propriétés et rôles radicalement différents : les *fermions*, dont le spin en unités  $\hbar$  est égal à un demi-entier impair ( $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ ) et les *bosons*, dont le spin est entier ( $0, 1, 2, \dots$ ). Les fermions ne s'aiment pas les uns les autres (principe d'exclusion de Pauli) et refusent de cohabiter dans le même état ; au contraire les bosons ont un instinct grégaire et, quand l'occasion leur est donnée, se rassemblent presque tous dans le même état (condensation de Bose). De façon très simplifiée, on peut dire d'une part que les fermions sont les constituants *élémentaires* de la matière<sup>4</sup> (électrons, quarks, ...) et d'autre part que, si les interactions fondamentales peuvent se produire, c'est grâce à l'échange de bosons (*bosons-vecteurs*) entre les particules de matière (par exemple, le photon est le vecteur de la familière interaction électromagnétique).

Je laisserai ici de côté des banalités que vous connaissez bien et qui, justement, pourraient faire croire que seuls les phénomènes microscopiques sont justifiables de cette théorie : la physique des hautes énergies, celle du noyau atomique

<sup>1</sup> <https://indico.in2p3.fr/event/12114/material/slides/51>.

<sup>2</sup> Philip Warren Anderson, "More Is Different", Science **177**, 393 (1972).

<sup>3</sup> On présente parfois le spin comme le moment cinétique d'une petite sphère en rotation ; on sait maintenant que cette image, fondée sur l'idée que l'électron (chargé !) est une petite bille qui tourne sur elle-même, et inspirée historiquement par analogie avec le *spin* de la Terre résultant effectivement de sa rotation diurne, ne tient pas : une particule *élémentaire* possède un spin alors que, parce qu'elle est élémentaire, elle est ponctuelle ; un point qui tourne sur lui-même, cela n'a pas de sens !

<sup>4</sup> Bien évidemment, un nombre *pair* de fermions constituent un objet matériel composite qui est un boson. L'atome d'hydrogène H est un boson (tout comme celui de tritium) mais celui de deutérium est un fermion.

et de ses constituants, celle des atomes et des molécules et même d'un très long polymère sont inévitablement les premières raisons d'être de la théorie quantique – l'histoire n'est pas seule à en attester – mais, de loin, de très loin, elles ne sont pas les seules. Ce bref inventaire des espèces constituant l'infiniment petit est le champ d'investigation de disciplines aux objectifs divers ; par exemple la spectroscopie de toute nature ( $\gamma$ , X, UV, visible, IR, hertzienne,...) vise à remonter à la dynamique ou à la structure en partant de la susceptibilité de l'objet (noyau, atome ou molécule) à un rayonnement de fréquence donné, la chimie quantique, elle, a notamment pour objectif de relier la réactivité d'une molécule à ses constituants intimes (effet d'un substituant par exemple) ou à sa conformation, enfin, la théorie des collisions permet de traquer le comportement le plus intime des particules, élémentaires ou non, stables ou instables. Tout ceci sans parler des tests divers de la théorie quantique elle-même qui sont aujourd'hui le plus souvent accomplis en physique atomique grâce à des techniques de piégeage d'un très petit nombre d'atomes... ou de photons<sup>5</sup>.

Au contraire, parce que le macroscopique s'effondrerait sans les règles qui sont le fondement de la robustesse intrinsèque du microscopique et parce que sans la théorie quantique ce macroscopique serait lui-même pathologique, l'accent sera mis sur des problématiques physiques pour lesquelles l'intuition, voire le bon sens, tendraient à remiser cette théorie quand on l'attend le moins, au motif qu'elle n'est pas pertinente pour des systèmes qui, à première vue, ne semblent pas relever pas de l'infiniment petit. D'une façon générale, j'insisterai notamment sur ce que l'on appelle parfois des *effets quantiques macroscopiques*, expression qui, selon moi, est tout à la fois ambiguë, trompeuse et restrictive<sup>6</sup> puisque finalement *tout* ce qui est macroscopique relève aussi, de près ou de loin, de la théorie quantique : que l'on doive faire appel à elle ou non est une tout autre question – celle du réductionnisme, évoquée plus haut.

En tout cas, je n'aborderai pas les *applications pratiques* de la théorie quantique, au sens où l'on entend usuellement ce terme. Elles sont innombrables, parfois même fort inattendues, et chacun sait qu'elles ont envahi notre quotidien dans presque tous les domaines, parfois à notre insu. Sans cette théorie, les lasers ne seraient pas devenus des outils précieux pour l'industrie civile (ou militaire), nos ordinateurs tiendraient encore à peine dans un hangar comme du temps de l'opération Manhattan, les disques durs n'auraient pas la capacité phénoménale que nous leur connaissons, il n'y aurait pas d'horloges atomiques et donc point de GPS à la précision métrique et il faudrait une remorque de poids lourd pour promener avec nous le *smartphone* qui tient dans notre poche. Sans elle aussi, nous ne connaîtrions pas la prodigieuse imagerie médicale qui permet de guérir des maladies, soigner des pathologies et sauver des vies. La liste de ces applications est sans fin et, à n'en pas douter, ne cessera de s'allonger au fil du temps.

Avant d'aborder vraiment quelques illustrations de la théorie quantique, il est utile de rappeler brièvement en quoi cette théorie toujours révolutionnaire malgré son grand âge possède une robustesse et une efficacité lui donnant une place de choix dans le Panthéon des théories physiques, toutes propriétés que résume si bien la formule de Roger Penrose mise en exergue de la conférence d'il y a quelques jours.

<sup>5</sup> En 1952, Schrödinger écrivait : "... *we never experiment with just one electron or atom. In thought experiments we sometimes assume we do ; this invariably entails ridiculous consequences.*" Et pourtant...

<sup>6</sup> On voit souvent écrit que la supraconductivité d'un métal, ou la superfluidité de l'hélium, sont des effets quantiques macroscopiques ; mais la conductivité d'un métal normal, propriété macroscopique s'il en est, n'est pas moins quantique ! (voir sous-section 3.1).

## 2 Robustesse de la théorie quantique (TQ)

Dans cette conférence, j'ai rappelé quelques unes des expériences cruciales qui, historiquement parlant, ont exigé une remise à plat dès qu'il s'agissait de comprendre le monde à l'échelle atomique, et comment la naissance puis l'élaboration progressive de la TQ ont permis de résoudre les énigmes les unes après les autres. Ici, je vais me borner à esquisser quelques idées, expériences ou phénomènes moins anciens qui, au fil des décennies, ont construit la conviction que les physiciens tenaient une bonne théorie et se retrouvaient ainsi dans la nécessité d'admettre des faits déroutants, voire incompréhensibles, donnant toute leur vigueur à ces mots de Feynman<sup>7</sup> “[Quantum mechanics] describes nature as absurd from the point of view of common sense. And yet it fully agrees with experiment. So I hope you can accept nature as She is – absurd.”

### 2.1 Le “paradoxe” EPR, les inégalités de Bell et la prouesse d’Alain Aspect *et al*

En 1935, Einstein, Podolsky et Rosen<sup>8</sup> ont décrit une expérience mentale leur permettant de conclure que, suivant *leur* définition de la réalité physique, la théorie quantique n'est pas *complète* au sens où elle ne répond pas à toutes les attentes qu'un physicien peut légitimement se forger et laisse dans l'ombre des variables qui selon eux doivent avoir toute leur place dans la description des lois gouvernant le monde observable. Depuis et tout naturellement, ces variables sont traditionnellement appelées *variables cachées*<sup>9</sup>.

Même si cet article a suscité quelques discussions à l'époque (en particulier avec Bohr<sup>10</sup>), les choses en sont essentiellement restées là jusque vers 1960, période pendant laquelle la TQ n'a d'ailleurs cessé d'accumuler les succès et les preuves de sa véracité. Une étape très importante fut franchie en 1964, lorsque John Bell<sup>11</sup> démontra certaines inégalités remarquables qui donnaient le moyen aux expérimentateurs de trancher la question de savoir ce qu'il en était. La technologie expérimentale ne permettant pas encore de mettre le problème à l'épreuve, il fallut attendre le début des années quatre-vingt pour que les premières expériences soient tentées. Et c'est finalement en 1982 qu'Alain Aspect et ses collaborateurs à Orsay ont su réaliser<sup>12</sup> l'expérience reconnue depuis comme irréfutable et attestant que *si* l'on doit désigner un vainqueur entre le trio EPR et la TQ, c'est la TQ qui l'emporte et voit ainsi confirmée l'une de ses très surprenantes bizarreries, sa *non localité* intrinsèque<sup>13</sup>.

<sup>7</sup> Richard P. Feynman, *QED : The Strange Theory of Light and Matter*, Princeton University Press, 1985.

<sup>8</sup> Albert Einstein, Boris Podolsky et Nathan Rosen, “Can Quantum Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?”, *Physical Review* **47**, 777 (1935).

<sup>9</sup> Pour en savoir plus sur ces variables, voir : Nathaniel David Mermin, “Hidden variables and the two theorems of John Bell”, *Reviews of Modern Physics* **65**, 803 (1993) et sa version actualisée “Hidden variables and the two theorems of John Bell”, <https://arxiv.org/pdf/1802.10119.pdf>.

<sup>10</sup> Niels Bohr, “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?”, *Physical Review* **48**, 696 (1935).

<sup>11</sup> John S. Bell, “On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox”, *Physics*, **1**, 195 (1964).

Voir aussi Lorenzo Maccone, “A simple proof of Bell’s inequality”, *American Journal of Physics* **81**, 854 (2013) et le tome 2 de mon ouvrage *Mécanique quantique*, section 21.5 (4<sup>e</sup> édition, De Boeck Supérieur, 2018).

<sup>12</sup> Alain Aspect, Jean Dalibard et Gérard Roger, “Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment : A New Violation of Bell’s Inequalities”, *Physical Review Letters* **49**, 91 (1982).

<sup>13</sup> À propos des conséquences de la non localité de la TQ, Einstein parla de “spooky action at a distance”.

Une fois encore, mais il en va toujours ainsi en physique, c’est l’expérience qui a joué le rôle du juge de paix et, en la circonstance, elle a eu une importance considérable en renforçant la TQ dans ce qu’elle a peut-être de plus déroutant et qui est une conséquence de sa *non localité*, une propriété qui lui est propre, la projette en dehors du cercle des théories physiques *ordinaires*<sup>14</sup> et qui, de plus, force à admettre ce qui semble un truisme mais qui, de loin, n’en est pas un : “*Une mesure non faite n’a pas de résultat*”<sup>15</sup>, façon sibylline de dire qu’*avant* toute expérience révélant la valeur d’une certaine grandeur physique, cette grandeur n’a pas de valeur définie<sup>16</sup> et, notamment n’a pas celle révélée par la mesure – d’où la nécessité du postulat de réduction du paquet d’ondes. Tout physicien classique y perdrait son latin ; ceux d’aujourd’hui en sont encore souvent ahuris, mais l’expérience est là pour les aider à accepter leur stupéfaction... et à vivre avec.

## 2.2 Le “paradoxe” du chat de Schrödinger

Tout le monde a entendu parler de l’expérience mentale imaginée par Schrödinger<sup>17</sup>, le plus souvent présentée de façon tellement rudimentaire, voire simpliste, qu’elle donne l’impression au grand public, voire à des étudiants à demi assoupis, que les physiciens arc-boutés sur leur théorie quantique ont vraiment perdu la boule.

Pour Schrödinger, il s’agissait manifestement de montrer son (relatif) désaccord avec le contenu physique attribué à la théorie qu’il avait construite en parallèle avec Heisenberg, et il est certain que le recours à la description d’une expérience spectaculaire a pour cela une indiscutable efficacité. Quant à la question de savoir si Schrödinger a vraiment cru à la possibilité d’écrire un Hamiltonien pour son chat ou une fonction d’onde pour décrire celui-ci<sup>18</sup> – une nécessité pourtant pour que l’argument soit recevable –, nul ne le sait mais il est plus que permis d’en douter !

Bien évidemment, ce dont parle Schrödinger est éminemment paradoxal puisque nul n’a jamais vu un chat à la fois mort et vivant et pour cause, un chat à la fois mort et vivant ça n’existe pas, tout comme “*Une fourmi de dix-huit mètres... Ça n’existe pas*”<sup>19</sup>. Tout comme n’existe pas non plus le physicien capable de seulement concevoir la fonction d’onde d’un organisme vivant, qu’il soit unicellulaire ou de la taille d’un titanosaure, de surcroît inséparable de son environnement où il trouve les ressources lui permettant de survivre.

Ceci réalisé et admis, le paradoxe semble s’effondrer sur lui-même ; en réalité, la discussion précise repose sur une question : *Dans quelle mesure un système macroscopique peut-il présenter des propriétés quantiques ?* ou encore

<sup>14</sup> La question de la localité a été débattue lors des *Rencontres* en 2013 ; ma contribution sur ce sujet est disponible à l’adresse <https://indico.in2p3.fr/event/7293/material/slides/58.pdf>.

<sup>15</sup> Asher Peres, “*Unperformed experiments have no result*”, *American Journal of Physics* **46**, 745 (1978).

<sup>16</sup> Comme si, pendant qu’elle virevolte en l’air, la pièce n’avait ni côté pile, ni côté face...

<sup>17</sup> Erwin Schrödinger, “*Die gegenwertige Situation in der Quantenmechanik*”, *Die Naturwissenschaften* **23**, 807 (1935) ; *ibid.* 823 ; *ibid.* 844 (traduction par John D. Trimmer : *Proceedings of the American Philosophical Society*, **124**, 323 (1980)). Voir aussi : Erwin Schrödinger, “*The Present Status of Quantum Mechanics*”, *Die Naturwissenschaften* **23**, 48 (1935).

<sup>18</sup> En fait, dans le cas du chat de Schrödinger il faut introduire les états quantiques de la fiole de poison (?) pour en faire le produit tensoriel avec les états du chat, déterminer l’opérateur densité réduit du chat, etc...

<sup>19</sup> Robert Desnos, “*Chantefables et Chantefleurs*”. À noter que le poème se termine par “*Et pourquoi pas ?*”...

Quel est son degré de quantumness ? Une revue très récente<sup>20</sup> permet de saisir la complexité de cette question et de constater les nombreux débats auxquels elle donne encore lieu de nos jours – discussion débordant très largement du cadre de la présente contribution.

Cela étant, si le statut du chat de Schrödinger est encore le sujet de controverses, qu'en est-il des petits chats, des chatons si petits qu'ils sont manipulables au laboratoire, à des températures d'ailleurs si basses (quelques  $\mu\text{K}$  ou beaucoup moins !) que tout vrai chat serait depuis longtemps passé de vie à trépas ? Eh bien ils obéissent à la TQ ! Le prouvent des expériences diverses comme celle d'Aspect ou celles conduites par Serge Haroche<sup>21</sup> et ses collaborateurs à l'ENS où il n'est pas vraiment question de petits animaux, sauf à considérer que des paires de photons intriqués appartiennent à une nouvelle espèce vivante ayant jusqu'à présent échappé à l'attention des entomologistes spécialisés dans l'étude des insectes les plus minuscules.

Bien évidemment, ce qui précède ne peut pas et ne prétend pas répondre à toutes les interrogations. En fait, la question de fond sous-jacente, naturelle et légitime, est en effet pourquoi il existe une différence de comportement si radicale entre une boule de billard et une particule, élémentaire ou non. S'agissant des "gros" systèmes, une question majeure est notamment de pouvoir les considérer dans la pratique comme complètement dissociables de leur environnement, ce qui peut se révéler une vue de l'esprit totalement irréaliste : il en va évidemment ainsi pour un chat qui, avant de mourir et pour se maintenir en vie, a heureusement la possibilité de se nourrir, de respirer... et donc est en interaction forte avec un environnement nullement pris en compte dans la présentation habituelle du "paradoxe" posé par Schrödinger.

En arrière-plan se dessine aussi plus précisément la question de la transition quantique  $\rightarrow$  classique, question à laquelle la théorie de la décohérence<sup>22</sup> a apporté quelques lumières, sans toutefois pouvoir échapper à une spécificité unique de cette transition, à savoir qu'elle apparaît hautement singulière quand on regarde de près la nature particulière des objets mathématiques qui la pilotent<sup>23</sup> ; cette singularité se manifeste le plus souvent par un comportement très accidenté de ces objets, au point que l'on ne peut proprement les analyser physiquement qu'en ajoutant un grain de sel inspiré par les bonnes échelles physiques : par exemple, dans le cadre des théories actuellement éprouvées, des oscillations spatiales survenant sur une échelle de  $10^{-15}$  fermi n'ont strictement aucun sens<sup>24</sup>, même en physique des hautes énergies, et se doivent d'être lissées à la main !

## 2.3 La téléportation quantique

La téléportation quantique appartient à cet ensemble d'effets quantiques qui semblent relever de la pure science-fiction<sup>25</sup> et qui pourtant, prévus dans le formalisme quantique et observés au laboratoire (ou à plus grande échelle), témoignent

<sup>20</sup> Florian Fröwis, Pavel Sekatski, Wolfgang Dür, Nicolas Gisin et Nicolas Sangouard, "Macroscopic quantum states : measures, fragility and implementations", <https://arxiv.org/pdf/1706.06173>.

<sup>21</sup> Michel Brune, Serge Haroche, Jean-Michel Raimond, Luiz Davidovich et Nicim Zagury, "Manipulation of photons in a cavity by dispersive atom-field coupling : Quantum-nondemolition measurements and generation of "Schrödinger cat" states", Phys. Rev. A **45**, 5193 (1992).

<sup>22</sup> Erich Joos, Hans Dieter Zeh, Claus Kiefer, Domenico Giulini, Joachim Kupsch et Ion Olimpiu Stamaescu, *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory* (Springer, Berlin, 2007).

<sup>23</sup> Ces objets sont des fonctions analytiques  $f(z)$  possédant une *singularité essentielle* à l'origine  $z=0$  du plan complexe, au contraire de celles qui sont impliquées par exemple dans la limite relativité restreinte  $\rightarrow$  relativité galiléenne et qui sont analytiques dans le disque  $|v| < c$ .

<sup>24</sup> Rappelons que la longueur de Planck est d'environ  $10^{-20}$  fermi.

<sup>25</sup> L'effet tunnel en est un autre, l'effet Zénon aussi (section 2.4), .....

à leur façon des mystères quantiques et de leur omniprésence dans les phénomènes naturels.

On sait que, selon la TQ et dans la situation la plus simple, l'état d'un système est entièrement décrit par une fonction d'onde  $\Psi$  ou, de façon équivalente, par un vecteur d'état  $|\Psi\rangle$  appartenant à un certain espace vectoriel  $\mathcal{E}$ . Ainsi, pour une particule de spin  $\frac{1}{2}$ , cet espace est de dimension égale à 2, dont une base est formée par deux vecteurs que l'on peut désigner par  $|\uparrow\rangle$  et  $|\downarrow\rangle$ , ou par  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$  si l'on veut être plus "moderne" et pouvoir parler de *qubits*. L'état le plus général pour cette unique particule, noté  $|\Psi^{(1)}\rangle$ , est un certain vecteur de  $\mathcal{E}$  et admet donc une décomposition du type :

$$|\Psi^{(1)}\rangle = c_{\uparrow}^{(1)}|\uparrow\rangle + c_{\downarrow}^{(1)}|\downarrow\rangle, \quad (c_{\uparrow}^{(1)}, c_{\downarrow}^{(1)}) \in \mathbb{C}^2, \quad (1)$$

où le caractère *complexe* des scalaires  $c_{\uparrow\downarrow}^{(1)}$  est essentiel. Si le système est composé non pas d'un mais de deux spins, l'espace  $\mathcal{E}$  est de dimension  $2^2 = 4$  et une base possible est<sup>26</sup>  $|\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle$  et  $|\downarrow\downarrow\rangle$  avec maintenant l'état le plus général :

$$|\Psi^{(12)}\rangle = c_{\uparrow\uparrow}^{(12)}|\uparrow\uparrow\rangle + c_{\downarrow\uparrow}^{(12)}|\downarrow\uparrow\rangle + c_{\uparrow\downarrow}^{(12)}|\uparrow\downarrow\rangle + c_{\downarrow\downarrow}^{(12)}|\downarrow\downarrow\rangle. \quad (2)$$

Quand les coefficients  $c_{\alpha\beta}^{(12)}$  sont quelconques, il est bien clair que les deux particules sont *inséparables* au sens où l'état  $|\Psi^{(12)}\rangle$  n'est pas de la forme  $|\Psi^{(1)}\rangle \otimes |\Psi^{(2)}\rangle$ , chaque  $|\Psi^{(i)}\rangle$  étant de la forme (1) : il n'en est ainsi que si ces coefficients sont certains produits,  $c_{\uparrow\uparrow}^{(12)} = c_{\uparrow}^{(1)}c_{\uparrow}^{(2)}$ ,  $c_{\downarrow\downarrow}^{(12)} = c_{\downarrow}^{(1)}c_{\downarrow}^{(2)}$  etc, comme on le voit en développant le produit  $|\Psi^{(1)}\rangle \otimes |\Psi^{(2)}\rangle$ , chaque  $|\Psi^{(i)}\rangle$  étant donné par le développement (1). Ainsi, dans le cas général, deux particules sont indissociables l'une de l'autre et restent fortement corrélées même si elles n'interagissent pas (ou plus) l'une avec l'autre au sens ordinaire<sup>27</sup> : on dit qu'elles sont *intriquées*<sup>28</sup>, et c'est de toute évidence le cas le plus *banal* ; par exemple, pour les deux électrons de l'atome d'hélium, l'état normalisé de spin total ayant une projection nulle le long de l'axe de quantification est  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle \pm |\downarrow\uparrow\rangle)$ , avec + pour le triplet, – pour le singulet. En définitive, deux systèmes sont *intriqués* ssi leur vecteur d'état est un produit tensoriel *non factorisable* (allez écrire cela dans une revue grand public !)

Pour l'instant il n'a été question que d'algèbre. Imaginons maintenant deux spins  $\frac{1}{2}$  partant chacun très loin l'une de l'autre, entrant en collision puis repartant à l'infini chacun de son côté. Même si l'on suppose au départ que chaque spin est dans un état bien défini, par exemple si l'état initial de la paire est  $|\downarrow\uparrow\rangle \equiv |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle$ , leur interaction va faire évoluer le vecteur d'état du système global en une combinaison linéaire du type (2) avec des coefficients que l'on peut en principe calculer grâce à l'opérateur d'évolution. Des lois de conservation peuvent intervenir, par exemple celle de la conservation du spin total, de sorte que l'état final ne contient pas forcément les 4 termes ; c'est ainsi que l'on peut fort bien avoir, par exemple :

$$t = -\infty : |\downarrow\uparrow\rangle \quad \longrightarrow \quad t = +\infty : \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + e^{i\alpha}|\downarrow\uparrow\rangle) \quad (\alpha \in \mathbb{R}), \quad (3)$$

imposant la conséquence assez stupéfiante : même quand elles sont reparties à l'infini l'une de l'autre, les deux particules sont dans un état intriqué et donc continuent à former *un et un seul* système puisqu'il est impossible de séparer en

<sup>26</sup>  $|\downarrow\uparrow\rangle$  désigne très précisément le produit tensoriel  $|\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle$ .

<sup>27</sup> C'est d'ailleurs ce qui, dans ces écritures, permet de donner un sens physique clair aux états de base introduits. Quand il existe une interaction au sens ordinaire, les états "nus" n'ont pas réellement de signification physique en tant que tels au vu des postulats de la TQ.

<sup>28</sup> En anglais *entangled*. Schrödinger fut semble-t-il le premier à employer le mot *Vershränkung*, dans son article "Discussion of probability relations between separated systems", Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **31**, 555 (1935).



un simple produit les fragments mathématiques participant à la description de son état au sens de la TQ. Ceci bien sûr à condition qu’après leur séparation spatiale, aucun effet perturbateur incontrôlé n’intervienne, d’où l’extrême importance (et en pratique la difficulté) de *protéger* efficacement le système si l’on veut mettre en évidence l’intrication de deux de ses parties – et aussi, *a contrario*, le fait que quand aucune précaution n’est prise, ces parties retrouvent de fait chacune tôt ou tard leur individualité indépendamment l’une de l’autre, interdisant une vision holistique de tout ce qui constitue l’univers<sup>29</sup> !

C’est cette non séparabilité soigneusement protégée de deux objets  $A$  et  $B$  qui permet d’envisager la téléportation quantique grâce à l’intervention d’un troisième larron, appelé  $E$ . Imaginons que  $E$  entre en interaction avec l’une des deux (celle qui est restée à proximité de l’expérimentateur),  $A$  par exemple : cette perturbation va affecter  $A$  “localement”, et notamment lui permettre de percevoir l’état de  $E$  ; comme la particule  $A$  est intriquée avec  $B$  pourtant partie à l’infini, l’état de  $B$  va également s’en trouver *ipso facto* modifié, et ce instantanément : en un sens, une caractéristique de  $E$  (son état) se répercute à distance immédiatement sur  $B$  et c’est pourquoi il est possible de parler vraiment de *téléportation*.

Tout ceci est fort troublant et peut même forcer la conclusion d’une violation de la relativité qui affirme l’impossibilité de transmission instantanée à distance. En fait, rien n’est “transmis” à proprement parler, aucun signal d’aucune sorte ne se propage d’un endroit à l’autre, tout se passe au sein d’un unique système qui est une sorte de boîte noire dont l’intérieur est inobservable tant qu’on le laisse vivre sa vie sans aller y voir de plus près, les propriétés de la paire ne se réduisant pas à la simple réunion des propriétés des deux partenaires. Tout au plus, si l’on tient absolument au langage ordinaire, peut-on parler de transmission à distance d’une structure immatérielle (l’état révélé de l’une se répercute instantanément sur l’état de l’autre), ce qui n’est sans doute pas très éclairant mais a le mérite de ne colporter aucune fausse image ou contrevérité au sens expérimental du terme...

De la science-fiction ? Non ! Une fois de plus l’expérience est venue prouver que c’est de la science, tout simplement. La première *manip*’ a été réalisée par Zeilinger<sup>30</sup> en 1997, sur une distance de quelques mètres. Depuis, la course au record était lancée ; tout récemment, une équipe chinoise<sup>31</sup> affirme avoir effectué une téléportation sur... 1 200 km.

## 2.4 L’effet Zénon quantique

Cet effet a été prévu théoriquement par Misra et Sudarshan<sup>32</sup> et repose sur une idée simple : étant donné que la mesure d’une observable réduit le paquet d’ondes

<sup>29</sup> On imagine sans peine que des charlatans de toute espèce récupèrent la notion d’intrication – l’une de leurs proies favorites – et intoxiquent le grand public en tentant de lui faire prendre des vessies pour des lanternes... Pour en avoir un aperçu lumineux et non exhaustif, voir : Richard Monvoisin, *Quantox : Mésusages idéologiques de la mécanique quantique*, Book-e-book.com (2013). Voir aussi : Cl. A. : “*Théorie quantique et médecine : le point de vue d’un physicien*”, *Hegel* **6**(2), 130 (2016), disponible à [http://documents.irevues.inist.fr/bitstream/handle/2042/60007/HEGEL\\_2016\\_2\\_6.pdf?sequence=1&isAllowed=y](http://documents.irevues.inist.fr/bitstream/handle/2042/60007/HEGEL_2016_2_6.pdf?sequence=1&isAllowed=y).

<sup>30</sup> Dik Bouwmeester, Jian-Wei Pan, Klaus Mattle, Manfred Eibl, Harald Weinfurter et Anton Zeilinger, “*Experimental quantum teleportation*”, *Nature* **390**, 575 (1997)

<sup>31</sup> Juan Yin, Yuan Cao, Yu-Huai Li, Sheng-Kai Liao<sup>1</sup>, Liang Zhang, Ji-Gang Ren, Wen-Qi Cai, Wei-Yue Liu, Bo Li, Hui Dai, Guang-Bing Li Qi-Ming Lu, Yun-Hong Gong, Yu Xu, Shuang-Lin Li, Feng-Zhi Li, Ya-Yun Yin, Zi-Qing Jiang, Ming Li, Jian-Jun Jia, Ge Ren, Dong He, Yi-Lin Zhou, Xiao-Xiang Zhang, Na Wang, Xiang Chang, Zhen-Cai Zhu, Nai-Le Liu, Yu-Ao Chen, Chao-Yang Lu, Rong Shu, Cheng-Zhi Peng, Jian-Yu Wang, Jian-Wei Pan, “*Satellite-based entanglement distribution over 1200 kilometers*”, *Science* **356**, 1140 (2017).

<sup>32</sup> Baidyanath Misra et Ennackal Chandy George Sudarshan, “*The Zeno’s paradox in quantum theory*”, *Journal of Mathematical Physics* **18**, 756 (1977).

en le projetant sur l'état propre associé à la valeur révélée par cette mesure, une succession rapide de mesures tend à ralentir la dynamique propre du système. À la limite de mesures infiniment rapprochées les unes des autres, l'évolution est bloquée, le mouvement est gelé et renvoie au paradoxe de Zénon d'Élée qui tendait à montrer que le mouvement de tout objet dans l'espace est impossible.

Prévu théoriquement, à peine plus d'une décennie a suffi pour que cet effet remarquable soit observé au laboratoire, l'exploit revenant à Itano *et al*<sup>33</sup> qui ont d'une part réalisé une certaine expérience impliquant un petit nombre d'ions  $\text{Be}^+$  possédant trois niveaux effectifs, d'autre part en ont donné la description théorique ; l'accord entre théorie et expérience est remarquable, justifiant que leur travail soit considéré comme la première mise en évidence de l'effet Zénon quantique. Sans avoir le temps de rentrer dans le détail<sup>34</sup>, je me borne à montrer le résultat principal de leur expérience, reporté sur la figure 1. *No comment...*

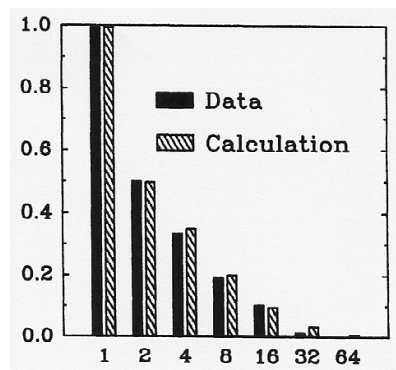


Figure 1: Comparaison entre mesures (*data*) et calculs théoriques (*calculation*) pour l'effet Zénon quantique. Horizontalement : nombre de mesures pendant un intervalle de temps donné ; verticalement : probabilité pour que le système quitte son état de départ (figure extraite de l'article cité dans la note 33).

### 3 Quelques problématiques macroscopiques pour lesquelles la TQ est essentielle

Abordons maintenant des questions pour lesquelles une perception un peu simpliste inciterait à reléguer la théorie quantique au rayon des accessoires au motif que si celle-ci traite magnifiquement de l'infiniment petit, sa pertinence ne s'impose pas pour les grands systèmes.

#### 3.1 La conductivité électrique des solides

Il y a peu de phénomènes aussi banals que la conductivité électrique d'un solide. Selon la nature de ce dernier, et grossièrement parlant, tout le monde sait que l'application d'une ddp donne lieu ou non au passage d'un courant électrique. Le cuivre est conducteur, le verre (et le diamant) sont isolants.

S'agissant plus particulièrement des métaux, la première description théorique de leur conductibilité est due à Drude en 1905. À l'aide d'un modèle très

<sup>33</sup> Wayne M. Itano, Daniel J. Heinzen, John J. Bollinger et David J. Wineland, "Quantum Zeno effect", *Physical Review A* **41**, 2295 (1990).

<sup>34</sup> Pour en savoir plus, voir Cl. A., *Mécanique quantique, tome 2*, 4<sup>e</sup> édition (De Boeck Supérieur, Louvain-la-Neuve, 2018), chapitre 21.



simple, celui-ci a obtenu l'expression de la conductivité d'un métal sous la forme suivante :

$$\sigma_{\text{Drude}} = n \frac{e^2 \tau}{m} ; \quad (4)$$

$n$  est le nombre d'électrons par unité de volume,  $e$  la charge de l'électron et  $m$  sa masse. Quant à  $\tau$ , c'est un certain temps, dit *de collision*, censé caractériser l'intervalle séparant deux collisions successives entre un électron mobile et les ions du réseau cristallin, typiquement de l'ordre de  $10^{-13}$  s. L'application numérique donne de fait, dans bien des cas, des valeurs assez satisfaisantes.

La formule de Drude résulte de la dynamique supposée newtonienne de l'électron considéré comme une petite bille exécutant une sorte de marche au hasard dans le réseau cristallin, à l'instar d'une boule de billard heurtant des obstacles fixés sur un tapis vert. De ce fait, l'émergence de la théorie quantique – avec notamment sa négation de la trajectoire pour un électron – a exigé une remise à plat complète du pourquoi de la conductivité. On va voir, résumant les fondements de l'explication, qu'il faut pour cela recourir à tout l'arsenal que la théorie quantique met à la disposition du physicien.

La toute première chose d'importance est le rôle capital joué par les considérations de symétrie. Dans la situation la plus aisée sur le plan de la description théorique, le solide est un cristal parfait, c'est-à-dire un solide possédant une symétrie de translation *discrète* puisqu'il se superpose à lui-même lorsque lui est appliquée une translation spatiale caractérisée par des vecteurs ayant tous une longueur *finie* ; pour cette raison, le champ de force subi par un électron possède lui aussi cette périodicité spatiale exprimant un ordre parfait à longue distance.

Cette propriété de symétrie démarque *qualitativement* le cristal de l'espace physique ordinaire où prévaut (notamment) une symétrie de translation *continue* (homogénéité de l'espace), traduite par l'existence d'un groupe continu incluant des transformations infinitésimales ; la symétrie discrète du cristal a des conséquences formelles multiples, la plus célèbre étant sans doute le théorème de Bloch, qui contraint fortement les solutions de l'équation aux valeurs propres au point de provoquer la fragmentation de la relation de dispersion d'un électron dans le solide : au lieu de suivre une simple loi parabolique,  $\varepsilon = \frac{(\hbar \vec{k})^2}{2m}$  – comme c'est le cas dans l'espace vide –, la variation de l'énergie de cet électron en fonction de son impulsion<sup>35</sup> s'illustre par une parabole brisée en arcs disjoints, et ce à des valeurs régulièrement espacées et bien déterminées de la (pseudo-)impulsion  $\hbar \vec{k}$  (voir figure 2).

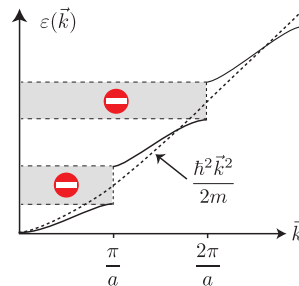


Figure 2: Allure schématique de la relation de dispersion d'un électron dans un réseau unidimensionnel de pas  $a$ . La ligne en tirets est la parabole de l'électron dans l'espace vide. Les discontinuités de  $\varepsilon$  constituent les *gaps* d'énergie. Le domaine ici situé entre  $\pm \frac{\pi}{a}$  est traditionnellement appelé *1<sup>ère</sup> zone de Brillouin*.

<sup>35</sup> Pour des raisons qu'il n'est pas nécessaire d'explicitier ici, il s'agit plus précisément d'une pseudo-impulsion.

Il en résulte que lorsque l'on parcourt l'axe des énergies, on trouve des intervalles correspondant à des valeurs possibles, séparés par des *gaps* d'énergie (variable)  $E_g$  à l'intérieur desquels il n'existe pas d'états pour un électron : c'est ce que l'on traduit par des mots en parlant de bandes *permises* et de bandes *interdites*.

Un autre point capital est le fait que l'électron est un fermion ; en tant que tel et soumis au principe de Pauli, deux électrons de même spin ne peuvent être placés dans le même état quantique. Un état orbital quelconque d'une bande permise ne peut ainsi recevoir que deux électrons de spins contraires ; une fois rempli, et si d'autres électrons doivent être casés quelque part, il faut les placer dans un autre état de cette bande. En d'autres termes, une fois épuisé le stock d'électrons disponibles, il y a deux possibilités, et deux seulement, lorsqu'il s'agit de construire l'état fondamental du gaz d'électrons dans le cristal :

1. ou bien la plus haute bande occupée est pleine,
2. ou bien la plus haute bande occupée est partiellement remplie.

Sachant que, sous l'effet d'un champ électrique extérieur, un électron ne peut augmenter son énergie que d'une quantité minuscule<sup>36</sup> comparée à  $E_g$ , on voit que dans le premier cas il ne peut rien se passer et aucun courant n'apparaît : le solide est isolant. Au contraire, dans le deuxième cas, les électrons situés à la surface de la mer de Fermi ont à proximité immédiate des états d'énergie qui sont inoccupés, qu'ils peuvent donc atteindre, donnant alors lieu à un courant électrique et le solide est conducteur.

Tout ceci suppose que l'on est à température nulle, et fournit tout d'abord l'explication de la distinction majeure entre conducteur et isolant (ce que ne fait pas la théorie de Drude qui, d'emblée, considère un conducteur). À température finie, la situation est moins tranchée et tout dépend de la valeur  $E_g$  des *gaps* comparée à l'énergie thermique  $k_B T$  : lorsque  $E_g \sim k_B T$ , des électrons peuvent sauter par activation thermique du sommet de la plus haute bande pleine au creux de la bande vide la plus proche en énergie et on a alors un semi-conducteur (intrinsèque). En conséquence, la conductivité d'un tel solide *augmente* avec la température, au contraire de ce qui survient dans un métal dont c'est la résistivité qui croît avec  $T$  par suite de l'augmentation de l'amplitude des vibrations des ions du réseau et qui, de ce fait et en s'en remettant à une image, "prennent plus de place" dans l'espace, freinant ainsi plus efficacement les porteurs de charge.

Ceci acquis et en allant beaucoup plus loin, il est évidemment possible, moyennant un gros effort, d'arriver finalement à l'expression de la conductivité électrique d'un métal ; dans les cas les plus simples (cristal isotrope par exemple), elle est de la forme :

$$\sigma = n \frac{e^2 \tau}{m_{\text{eff}}} , \quad (5)$$

dont la similitude avec la formule de Drude (4) est frappante mais qui en diffère *essentiellement* par la grandeur  $m_{\text{eff}}$  appelée *masse effective* de l'électron. Ce paramètre est, comme pour une particule libre, l'inverse de la dérivée seconde de l'énergie par rapport à l'impulsion – ici c'est l'énergie donnée par la relation de dispersion<sup>37</sup> du type de celle représentée sur la figure 2. Sa présence au dénominateur permet de comprendre la course aux matériaux donnant aux

<sup>36</sup> Les champs électriques usuels du laboratoire sont microscopiques par rapport à un champ intra-atomique.

<sup>37</sup> Remarquer que la concavité de  $\varepsilon(\vec{k})$  n'est pas toujours positive : un électron peut fort bien avoir une masse effective... négative – d'où un phénomène remarquable connu sous le nom de *réflexion de Bloch* (voir la fin de la section 3.3).

porteurs une petite masse effective. Quant à  $\tau$ , on en obtient une signification précise en tant que temps de relaxation dans l'équation de transport due à Boltzmann, rejoignant et confirmant l'idée première de Drude d'un temps de collision entre deux impacts sur les ions du réseau dont les vibrations quantifiées sont caractérisées par des excitations correspondant à la création ou l'annihilation de *phonons*.

On aura noté comment tout l'arsenal quantique est nécessaire pour la compréhension du pourquoi de la conductivité électrique (rôle de la symétrie, principe d'exclusion). Certes, la formule finale (5) peut donner l'impression frustrante d'avoir abattu beaucoup de travail pour ne retrouver que celle de Drude à un détail (!) près<sup>38</sup> mais il n'en est rien : d'une part l'apparition de la masse effective ouvre des horizons, d'autre part et surtout, on dispose maintenant d'une explication claire et convaincante de la distinction isolant-conducteur (à température nulle) et, à température finie, la justification de la classification plus fine introduisant en plus les semi-conducteurs (intrinsèques).

### 3.2 Le ferromagnétisme

Tout le monde sait qu'il existe des aimants permanents, c'est-à-dire des corps susceptibles de posséder une aimantation et capables de la conserver même en l'absence de tout champ magnétique appliqué (aimantation *spontanée*,  $\mathcal{M}$ ) ; le fer en est un exemple : au-dessous d'une certaine température (dite *de Curie*)  $T_C$  de l'ordre de 1000 K, il existe une aimantation *macroscopique* en champ nul ( $\mathcal{B} = 0$ ) dont on peut imaginer qu'elle résulte d'un ordre à longue distance de petits moments magnétiques microscopiques, tous alignés à peu près de la même façon.  $\mathcal{M}$  varie typiquement comme montré sur la figure 3.

Cet ordre est détruit à haute température pour produire une phase paramagnétique ayant toutes les caractéristiques que l'on rencontre communément dans les gaz ou les liquides dont les entités microscopiques possèdent un moment magnétique ; chacun de ces moments a tendance à s'aligner parallèlement au champ externe mais cette inclination est contrariée par les fluctuations thermiques ; il en résulte une orientation *moyenne*, conditionnée par le facteur de Boltzmann, produisant une aimantation macroscopique proportionnelle au champ appliqué (paramagnétisme dit *de Langevin*, ou *de Brillouin* quand on prend en compte la quantification du moment magnétique) et autorisant à définir une susceptibilité magnétique  $\chi$  apparaissant dans l'égalité  $\mathcal{M} = \chi\mathcal{B}$ . Si la théorie de Langevin<sup>39</sup> rendait bien compte d'un grand nombre d'observations, elle reposait sur le postulat de l'existence de moments magnétiques microscopiques sans nullement en questionner l'origine.

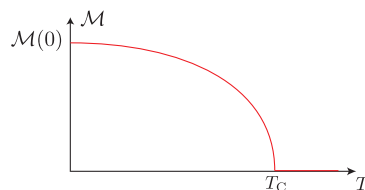


Figure 3: Variation typique de l'aimantation spontanée d'un ferromagnétique.  $T_C$  est la température critique au-dessus de laquelle le matériau est simplement paramagnétique.

<sup>38</sup> Noter aussi que, dimensionnellement parlant, on n'a guère de choix.

<sup>39</sup> Paul Langevin, "*Magnétisme et théorie des électrons*", Annales de Chimie Physique **5**, 70 (1905).

On peut attribuer à Ampère (1821) l’hypothèse suivant laquelle il existe au sein de la matière des “courants moléculaires” (*ampériens*) qui sont, à cette échelle, les clones infiniment petits des boucles de courant macroscopiques déjà utilisées au XIX<sup>ème</sup> siècle pour fabriquer des moteurs électriques. Cette vision du magnétisme, aussi plausible soit-elle, est malheureusement battue en brèche en physique classique pour des raisons variées, que l’on peut résumer dans le théorème de Miss van Leeuwen<sup>40</sup> établissant que si l’on applique toutes les règles de la physique (classique), aucune propriété de nature magnétique ne peut exister puisque toute moyenne thermique de l’aimantation ne peut être que nulle<sup>41</sup>.

La théorie quantique a permis de résoudre cette difficulté majeure grâce à l’introduction de la notion de *spin* ; l’expérience cruciale en la matière est celle de Stern et Gerlach<sup>42</sup> en 1921 qui a révélé que l’atome d’argent dans son fondamental, pourtant à symétrie sphérique, possède un moment magnétique intrinsèque sans aucun équivalent classique (et qui, de surcroît, est *quantifié*). Conservant alors la relation étroite entre moment magnétique et moment cinétique, on en vint peu à peu à conclure à l’existence, pour toute particule, d’un moment cinétique *propre* n’ayant rien à voir avec ce qui pourrait évoquer un quelconque mouvement dans l’espace<sup>43</sup> (ou une rotation sur elle-même).

Ceci étant acquis, le paramagnétisme de certains gaz au sens de Langevin trouvait une assise plus solide puisque l’énigme de l’origine des moments magnétiques microscopiques s’en trouvait élucidée. Par exemple celui de l’hélium, un atome tout petit, qui est paramagnétique dans certains de ses états excités ; l’explication ainsi fournie n’est pas seulement de nature qualitative, capable qu’elle est de donner l’ordre de grandeur des effets magnétiques responsables de cette propriété, ordre de grandeur qui est, de façon très surprenante, 1 000 à 10 000 fois plus élevé que les interactions magnétiques classiques (ayant aussi cependant leur transposition dans le cadre de la TQ) et dont l’origine n’est autre que l’interaction purement *électrostatique* entre deux électrons qui, en tant que fermions, sont soumis au principe de Pauli – encore une bizarrerie.

Cette difficulté résolue, il restait à trouver l’explication d’autres formes de magnétisme, en particulier du ferromagnétisme. Une première proposition, en un sens préquantique, fut le modèle proposé par Ising<sup>44</sup>, fondé sur l’hypothèse d’une certaine interaction à courte portée entre des moments magnétiques situés aux nœuds d’un réseau cristallin et défini par le Hamiltonien qui, en écriture d’aujourd’hui, a l’expression :

$$H_{\text{Ising}} = -J \sum_{\langle i, j \rangle} S_i S_j - \mu B \sum_i S_i ; \quad (6)$$

les  $S_i$  sont des variables classiques situées aux nœuds d’un réseau mais susceptibles de ne prendre que deux valeurs, par exemple  $\pm 1$ , la somme  $\langle i, j \rangle$  désignant une interaction réduite aux premiers voisins ;  $\mu$  est un moment magnétique élémentaire et  $J$  est une constante positive : de ce fait, l’énergie la plus basse

<sup>40</sup> Hendrika Johanna van Leeuwen, Dissertation, Leiden 1919, et “*Problèmes de la théorie électronique du magnétisme*”, Journal de physique **2**, 361 (1921)

<sup>41</sup> Schématiquement, l’argument est le suivant ; selon la vision classique, un moment magnétique est associé à une petite boucle de courant et dépend linéairement de la vitesse de la particule qui tourne. La moyenne thermique de la magnétisation se fait avec le poids de Boltzmann  $e^{-\beta H}$  et implique donc des intégrales du genre  $\int_{\mathbb{R}} e^{-\beta H} p dp$  ;  $H$  étant quadratique en  $p$ , l’intégrale est nulle par parité.

<sup>42</sup> Otto Stern et Walther Gerlach, “*Das Magnetische Moment des Silberatoms*”, Zeitschrift für Physik **9**, 353 (1922).

<sup>43</sup> C’est pourquoi il est parfois utile de bien marquer la différence entre moment cinétique *orbital* et moment cinétique *intrinsèque* (*spin*). Clairement, c’est l’association supposée entre moment magnétique et moment cinétique *orbital* qui conduit au théorème de Miss van Leeuwen et c’est bien pourquoi c’est le *spin* qui a sauvé la mise.

<sup>44</sup> Ernst Ising, “*Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus*”, Zeitschrift für Physik **31**, 253 (1925).

correspond au cas où tous les  $S_i$  prennent la même valeur ;  $\mathcal{B}$  représente un champ magnétique extérieur. Par une méthode *approchée* de champ moyen, Ising a montré qu'il existe une température critique  $T_C$  au-dessous de laquelle la magnétisation macroscopique  $\mu \sum_i S_i$  garde une valeur finie même dans la limite  $\mathcal{B} = 0$ , et cela indépendamment de la dimensionnalité du réseau. En réalité, la solution *exacte* à une dimension ( $D=1$ ), facile à obtenir, révèle que ce n'est pas le cas (plus précisément, on trouve  $T_C = 0$ ) ; quant à la solution à  $D=2$ , elle a été trouvée par Onsager<sup>45</sup> en 1944, grâce à un véritable tour de force mathématique, prouvant ainsi qu'il existe en effet alors une température critique finie  $T_C \sim \frac{J}{k_B}$ .

S'il n'y a rien de quantique dans tout cela, le modèle d'Ising conserve cependant toutes ses vertus ; notamment celle de montrer comment des interactions à *courte portée* permettent malgré tout d'engendrer un ordre à portée *infinie* – ce dont on doutait fort avant Onsager – pourvu que la dimensionnalité soit assez élevée et, finalement, de fournir un premier support théorique de poids pour la compréhension du ferromagnétisme.

Une fois la TQ construite, apportant l'ingrédient essentiel du spin, il était tentant de remplacer les variables classiques  $S_i$  par des spins  $\vec{S}_i$ , ce que fit Heisenberg en posant :

$$H_{\text{Heisenberg}} = -\hbar^{-2} J \sum_{\langle i, j \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j - \hbar^{-1} \mu \mathcal{B} \sum_i \vec{S}_i . \quad (7)$$

Cette fois, le problème est d'une encore plus redoutable difficulté puisque les variables sont maintenant des opérateurs ; si l'on maintient que  $\vec{S}_i$  et  $\vec{S}_j$  commutent quand  $i \neq j$ , il reste que les trois composantes de chaque  $\vec{S}_i$  satisfont les relations connues pour un moment cinétique,  $[S_{ix}, S_{iy}] = i\hbar S_{iz}$ , etc. et, comme toujours, cette non commutation rend le problème très ardu. Malgré cette difficulté, il a notamment été établi que ce modèle donne effectivement une transition para-ferro<sup>46</sup>, à  $D \geq 3$ .

Quoi qu'il en soit, la TQ commence par donner l'origine physique de la constante  $J$ , explication qui est exactement la même que celle obtenue pour l'atome d'hélium avec ses deux seuls électrons munis chacun de son spin. De plus, la non commutativité spécifiquement quantique confère au modèle de Heisenberg une richesse extraordinaire donnant lieu à des structures magnétiques très subtiles (antiferromagnétisme, héliomagnétisme,...) et à des effets inattendus comme la frustration. En outre, ce modèle montre l'existence d'excitations inédites appelées *magnons* qui contribuent fortement aux propriétés thermodynamiques à basse température et forment, à faible densité, un gaz de bosons. Cerise sur le gâteau : deux quelconques de ces magnons sont même susceptibles (au moins à<sup>47</sup>  $D=1$ ) de former des *molécules* dont on peut dire qu'elles sont les lointaines cousines des paires de Cooper à l'origine de l'effet supraconducteur (voir sous-section 3.4) ; si leur nature physique diffère profondément, le scénario théorique qui les rend possibles est quasiment le même dans les deux cas.

<sup>45</sup> Lars Onsager, "Crystal Statistics. I. A Two-Dimensional Model with an Order-Disorder Transition", Physical Review **65**, 117 (1944). Onsager a précisément trouvé  $k_B T_C = \frac{2J}{\sinh^{-1} 1}$  soit  $k_B T_C = \frac{2J}{\ln(1+\sqrt{2})} \simeq 2.269 J$ .

À l'heure actuelle, on ne connaît pas la solution analytique exacte à  $D > 2$  ; pour des raisons compréhensibles, on se doute que  $T_C$  augmente avec  $D$  (voir aussi la note 50).

<sup>46</sup> Freeman J. Dyson, Elliott H. Lieb et Barry Simon, "Phase Transition in the Quantum Heisenberg Model", Physical Review Letters **37**, 120 (1976).

<sup>47</sup> Comme souvent, l'unidimensionnalité facilite les choses sur le plan technique ; en particulier, on peut démontrer rigoureusement l'existence de ces paires liées de deux magnons grâce à une technique appelée *ansatz de Bethe* (voir Cl. A., *op. cit.* (note 11), chapitre 30). L'article original de Bethe ("Zur Theorie der Metalle", Zeitschrift für Physik **71**, 205 (1931)) a été traduit en anglais et est disponible à <https://homepages.dias.ie/dorlas/Papers/Bethe.pdf>.

### 3.3 La condensation de Bose-Einstein (BEC)

Il a été mentionné plus haut l'une des différences fondamentale entre fermions et bosons, à savoir que ces derniers peuvent se rassembler tous dans le même état pour former un état de la matière possédant des propriétés remarquables. Par exemple et comme l'a imaginé London<sup>48</sup>, la superfluidité de  $^4\text{He}$  survenant au-dessous de 2.17K pourrait être une manifestation macroscopique de cette extraordinaire condensation ; il faut toutefois noter que le mécanisme standard y conduisant implique essentiellement des bosons *sans interaction*, ce que ne sont sûrement pas les molécules d'un liquide qui, en quelque sorte, roulent les unes sur les autres, chacune ne pouvant de ce fait ignorer l'existence des autres.

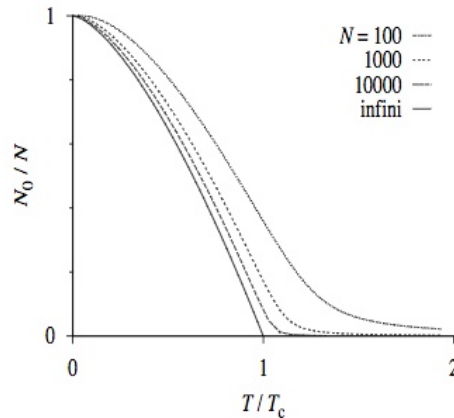


Figure 4: Pour un gaz parfait de bosons libres dans  $\mathbb{R}^3$ , variation de la fraction condensée en fonction de la température pour différentes valeurs de  $N$ . À la limite thermodynamique et pour  $T \leq T_C$ , on a  $\lim \frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_C}\right)^{3/2}$ .

Le fait est que c'est l'aspect grégaire des bosons – provenant fondamentalement de l'indiscernabilité des particules identiques en TQ – qui rend possible la condensation. Pour une assemblée de  $N$  bosons, le degré de celle-ci peut se mesurer par la fraction  $\frac{N_0}{N}$  de particules situées dans leur état fondamental ; pour des bosons non relativistes de masse  $m$ , sans interaction au sens classique (gaz parfait) et libres mais confinés dans un volume  $V$  plongé dans  $\mathbb{R}^3$ , sa variation théorique en température pour différentes valeurs de  $N$  est représentée sur la figure<sup>49</sup> 4 ;  $T_C$  est la température critique satisfaisant l'égalité suivante, obtenue strictement dans la limite (dite thermodynamique),  $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$ ,  $\frac{N}{V} = C^{\text{ste}} = \rho$  :

$$\rho \equiv \lim \frac{N}{V} = \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \left[ \frac{mk_B T_C}{2\pi\hbar^2} \right]^{\frac{3}{2}}, \quad (8)$$

où  $\zeta(z) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^z}$  est la définition élémentaire de la fonction de Riemann<sup>50</sup>. Il est instructif de raisonner avec la densité  $\rho$  et la longueur d'onde thermique d'un

<sup>48</sup> Fritz London (1938), “The  $\lambda$ -Phenomenon of Liquid Helium and the Bose-Einstein Degeneracy”, Nature **141**, 643 (1938).

<sup>49</sup> Cette figure est extraite de l'article “La condensation de Bose-Einstein dans les gaz” par Claude Cohen-Tannoudji, Jean Dalibard et Franck Laloë, [http://www.phys.ens.fr/~dalibard/publications/einstein\\_2005.pdf](http://www.phys.ens.fr/~dalibard/publications/einstein_2005.pdf), dont la lecture est très vivement recommandée. Pour une autre discussion générale des gaz d'atomes ultra-froids, voir la conférence de Dalibard, <http://www.phys.ens.fr/~dalibard/publications/UTLS.pdf>.

<sup>50</sup> Le 3 qui apparaît dans l'égalité (8) venant des 3 dimensions de l'espace ordinaire, la généralisation spontanée de l'argument classique à  $\mathbb{R}^D$  permet de suspecter qu'il n'y a pas de condensation à  $D=1, 2$  puisqu'alors la série de Riemann diverge, donnant  $T_C=0$  ; ce point est en fait assez subtil et a fait l'objet de maintes discussions dans la littérature. Pour en savoir plus sur la fonction de Riemann, voir par exemple Cl. A., *Des mathématiques pour les sciences* tomes 1



atome de masse  $m$  au sens de de Broglie, définie comme  $\lambda_T \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}$ , de sorte que l'égalité (8) se réécrit :

$$\rho\lambda_{T_C}^3 = \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \simeq 2.612 . \quad (9)$$

On voit ainsi que la transition se produit lorsque la longueur d'onde thermique associée devient du même ordre de grandeur que la distance moyenne entre atomes,  $d \stackrel{\text{def}}{=} \rho^{-1/3}$ , traduisant le fait que dans la phase condensée, les fonctions d'onde des différents atomes se chevauchent et que l'assemblée se comporte alors de façon *collective*.

Ce phénomène extraordinaire, découvert par Bose<sup>51</sup> et très vite mis en lumière par Einstein – d'où la terminologie associant les deux compères – a connu un regain d'intérêt spectaculaire dans les années 1990 en raison des progrès fulgurants accomplis pour piéger un gaz atomique à très basse température. Les expériences qui se sont succédé depuis ont permis de voir réellement comment cette condensation apparaît, formant un état de la matière où un grand nombre d'atomes se comportent collectivement comme s'ils formaient en quelque sorte un seul et unique méga-atome (la figure 5 en donne un exemple).

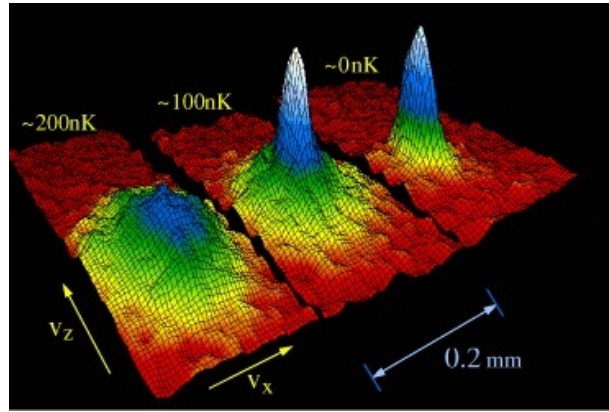


Figure 5: Distribution des vitesses au sein d'une vapeur contenant environ dix millions d'atomes de Rubidium refroidie de 200 à 20 nK (1 nK =  $10^{-9}$  K). À "haute" température (à gauche), on retrouve essentiellement la distribution de Boltzmann. Une fois passée la température critique  $T_C$ , le condensat de Bose-Einstein apparaît : c'est le pic central de plus en plus fin rassemblant les atomes dont les vitesses sont de moins en moins dispersées autour de la vitesse nulle ; ce groupe est immergé dans le bain des atomes non condensés et ayant de ce fait des vitesses distribuées aléatoirement (pour plus de détails, voir <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/quantum/rubbec.html>).

Ainsi, ces expériences remarquables ont permis de voir réellement et indiscutablement cette condensation, quelque 70 ans après sa découverte théorique par Bose et parachevée par Einstein. Une fois encore, l'expérience est venue jouer le rôle du juge de paix pour confirmer les extraordinaires prévisions de la

et 2 (De Boeck Supérieur, Louvain la Neuve, 2016).

À l'inverse, on voit que la température critique croît quand la dimension d'espace augmente, une tendance générale pour les transitions de phase, qu'elles soient classiques ou quantiques. Physiquement, ceci résulte du fait que les fluctuations (thermiques ou quantiques) ont tendance à casser l'ordre à longue distance et qu'elles sont de moins en moins pertinentes quand  $D$  augmente (couper un fil avec une paire de ciseaux est catastrophique, faire un trou avec une épingle dans un drap a peu de conséquences !).

<sup>51</sup>Satyendra Nath Bose, "Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese", *Zeitschrift für Physik* **26**, 178 (1924)

TQ, aussi étranges qu’elles puissent paraître et obliger les sceptiques<sup>52</sup> à croire définitivement qu’une telle condensation est effectivement possible.

Donnons un autre exemple, lui aussi emprunté à la physique atomique, sans rapport avec la condensation mais également devenu accessible à l’expérience, ici grâce aux progrès dans la maîtrise des jets atomiques ultra-froids quasi monocinétiques. Dans la note 37 p. 10, il est fait allusion à la réflexion de Bloch d’un électron quand il arrive en bord de bande (frontière de la première zone de Brillouin), sa masse effective devenant négative et sa vitesse s’inversant comme lors de la réflexion d’une bille sur un mur.

Il est remarquable que ce phénomène de réflexion a pu être observé *directement* en utilisant non un électron, mais un atome (de cæsium), et en plongeant un jet de tels atomes dans un potentiel périodique constitué par les ondes stationnaires de lasers judicieusement disposés et accordés<sup>53</sup>. Avec un tel appareillage, on maîtrise les paramètres du “cristal” qui n’est plus, comme dans un métal, celui imposé par Dame Nature et dont le pas est de l’ordre de l’angström, mais est choisi pour les besoins de l’expérience et est plusieurs milliers de fois plus grand (typiquement une longueur d’onde près de l’optique, 852 nm dans le cas du cæsium).

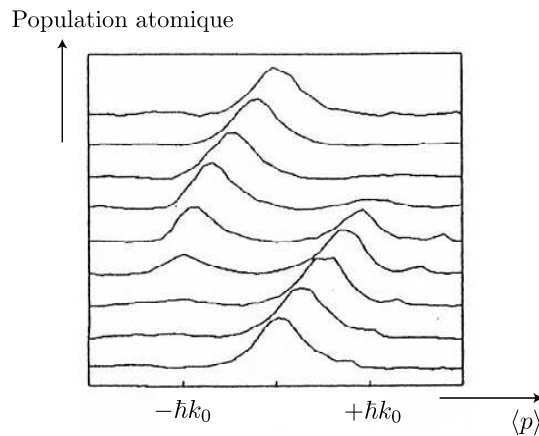


Figure 6: À intervalles réguliers, distribution statistique de la vitesse d’un atome accéléré par une force constante, montrant l’inversion de la vitesse lorsque l’atome arrive en bord de zone.

Partant d’un état de faible vitesse, on soumet les atomes du jet presque monocinétique à une force homogène et constante et on mesure la distribution des vitesses à intervalles réguliers ; la figure 6 montre clairement l’inversion de la vitesse (moyenne) au bout du temps nécessaire pour que, dans l’espace des (pseudo-)impulsions, celle des atomes partis en centre de zone ( $\langle p \rangle = 0$ ) atteigne la valeur correspondant à la frontière de la première zone de Brillouin et change alors de signe<sup>54</sup>.

D’autres expériences ont aussi permis, *mutatis mutandis*, de mettre en évidence directement des phénomènes initialement introduits en matière condensée mais observés cette fois de façon directe par une transposition spectaculaire des paramètres physiques, allant des valeurs présentes dans les systèmes

<sup>52</sup> Il convient de savoir que les prévisions de Bose et Einstein ont été accueillies à l’époque avec un fort scepticisme.

<sup>53</sup> Ekkehard Peik, Maxime Ben Dahan, Isabelle Bouchoule, Yvan Castin et Christophe Salomon, “Bloch oscillations of atoms, adiabatic rapid passage, and monokinetic atomic beams”, *Physical Review A* **55**, 2989 (1997).

<sup>54</sup> Pour un traitement théorique détaillé, voir Cl. A., *Mécanique quantique, tome 3*, problème 30.13 (De Boeck Supérieur, Louvain-la-Neuve, 2015).

naturels à d'autres fort différentes rendues possibles grâce à la mise en œuvre de réseaux optiques et à la maîtrise de températures ultra-basses. On peut ainsi citer l'observation des réseaux d'Abrikosov<sup>55</sup> que l'on connaît en supraconductivité et celle de la transition métal-isolant au sens de Mott<sup>56</sup>. Pour une revue des liens étroits entre la physique des atomes froids et divers aspects du problème à  $N$ -corps, on consultera l'article assez récent de Bloch *et al.*<sup>57</sup>.

### 3.4 La supraconductivité

La supraconductivité<sup>58</sup> est la propriété que possèdent certains métaux (mercure, aluminium, plomb,...) de présenter une résistivité *strictement nulle* à très basse température (quelques K pour les supras "historiques") ; le passage à l'état supraconducteur se produit brutalement à une certaine température critique  $T_C$ . Ici encore, il s'agit manifestement d'une propriété macroscopique, ici encore ce phénomène extraordinaire a trouvé une explication grâce à la TQ, plus de cinq décennies après sa mise en évidence expérimentale, grâce à la théorie BCS, acronyme de Bardeen, Cooper et Schrieffer<sup>59</sup>, théorie qui est sans doute l'une des plus belles du domaine quantique.

L'explication de ce phénomène assez stupéfiant a constitué un défi pour les physiciens pendant très longtemps. Au début des années cinquante, des approches pragmatiques et phénoménologiques furent proposées d'abord par London<sup>60</sup> puis par Ginzburg et Landau. Toutefois, et avec en ligne de mire le désir d'une théorie microscopique, une étape décisive a été franchie peu après grâce à Cooper, qui a prouvé<sup>61</sup> en 1956 que la mer de Fermi est instable vis-à-vis de la formation de paires liées d'électrons pourvu qu'il existe une interaction *attractive*, aussi petite soit-elle, entre ces deux électrons. Plus précisément, Cooper a montré comment ce fluide de Fermi constituait une sorte de bain essentiel grâce auquel des molécules d'électrons peuvent se former. Deux électrons formant un boson, l'assemblée de ces paires est susceptible de se condenser comme Bose l'a prévu : lorsque cette condensation se produit, le métal devient supraconducteur.

L'hypothèse de Cooper peut paraître farfelue : comment deux électrons peuvent-ils être en interaction *attractive* ? Eh bien c'est possible, grâce aux excitations du champ quantifié des vibrations des ions du réseau, appelées phonons. Il n'est pas facile d'en donner une image intuitive mais on peut cependant retenir l'idée essentielle : lorsqu'un premier électron se promène dans le cristal, il le déforme localement et s'ensuit autour de lui une polarisation locale *positive*. Si un deuxième électron passe alors par-là, ce dernier ressent alors *naturellement* une attraction : les phonons sont ainsi les bosons-vecteurs d'une interaction effective attractive entre deux électrons ! La piste sur l'implication des vibrations du réseau a été ouverte par Maxwell<sup>62</sup> qui a montré qu'une substitution isotopique modifiait la température critique.

<sup>55</sup> Alexeï Alexeïevitch Abrikosov, "The magnetic properties of superconducting alloys", Journal of Physics and Chemistry of Solids, **2**, 199 (1957)

<sup>56</sup> Nevill Francis Mott, *Metal-Insulator Transitions* (Taylor & Francis, Londres, 1974).

<sup>57</sup> Immanuel Boch, Jean Dalibard et Wilhelm Zwerger, "Many-body physics with ultracold gases", Reviews of Modern Physics **80**, 885 (2008).

<sup>58</sup> Michael Tinkham, *Introduction to Superconductivity* (McGraw-Hill, New York, 1996)

<sup>59</sup> John Bardeen, Leon N Cooper et John Robert Schrieffer, "Microscopic Theory of Superconductivity", Physical Review **106**, 162 (1957).

<sup>60</sup> En collaboration avec Walter Heitler, Fritz London montra comment le principe de Pauli joue un rôle essentiel pour la stabilité de la molécule  $H_2$  ("Wechselwirkung neutraler Atome und Homöopolare Bindung nach der Quantenmechanik", Zeitschrift für Physik **44**, 455 (1927)).

<sup>61</sup> Leon N Cooper, "Bound Electron Pairs in a Degenerate Fermi Gas", Physical Review **104**, 1189 (1956).

<sup>62</sup> Emanuel Maxwell, "Isotope Effect in the Superconductivity of Mercury", Physical Review **78**, 477 (1950).

La théorie BCS est d'une grande complexité, dont les lignes précédentes ne donnent qu'une très vague idée des prémisses. Il est utile de l'examiner de près car cela donne l'occasion, une fois de plus, de s'émerveiller devant la richesse et les ressources inouïes de la TQ. Pour que les paires de fermions se forment, il faut que ceux-ci se baignent dans la mer de Fermi, sans laquelle l'instabilité mise à jour par Cooper ne se produirait pas : l'effet majeur des autres électrons est en effet d'écranter la répulsion électrostatique au point de permettre à l'interaction attractive médiée par les phonons de jouer pleinement son rôle. Une fois réunis dans une telle paire – grande à l'échelle du réseau et certes fragile (l'énergie de liaison de la paire est de l'ordre de  $10^{-3}$  eV) –, les deux fermions forment un boson qui alors, comme tout boson, a un instinct grégaire et n'a qu'une envie : se rassembler avec tous ses congénères (les autres paires présentes) dans un état où *presque tous* sont dans le même état quantique, formant ainsi un condensat aux propriétés extraordinaires<sup>63</sup>. Cette phase est notamment caractérisée par le fait essentiel qu'il existe un *gap* d'énergie  $\Delta$  entre son état fondamental et ses premières excitations ; comme la résistance électrique provient des collisions entre électrons et ions, ces collisions sont inopérantes tant que leur énergie est plus petite que  $\Delta$  et tout se passe comme s'il n'y en avait pas du tout, de sorte que la résistance est nulle<sup>64</sup>. Au-dessus de  $T_C$ , le gap est identiquement nul et le métal redevient normal, ayant une résistivité finie.

Déjà fort complexe en soi par la description des phénomènes microscopiques qu'elle implique et s'efforce de décrire, la théorie BCS ne peut prétendre prendre en compte les détails fins caractérisant un métal ou un autre, et donc de calculer précisément la valeur de la température critique  $T_C$ . En particulier, force est d'introduire des paramètres phénoménologiques qu'il est impossible de calculer à partir des premiers principes ; cela fait, des calculs analytiques très détaillés peuvent être effectués, permettant par exemple de trouver l'expression suivante de la température critique :

$$k_B T_C = \frac{2e^C}{\pi} E_{\max} e^{-1/[V_0 \mathcal{D}(E_F)]} \quad (10)$$

où  $C$  est la constante d'Euler  $\simeq 0.577$ ,  $V_0$  l'énergie typique associée à l'interaction attractive et  $\mathcal{D}(E_F)$  la densité d'états au niveau de Fermi ;  $E_{\max}$  est une certaine énergie de coupure qui, dans l'hypothèse où ce sont les phonons qui sont responsables de l'appariement, est de l'ordre de quelques  $10^{-4}$  eV donnant pour  $T_C$  quelques degrés kelvin, pas plus, et pourvu que l'exponentielle reste d'ordre 1.

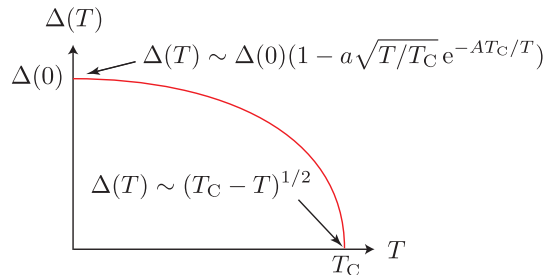


Figure 7: Variation du *gap* en fonction de la température pour la situation de couplage faible.

<sup>63</sup> Quoique l'objet de discussions, la superfluidité de l'hélium semble relever d'un scénario analogue.

<sup>64</sup> Ici encore, c'est la quantification (existence d'un quantum d'énergie irréductible) qui est à l'origine des effets remarquables. Il en va de même pour la chute de la chaleur spécifique des solides à basse température, et de l'effet Mössbauer qui est en quelque sorte un *canon sans recul* en raison de la quantification des vibrations d'un réseau cristallin (c'est le cristal tout entier qui recule en bloc, sans changement de son état vibratoire interne).

Il est même possible d'obtenir la dépendance en température du gap  $\Delta(T)$ , représentée sur la figure 7 dans la situation dite de *couplage faible* ; sa similarité avec la magnétisation spontanée d'un ferromagnétique est particulièrement frappante (comparer avec la figure 3). On connaît aussi les comportements précis de  $\Delta(T)$  près des bornes de l'intervalle pertinent :

$$\Delta(T) \simeq \begin{cases} k_B T_C \left( \frac{8\pi^2}{7\zeta(3)} \right)^{1/2} \left( 1 - \frac{T}{T_C} \right)^{1/2} & T \lesssim T_C \\ \Delta(0) \left[ 1 - \left( \frac{2\pi k_B T}{\Delta(0)} \right)^{1/2} e^{-\frac{\Delta(0)}{k_B T}} \right] & T \ll T_C \end{cases} \quad (11)$$

Ces expressions, à elles seules, permettent de suspecter que la théorie BCS présente une certaine complexité...

### 3.5 Existence de la limite thermodynamique (LT)

Rappelons d'abord en quoi consiste cette limite, qui est au cœur de la mécanique statistique, due à Boltzmann, dont l'objectif premier est la description probabiliste des systèmes ayant un très grand nombre  $N$  de degrés de liberté, et donc de permettre le calcul de la valeur moyenne de toute grandeur physique ;  $N$  est par exemple le nombre d'atomes dans un gaz enfermé dans un bocal de taille perceptible à l'échelle humaine, particules dont la dynamique introduit  $DN$  coordonnées dans  $\mathbb{R}^D$  et autant de vitesses, autant dire que ce nombre est gigantesque, toujours de l'ordre du fameux nombre d'Avogadro  $\mathcal{N}$  ; celui-ci est, sinon pour le mathématicien, au moins pour le physicien, une sorte d'infini et c'est cet infini approximatif qui justifie, tant à un niveau conceptuel que dans les calculs, qu'une fois calculée une grandeur physique pour  $N$  donné, on soit tenté de prendre formellement sur le papier la limite  $N$  strictement infini. Ce faisant, quand tout se passe bien<sup>65</sup>, on voit émerger tout naturellement les deux classes de grandeurs familières de la thermodynamique : celles qui sont intensives et celles qui sont extensives. Parmi ces dernières figure notamment l'énergie  $E$  du système ; ne mentionnant que la dépendance par rapport à  $N$ , on s'attend donc à obtenir si  $N \gg 1$  :

$$E(N) = N\varepsilon + \mathcal{O}(N^{-\alpha}) \quad (12)$$

où  $\varepsilon$  est une constante et  $\alpha$  un exposant négatif ou nul<sup>66</sup>, de sorte que l'on a :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E(N)}{N} = \varepsilon + \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{O}(N^{-(\alpha+1)}) = \varepsilon ; \quad (13)$$

dans ces conditions,  $\varepsilon$  représente l'énergie par particule<sup>67</sup>. Le plus souvent, les conditions de la limite doivent être précisées ; par exemple – et comme précisé plus haut à propos de la BEC –, pour un gaz enfermé dans un volume  $V$ , on prend simultanément les deux limites  $N \rightarrow \infty$  et  $V \rightarrow \infty$ , leur rapport étant constant et fixant ainsi la densité  $\rho = \frac{N}{V}$  du gaz. Quoi qu'il en soit des détails dans la pratique pour un système donné, le même type de scénario doit se produire pour toutes les

<sup>65</sup> On veut dire par là que le système ne présente aucune pathologie qui le rendrait non descriptible par l'approche usuelle de la mécanique statistique ; ce peut ne pas être le cas pour certaines structures exotiques (comme des fractales), trop *spongieuses* pour se prêter aux définitions usuelles comme la densité volumique par exemple.

<sup>66</sup> Il ne faut pas trop prendre au sérieux la dépendance en loi-puissance (quoiqu'elle est très fréquente). L'essentiel est que les termes correctifs tendent vers zéro quand  $N \rightarrow \infty$ .

<sup>67</sup> Il peut sembler étrange que cette énergie ne fasse pas intervenir le carré  $N^2$  intuitivement attendu puisque, dans le cas général, il existe une interaction entre particules impliquant les paires de celles-ci, en nombre  $\frac{1}{2}N(N-1) \sim N^2$ . De fait, on devine alors que l'existence de la limite thermodynamique est conditionnée à la nature des interactions, et notamment à leur portée spatiale, finie ou infinie. On dispose de quelques théorèmes, l'un d'entre eux étant dû à Dyson : dans un modèle d'Ising généralisé et pour des interactions décroissant dans  $\mathbb{R}^D$  comme  $r^{-\sigma}$ , la limite existe si  $\sigma > D$ . Voir par exemple : David Mukamel, "Statistical Mechanics of Systems with Long-Range Interactions", [https://itf.fys.kuleuven.be/~fpspxII/lecture\\_notes/Mukamel\\_LesHouches1.pdf](https://itf.fys.kuleuven.be/~fpspxII/lecture_notes/Mukamel_LesHouches1.pdf)

grandeurs physiques et quand tel est le cas, on dit que la limite thermodynamique (LT) existe.

Toujours sur le plan conceptuel, la limite thermodynamique joue également un rôle crucial pour la formalisation des changements de phase et des phénomènes critiques, comme par exemple la transition paramagnétique-ferromagnétique discutée plus haut. Selon une classification (qui a varié au cours du temps), une transition survient ssi des anomalies (discontinuités, divergences,...) apparaissent dans certaines fonctions thermodynamiques ou leurs dérivées. Comme toutes ces dernières s'obtiennent à partir d'une fonction de partition, et que celle-ci est toujours une somme d'exponentielles, elle est nécessairement une fonction analytique tant que cette dernière somme contient seulement un nombre *fini* de termes. Autrement dit et comme l'a souligné Paul Ehrenfest, tant que la limite thermodynamique n'a pas été prise, aucune singularité ne peut jamais apparaître<sup>68</sup> : la prise de limite est donc une étape essentielle pour déterminer si un système est critique ou non.

Sur le plan strictement numérique, on connaît l'importance de l'inégalité  $N \gg 1$  en conséquence du fait que les fluctuations relatives d'une grandeur intensive varient comme  $N^{-1/2}$  : avec  $N \sim \mathcal{N}$ , la précision autour de la moyenne est donc de l'ordre de  $10^{-12}$  ce qui assure, en pratique, une extraordinaire précision. À la limite thermodynamique, les fluctuations relatives sont nulles et c'est ce qui permet, une fois cette limite prise, d'identifier les ensembles chers au physicien, par exemple les ensembles micro-canonique et canonique.

La question de l'existence de la LT est donc un enjeu important en toute circonstance et pour tout système macroscopique perçu comme une assemblée de particules en (très) grand nombre, principe de base de la mécanique statistique depuis Boltzmann. Il s'agit d'un problème très difficile et très subtil, dominé par l'analyse théorique de Lieb, où sont distinguées deux types de stabilité de la matière (ordinaire) : la *stabilité de première espèce*, celle d'un atome, assurée par le fait que l'énergie de cet atome est bornée inférieurement, et la *stabilité de seconde espèce* qui implique par essence la limite thermodynamique. La contribution majeure de Lieb, développée à coup de théorèmes plus ou moins aisés permet de découvrir que, s'agissant des interactions de Coulomb, la difficulté provient autant de la singularité en  $r = 0$  du champ coulombien – pour la stabilité de première espèce – que de sa portée infinie (décroissance en  $\frac{1}{r}$ ) pour l'autre.

Il est cependant possible d'appréhender certains aspects de cette problématique en considérant un système élémentaire. Soit un gaz de  $N$  neutrons supposés sans interaction, enfermé dans un grand cube de côté  $L$  et de volume  $V = L^3$  ; il n'est pas difficile de voir que, parce qu'il s'agit de fermions de spin  $\frac{1}{2}$  soumis au principe d'exclusion, l'énergie cinétique  $E_{\text{cin}}$  du gaz à température nulle<sup>69</sup> est donnée par :

$$E_{\text{cin}}(N) = 2 \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} 4\pi k^2 dk \quad \text{avec} \quad 2 \frac{(4\pi/3)k_F^3}{(2\pi/L)^3} = N ,$$

d'où :

$$E_{\text{cin}}(N) \propto L^3 k_F^5 = (Lk_F)^3 k_F^2 \propto N k_F^2 \propto N \left(\frac{N}{L^3}\right)^{2/3} \equiv N \rho^{2/3} .$$

$k_F$  est le *moment de Fermi*, strictement lié au principe de Pauli : un nombre de fermions étant donné, il faut empiler ceux-ci dans des états de plus en

<sup>68</sup> Cette particularité est visible sur la figure 4 : tant que  $N$  est fini, aucune anomalie n'apparaît, la courbe est continue différentiable. C'est seulement une fois prise la limite  $N$  infini que le point anguleux se manifeste.

<sup>69</sup> C'est le cas limite où la distribution de Fermi-Dirac se réduit à une marche d'escalier, valant 1 et 0 de part et d'autre du seuil  $\varepsilon_F$ .



plus énergétiques ; le stock de fermions étant épuisé, le plus haut état occupé (à température nulle) correspond à une certaine valeur  $k_F$  égale à  $(3\pi^2\rho)^{1/3}$  et possède l'énergie  $\varepsilon_F \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$ . La nécessité de caser les fermions dans des états d'énergie de plus en plus élevée quand ceux de basse énergie sont déjà pleins évoque une sorte de "résistance" faisant penser à une pression interne : on l'appelle *pression de dégénérescence* et survient dans tout gaz de Fermi<sup>70</sup> (par exemple pour les électrons dans un métal... et au sein d'une étoile à neutrons).

La dépendance *globale* de  $E_{\text{cin}}(N)$  par rapport à  $N$ ,  $E_{\text{cin}}(N) \propto N^{5/3}$ , ne doit pas toutefois faire croire que cette énergie n'est pas extensive car la LT se faisant à densité constante  $\rho$ , on a en fait  $E_{\text{cin}}(N) \propto N$ , et très précisément :

$$\text{LT} \left[ \frac{E_{\text{cin}}(N)}{N} \right] = \frac{3}{5} \varepsilon_F . \quad (14)$$

Clairement, on voit ainsi que le principe de Pauli joue un rôle décisif pour assurer l'extensivité de l'énergie de ce système très simple puisque c'est lui qui fait croître rapidement l'énergie... et avec le bon exposant.

Lorsqu'il s'agit d'un système composite électriquement neutre, il est forcément formé d'au moins deux types de particules, les unes chargées positivement, les autres négativement, et il est alors impossible de ne pas tenir compte de l'interaction de Coulomb. Surgit alors la question de l'effondrement (*collapse*) du système sur lui-même – comme l'a souligné Jeans<sup>71</sup> en 1915 – puisque des particules de charges opposées s'attirent. C'est là que la théorie quantique intervient à deux niveaux essentiels.

D'abord grâce au principe d'incertitude Heisenberg<sup>72</sup> montrant que le collapse ne peut déjà pas se produire au niveau atomique (c'est la stabilité de première espèce évoquée plus haut), impossibilité qui peut aussi se visualiser à l'aide d'une métaphore ayant ses limites : dans l'atome le plus simple, c'est l'énergie cinétique de rotation de l'électron qui l'empêche de se précipiter sur le noyau, et elle est associée à un moment cinétique proportionnel à la constante de Planck (qui n'est pas nulle !)<sup>73</sup>.

Ensuite par le fait que, considérant maintenant l'assemblée macroscopique de toutes ces particules, l'une des deux espèces doit être composée de fermions<sup>74</sup> : en effet, comme l'a montré Lieb, avec des interactions de Coulomb mais sans le principe de Pauli l'énergie totale de l'état fondamental varierait comme  $-N^{7/5}$

<sup>70</sup> Qu'il s'agisse de bosons ou de fermions, l'équation d'état d'un gaz parfait quantique est  $PV = \frac{2}{3}E$ . Pour un gaz de Fermi à basse température ( $k_B T \ll \varepsilon_F$ ), la pression est (développement dit de *Sommerfeld*) :

$$P = \frac{1}{5} (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{md^2} d^{-3} \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{k_B T}{\varepsilon_F} \right)^2 + \dots \right] \quad (d = \rho^{-1/3}) .$$

Par contraste, à haute température et qu'il s'agisse de bosons ou de fermions, on a :

$$P = k_B T d^{-3} \left[ 1 \pm \frac{1}{2g} \left( \frac{\pi \hbar^2}{md^2 k_B T} \right)^{3/2} \right] \quad (+ : \text{fermions} ; - : \text{bosons}) .$$

Voir Cl. A., *Mécanique quantique, tome 2*, 4<sup>e</sup> édition (De Boeck Supérieur, Louvain-la-Neuve, 2018), problème 22.6.8 et son corrigé dans *Mécanique quantique, tome 3*, 2<sup>e</sup> édition (De Boeck Supérieur, Louvain-la-Neuve, 2015), 22.8.

<sup>71</sup> J. H. Jeans, *The mathematical theory of electricity and magnetism*, Cambridge University Press, Cambridge, troisième édition, 1915, p. 168.

<sup>72</sup> Dans l'article cité dans la note 74, Lieb critique l'argument usuel et en donne une version plus raffinée.

<sup>73</sup> Clairement, la métaphore ne tient pas pour les états sphériques où le moment cinétique est strictement nul (mais seulement en moyenne !), et où d'ailleurs la densité de probabilité de présence sur le noyau n'est pas nulle.

<sup>74</sup> Elliott H. Lieb, "The Stability of Matter", *Reviews of Modern Physics* **48**, 553 (1976). Voir aussi Nigel Goldenfeld, *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group* (Addison-Wesley Publishing Co, Reading, 1992).

et ne serait donc pas extensive<sup>75</sup>. À nouveau, c'est l'augmentation rapide de l'énergie cinétique des fermions, conséquence directe du principe de Pauli exigeant d'empiler les fermions dans des états d'énergie de plus en plus élevés, qui permet de suspecter – à défaut de comprendre ce qui n'a rien d'intuitif<sup>76</sup> – qu'elle puisse jouer un rôle dynamique important pour entrer efficacement en compétition avec l'énergie coulombienne statique qui tend à faire s'effondrer le système sur lui-même. En définitive, la TQ permet de comprendre globalement la stabilité de la matière dans son ensemble, qu'il s'agisse d'un atome ou d'un système macroscopique..., d'une naine blanche ou d'une étoile à neutrons.

## 4 Conclusions

Cet exposé consacré aux illustrations de la théorie quantique avait pour but de donner quelques exemples de problématiques pour lesquelles cette théorie a aussi apporté des réponses satisfaisantes alors que sa construction initiale avait été exclusivement motivée par les difficultés majeures de compréhension de l'infiniment petit ; certes, la constante de Planck est minuscule à l'échelle humaine mais cela n'empêche pas la théorie quantique de toujours jouer les premiers rôles, parfois discrètement en coulisse, y compris pour des phénomènes que l'on qualifie volontiers de *macroscopiques* mais qu'il faut voir comme étant les inévitables manifestations quantiques à grande échelle de ce qui se passe à une échelle minuscule – sans aucun doute, la conductivité d'un métal ou sa supraconductivité sont des propriétés *macroscopiques* mais toutes deux relèvent d'une théorie microscopique où les concepts quantiques interviennent afin d'en fournir une convaincante explication.

À coup sûr, on doit garder à l'esprit que, dans la vision universellement acceptée par les physiciens d'aujourd'hui, la nature intime du monde est quantique puisqu'il est admis qu'il est l'assemblage d'objets si petits que, pour eux, la constante de Planck est un acteur fondamental. C'est pourquoi il n'est pas faux de dire que, s'agissant des sciences dures, *tout* est quantique à condition toutefois de se garder d'adopter une position réductionniste à l'extrême qui n'a pas sa place pour l'analyse et la description de certains phénomènes : une boule de billard est une boule de billard, un chat est un chat<sup>77</sup>. Les raisons pour lesquelles celui-ci ne saurait être à la fois mort et vivant trouvent leurs racines dans la théorie quantique elle-même à condition d'en bien ramasser tous les préceptes et toutes les exigences : notamment, la cohérence quantique est certes une propriété qui se manifeste au laboratoire par mille effets, mais c'est sa fragilité qui lui interdit d'éclater en plein jour en toute circonstance et au sein de n'importe quel système.

Les exemples présentés, d'un atome à un grand système, neutre ou non, ont tous porté sur des systèmes que l'on peut raisonnablement considérer comme isolés de toute influence extérieure incontrôlée ou non descriptible, et pour lesquels

<sup>75</sup> Je ne sais ce qui est actuellement établi à propos du gaz de bosons ; en 1967, Dyson a montré que l'énergie fondamentale d'un tel système est bornée supérieurement par  $-C^{\text{ste}} N^{7/5}$  (voir Freeman J. Dyson, "Ground-state of a finite system of charged particles", Journal of Mathematical Physics **8**, 1538 (1967)).

Par ailleurs, s'agissant d'examiner la LT pour un système canonique à la température  $T$ , c'est plutôt l'énergie libre de Helmholtz  $F$  qu'il faut analyser ; pour s'en tenir ici à un exposé élémentaire des idées, l'accent a été mis sur l'énergie elle-même.

<sup>76</sup> À titre de métaphore mnémotechnique, on peut imaginer que les états de haute énergie étant de plus en plus impliqués, les particules s'entrechoquent à grande vitesse au point de provoquer un surcroît de pression.

<sup>77</sup> Ceci sans parler des pseudo-sciences qui, récupérant de façon éhontée la théorie quantique, lui attribuent une pertinence pour la médecine conventionnelle, traditionnelle ou orientale et la psychologie... sans oublier l'astrologie (entrer *astrologie quantique* sur Google, pour voir et rire !), affirmant elles aussi, dans un sabir amphigourique, que *tout* est quantique ! On pourra trouver un florilège de ces dérives dans les articles cités dans la note 29.

un modèle ou une théorie peut *effectivement* être développé(e) afin de rendre compte d'expériences en principe reproductibles ou de répondre à des questions plus fondamentales demeurant autrement des énigmes. Pour de tels systèmes, les succès accumulés depuis près d'un siècle permettent de prendre la mesure de l'immense portée de la théorie quantique, laquelle s'étend du microscopique au macroscopique, pour tout dire de l'infiniment petit au presque infiniment grand. Cette universalité est pour le moins frappante – et ce d'autant plus si l'on repense aux raisons qui ont fait naître cette théorie, l'inaptitude constatée de la physique classique pour la description des phénomènes atomiques ou subatomiques.

Mais ce n'est pas tout, on peut aller bien plus loin dans l'exploration du gigantisme et se tourner carrément vers des objets astrophysiques, aussi exotiques soient-ils. En effet, c'est aussi le principe de Pauli qui permet de comprendre l'existence d'une naine blanche, étoile essentiellement composée d'un plasma de noyaux et d'électrons, et pire encore, d'une étoile à neutrons, monstrueuse sphère eschatologique d'une dizaine de km de rayon et d'une masse égale à environ dix fois celle du Soleil, résidu d'une supernova où électrons et protons ont été fusionnés. Sans la pression de dégénérescence évoquée plus haut et qui résulte directement de ce principe, ces objets s'effondreraient sur eux-mêmes sous l'effet de leur propre gravitation<sup>78</sup>.

Et à une échelle encore plus grande, celle de la cosmologie, Mukhanov et Chibisov<sup>79</sup> ont avancé en 1981 l'idée que la structuration de l'univers en galaxies et *clusters* de galaxies résulte de fluctuations quantiques<sup>80</sup>.

En définitive, on ne saurait mieux conclure qu'en citant Lieb dans un article<sup>81</sup> dont les derniers mots ne peuvent qu'exciter la curiosité et ainsi développer le désir de le parcourir :

*“Quantum mechanics is a bizarre theory, invented to explain atoms. As far as we know today it is capable of explaining everything about ordinary matter (chemistry, biology, superconductivity), sometimes with stunning numerical accuracy. But it also says something about the occurrence of the most spectacular event in the cosmos – the supernova !”*

me permettant tout juste d'ajouter que, finalement, la TQ est la théorie allant de l'infiniment grand à l'infiniment petit – expression comme un clin d'œil renvoyant au titre de ces Rencontres d'été de physique...

---

<sup>78</sup> La physique des étoiles à neutrons, notamment, est fort complexe ; en particulier, la constitution de leur cœur, où règne une pression inimaginable, est fort mystérieuse, celui-ci pouvant être constitué d'une matière de nature totalement inconnue à ce jour. Le fait est que sans le principe d'exclusion, la taille de ces monstres astrophysiques serait encore considérablement réduite... à supposer qu'ils puissent alors exister !

L'étoile à neutrons la plus proche de nous, poétiquement surnommée *Calvera*, est située dans la constellation de la Petite Ourse, à environ 500 années-lumière du système solaire : rien à craindre. Quand elle fut découverte, on ne connaissait alors que 7 étoiles à neutrons, d'où paraît-il la référence aux *Sept mercenaires* où Calvera est l'horrible chef des quarante bandits !

<sup>79</sup> Viatcheslav F. Mukhanov et Gennady V. Chibisov, “*Quantum fluctuations and a nonsingular universe*”, *Journal of Experimental and Theoretical Physics* **33**, 532 (1981) et Viatcheslav F. Mukhanov, “*CMB, Quantum Fluctuations and the Predictive Power of Inflation*”, <https://arxiv.org/abs/astro-ph/0303077>.

<sup>80</sup> Voir par exemple : “*The quantum origins of the Universe structure*”, <https://www.youtube.com/watch?v=Gk-yRiAxjUM>.

<sup>81</sup> Elliott H. Lieb, “*The stability of matter: from atoms to stars*”, *Bulletin of the American Mathematical Society* **22**(1), janvier 1990.

L'apport magistral de Lieb sur ces questions fondamentales a été repris et développé dans un ouvrage récent (Elliott H. Lieb et Robert Seiringer, *The stability of matter in quantum mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2010)).