

Quelques illustrations de la théorie quantique

VIII^{es} Rencontres d'été de physique de
l'infiniment grand à l'infiniment petit

Claude Aslangul
LPTMC - Sorbonne Université

Orsay, 18 juillet 2018

“Quantum mechanics is a bizarre theory, invented to explain atoms. As far as we know today it is capable of explaining everything about ordinary matter (chemistry, biology, superconductivity), sometimes with stunning numerical accuracy. But it also says something about the occurrence of the most spectacular event in the cosmos – the supernova.”

Elliott H. Lieb

Introduction

La théorie quantique (TQ) : seulement pour l'infiniment petit ?

- Non !
- Clé pour la compréhension du monde à **toutes** les échelles observables
- Jusqu'au mur de Planck, tout système physique a à voir, de près ou de loin, avec la TQ...
- *"Effets quantiques macroscopiques"* : supraconductivité, superfluidité,... ; ambigu, à la limite, tout est quantique
- ... mais la question du **réductionnisme** peut (et doit) toujours être posée !
(\implies débat lors des VI^{es} Rencontres, 2016)

La théorie quantique (TQ) : pour qui ?

- Physique des hautes et basses énergies :
 - physique des particules
 - noyaux
 - atomes
 - molécules
 - polymères...
 - ...

- Physique plus macroscopique :
 - matière condensée (solides)
 - chimie
 - biophysique
 - ...
- Mais aussi : systèmes “infinis” et limite thermodynamique
- Objets astrophysiques (e.g. étoiles à neutrons... et fluctuations du fond diffus cosmologique ?)

- Et enfin auto-tests :

- expériences avec un très petit nombre d'atomes, de photons,...

"We never experiment with just one electron or atom or (small) molecule. In thought-experiments we sometimes assume that we do; this invariably entails ridiculous consequences..."

(Schrödinger, 1952)

et pourtant...

- vérification d'effets spectaculaires (sauts quantiques, effet Zénon, téléportation, cryptographie,...)

La théorie quantique : deux concepts fondamentaux

- La **fonction d'onde** Ψ , ou le vecteur d'état $|\Psi\rangle$ (système isolé, sinon opérateur densité $\hat{\rho}$ (e.g. système canonique à l'équilibre $\hat{\rho} \propto e^{-\beta H}$))

- Le **spin** S (moment cinétique *intrinsèque*), attribut de *toute* particule élémentaire
 - Les fermions, spin **demi-entier** (quarks, électron,..., la "matière"). Ne s'aiment pas les uns les autres (principe d'exclusion de Pauli) et refusent de cohabiter dans le même état
 - Les bosons, spin **entier**
 - photons, gluons,..., vecteurs des interactions
 - certaines excitations des champs quantifiés (phonons, magnons,...)
 - particules composites constituées d'un nombre *pair* de fermions

Instinct grégaire, peuvent se rassembler presque tous dans le **même** état (condensation de Bose)

Robustesse de la théorie quantique

Le “paradoxe” EPR, l'inégalité de Bell et les expériences d'Aspect

- Einstein, Podolsky et Rosen (1935) : la TQ est une théorie *incomplète* ($\iff \exists$ des “**variables cachées**”)
- Inégalité de Bell (1964) : **si** \exists variables cachées, $|S| < 2$
- Expériences d'Aspect, Dalibard et Roger (1982) : $|S| > 2$, **il n'existe pas de variables cachées**
- Non localité de la TQ (\implies débat lors des Rencontres 2013)
- En physique, **l'expérience est le juge de paix**

Le “paradoxe” du chat de Schrödinger

- Un chat à la fois mort et vivant ?
 - $|\Psi\rangle = a|\text{mort}\rangle + b|\text{vivant}\rangle$? Non : système non isolé !
 - Et la fiole de poison ?
 - Hamiltonien du chat = ???
 - Le chat est un objet macroscopique (incontrôlable) n'échappant pas à la décohérence (tout comme une boule de billard)
 - ...

un chat (un vrai) à la fois mort et vivant, ça n'existe pas

- Et les chatons ? Les tout petits petits, et à basse température, ils existent et font ce que dit la TQ (exemple : sauts quantiques d'atomes ou du nombre de photons dans une cavité, intrication de deux photons...)

La téléportation quantique

- De la science-fiction ? Non !
- Deux systèmes ayant interagi et **soigneusement préservés** ne sont plus *séparables*
- Exemple : intrication de deux spins $1/2$

- Pour chaque spin ($i=1, 2$) :

$$|\Psi^{(i)}\rangle = c_{\uparrow}^{(i)}|\uparrow\rangle + c_{\downarrow}^{(i)}|\downarrow\rangle, \quad (c_{\uparrow}^{(i)}, c_{\downarrow}^{(i)}) \in \mathbb{C}^2.$$

- État le plus général des deux spins :

$$|\Psi^{(12)}\rangle = c_{\uparrow\uparrow}^{(12)}|\uparrow\uparrow\rangle + c_{\downarrow\uparrow}^{(12)}|\downarrow\uparrow\rangle + c_{\uparrow\downarrow}^{(12)}|\uparrow\downarrow\rangle + c_{\downarrow\downarrow}^{(12)}|\downarrow\downarrow\rangle.$$

avec $|\Psi^{(12)}\rangle \neq |\Psi^{(1)}\rangle \otimes |\Psi^{(2)}\rangle$, sauf si $c_{\uparrow\downarrow}^{(12)} = c_{\uparrow}^{(1)}c_{\downarrow}^{(2)}$, etc...

- Deux systèmes sont *intriqués* ssi leur vecteur d'état est un produit tensoriel **non factorisable**
- En général, deux particules (discernables ou non) ayant interagi sont indissociables l'une de l'autre et restent **corrélées** même si elles n'interagissent pas (ou plus) l'une avec l'autre au sens ordinaire.

Elles sont **intriquées**

- Par exemple, collision de deux spins 1/2 :

$$t = -\infty : |\downarrow\uparrow\rangle \longrightarrow$$

$$t = +\infty : \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + e^{i\alpha}|\downarrow\uparrow\rangle) \quad (\alpha \in \mathbb{R}) ,$$

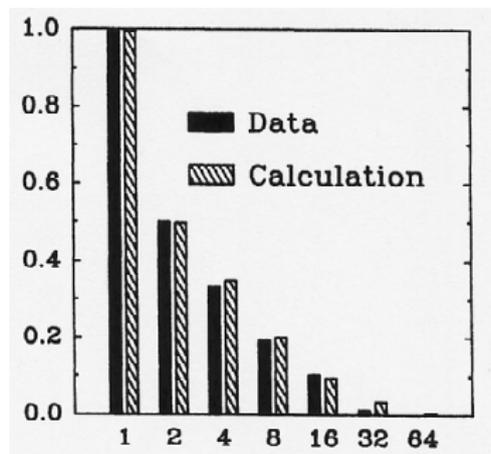
- Repartis à l'infini l'un de l'autre, les deux spins intriqués continuent à former *un et un seul* système (*non séparabilité*).
- Perturber l'un avec un troisième larron, c'est modifier l'autre (*non localité*) \iff **Téléportation**
- Expérience réalisée avec des photons sur des distance de plus en plus grandes (de quelques mètres en 1997 à des dizaines de kilomètres aujourd'hui).

- Mais :
 - Condition essentielle : après leur séparation spatiale, aucun effet perturbateur incontrôlable ne doit intervenir \implies importance (et en pratique difficulté) de **protéger** efficacement le système.
 - *A contrario*, quand aucune précaution n'est prise, ces parties retrouvent de fait chacune tôt ou tard leur individualité indépendamment l'une de l'autre... interdisant une vision holistique de tout ce qui constitue l'univers (ne pas croire les charlatans de la tendance *New Age*) !

L'effet Zénon quantique

- Préviation théorique de Misra et Sudarshan (1977)
- Une mesure d'observable \implies réduction du paquet d'ondes \iff projection de $|\Psi\rangle$
- Mesures répétées très vite \implies **blocage de l'évolution temporelle**

- Observation par Itano *et al* (1990) :

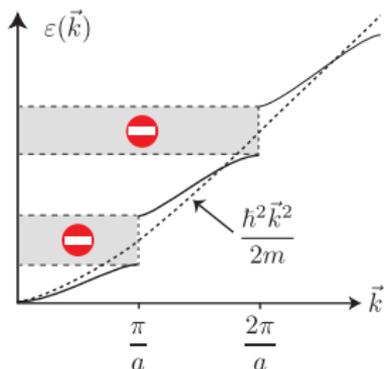


Résultats de l'expérience de Itano *et al*. En abscisse, nombre de mesures pendant un intervalle de temps donné ; en ordonnée, probabilité que l'atome quitte son état de départ

Quelques problématiques macroscopiques pour lesquelles la TQ est essentielle

La conductivité électrique des solides

- Pourquoi y a-t-il des **conducteurs** et des **isolants** ?
- Pour les métaux : $\sigma_{\text{Drude}} = n \frac{e^2 \tau}{m}$ (Drude, 1905).
- Solide (cristallisé) : assemblage spatialement périodique d'objets massifs (molécules, ions) entre lesquels se meuvent des électrons.
- Groupe de symétrie : translations spatiales **discrètes** \iff théorème de Bloch \iff **fragmentation** de la courbe de dispersion.



Allure schématique de la relation de dispersion d'un électron dans un réseau unidimensionnel de pas a . La ligne en tiretés est la parabole de l'électron dans le vide. Les sauts de ε constituent les *gaps* d'énergie.

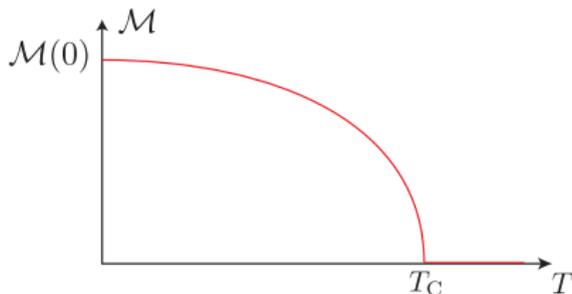
- Bandes **permises** et bandes **interdites**.

- Électron = fermion \implies remplissage des bandes conformément au principe d'exclusion de Pauli ; à température nulle :
 - Plus haute bande pleine \implies **isolant**
 - Plus haute bande partiellement remplie \implies **conducteur**
- À température finie : un isolant peut être semi-conducteur si $k_B T \sim E_{\text{gap}}$.
- Après un gros effort :

$$\sigma = n \frac{e^2 \tau}{m_{\text{eff}}}$$

Le magnétisme

- Pour un ferromagnétique (Fe, Ni, Co,...) : aimantation spontanée \mathcal{M} au dessous d'une certaine température



Variation typique de l'aimantation spontanée d'un ferromagnétique.
 T_C est la température critique au dessus de laquelle le matériau est simplement paramagnétique.

- Orientation de moments magnétiques suivant un ordre à longue distance
- Origine physique des moments magnétiques ??? Le **spin** !!!
- Première tentative pour le ferromagnétisme : le modèle d'Ising (1925)

- S_i : variables *classiques* prenant deux valeurs, ± 1

$$H_{\text{Ising}} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j - \mu B \sum_i S_i ;$$

- J : constante phénoménologique (positive), explicable grâce au spin
- Tour de force d'Onsager (1944) : à $D=2$, \exists une phase ferromagnétique si $T < T_C = \frac{2J}{[\ln(1+\sqrt{2})]k_B} \simeq \frac{2.279}{k_B} J$
- Ordre à **longue** distance en dépit d'interactions à **courte** portée

- Heisenberg :

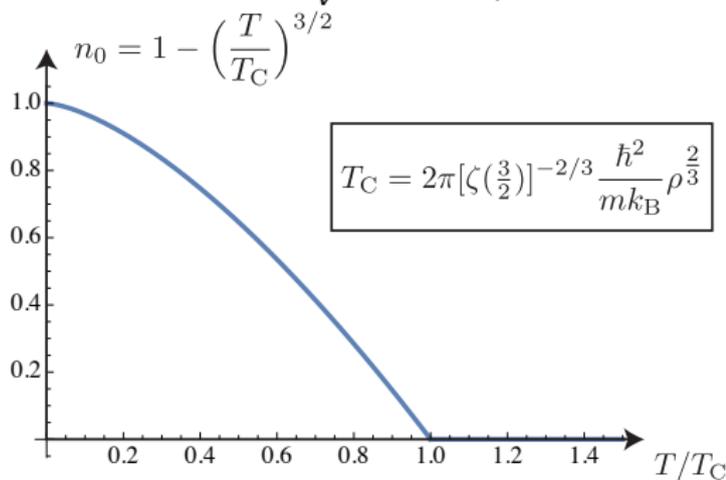
$$H_{\text{Heisenberg}} = -\hbar^{-2} J \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j - \hbar^{-1} \mu \vec{B} \sum_i \vec{S}_i$$

- Redoutable difficulté, car les spins ne commutent pas ($[S_{ix}, S_{iy}] = i\hbar S_{iz}, \dots$)
- Dyson, Lieb et Simon (1976) : \exists une transition para-ferro si $D \geq 3$
- Très grande richesse : antiferromagnétisme ($J < 0$), héli magnétisme, magnons, paires liées de magnons ($D = 1$),...

La condensation de Bose-Einstein (BEC)

- Bosons : peuvent se rassembler dans le même état (instinct *grégaire*).
- N bosons sans interaction (“gaz” parfait) dans volume V , N_0 dans l'état fondamental, $n_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{N_0}{N}$, fraction condensée.

- Dans la limite $N \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$, $\frac{N}{V} = C^{\text{ste}} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \rho$ et $D=3$:



Pour un gaz parfait de bosons dans \mathbb{R}^3 , variation de la fraction condens\u00e9e

$n_0 = \lim \frac{N_0}{N}$ en fonction de la temp\u00e9rature.

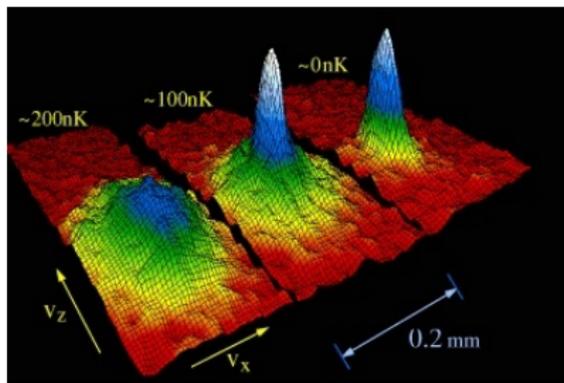
- Longueur d'onde thermique de de Broglie : $\lambda_T \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}$

$$\rho\lambda_{T_C}^3 = \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \simeq 2.612$$

$$\lambda_{T_C} \sim \rho^{-1/3} \sim \text{distance moyenne entre bosons}$$

Dans la phase condens\u00e9e, les fonctions d'onde des diff\u00e9rents bosons se chevauchent : l'assembl\u00e9e se comporte de fa\u00e7on *collective*.

- Regain d'intérêt spectaculaire dans les années 1990 en raison des progrès fulgurants accomplis pour piéger un gaz atomique à très basse température.
- Un grand nombre d'atomes se comportent collectivement comme s'ils formaient en quelque sorte un seul et unique méga-atome.



Distribution des vitesses d'environ dix millions d'atomes de Rubidium refroidis de 200 à 20 nK. À "haute" température (à gauche), c'est essentiellement la distribution de Boltzmann. Une fois passée la température critique, le condensat de Bose-Einstein apparaît par le pic central de plus en plus fin rassemblant les atomes dont les vitesses sont de moins en moins dispersées autour de la vitesse nulle ; ce groupe est immergé dans le bain des atomes non condensés ayant des vitesses distribuées aléatoirement.

La supraconductivité

- Mercure, aluminium, plomb,... : annulation **stricte** de la résistivité à une certaine (très) basse température T_C (Holst et Kammerlingh-Onnes, 1911)
- Effet isotopique (Maxwell, 1950) : T_C varie lors de substitutions isotopiques (implication des **vibrations** (*phonons*) du réseau)
- Étape décisive, Cooper (1956) : la mer de Fermi est **instable** dès qu'il existe une interaction **attractive** entre les électrons \implies paires de Cooper, “molécules” fragiles (énergie de liaison $\lesssim 1$ meV)

- Théorie microscopique de Bardeen, Cooper et Schrieffer (1957) :
 - Interaction *attractive* entre électrons ??? Oui, grâce aux phonons !
 - Deux électrons liés dans une paire constituent un **boson** \implies les paires peuvent se condenser à basse température : le métal devient supraconducteur.
 - État supra : caractérisé par un *gap* d'énergie Δ entre le fondamental et les premières excitations.

- Résistivité *nulle* tant que les collisions électrons-ions ont une énergie plus petite que Δ
- $\Delta = 0$ si $T > T_C$: le métal retrouve l'état normal (résistivité finie).
- Le *gap* varie typiquement comme l'aimantation spontanée d'un ferromagnétique
- ≥ 1986 : supras à "haute" température critique. BCS or not ?

Existence de la limite thermodynamique (LT)

- Mécanique statistique : N particules ou degrés de liberté,
 $N \sim \mathcal{N} \gg \gg 1$
- Lien avec la thermodynamique (grandeurs extensives, intensives, etc.)
- Exemple : l'énergie ; on attend ;

$$N \gg \gg 1 : E(N) = N\varepsilon + \text{corrections}$$

- Très souvent ($\alpha \geq 0$) : $E(N) = N\varepsilon + \mathcal{O}(N^{-\alpha}) \iff$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E(N)}{N} = \varepsilon + \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{O}(N^{-(\alpha+1)}) = \varepsilon ;$$

- En pratique et plus précisément (un gaz dans le volume V , par exemple) :

$$\text{LT} : N \rightarrow \infty , \quad V \rightarrow \infty , \quad \frac{N}{V} = C^{\text{ste}} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \rho$$

- LT : essentielle pour détecter une **transition de phase** (\exists **singularités** ?)
- Existence de la LT en général : problème **très** difficile (Lieb), notamment en raison de l'interaction de Coulomb (**singulière** à faible distance et à portée **infinie**...)

- Deux exemples montrant l'importance du principe de Pauli
 - “Gaz” **parfait** de neutrons (spin 1/2) dans cube de volume $V = L^3$.

- Principe de Pauli : remplissage progressif des états d'énergie de plus en plus élevée
- \implies “pression de dégénérescence” ; par exemple, à haute température ($\lambda_T \ll d \stackrel{\text{déf}}{=} \rho^{-1/3}$) :

$$P = k_B T \rho \left[1 \pm \frac{1}{2g} \left(\frac{\pi \hbar^2 \rho^{2/3}}{m k_B T} \right)^{3/2} + \dots \right] \quad (+ : \text{fermions} ; - : \text{bosons}) .$$

- Énergie du gaz = somme des énergies cinétiques :

$$E_{\text{cin}}(N) = 2 \sum_{\|\vec{k}\| < k_F} \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} \quad \text{avec} \quad 2 \frac{4\pi}{3} \frac{k_F^3}{L^3} = N$$

- Tous calculs faits :

$$E_{\text{cin}}(N) \propto N \rho^{2/3} + (\text{corrections} \propto N^{\alpha < 1})$$

- • Système électriquement **neutre**
 - Deux types de particules de charges opposées
 - L'une des deux espèces doit être **fermionique** pour que \exists LT : Coulomb et sans principe de Pauli, $E(N) \propto N^{7/5}$!

Principe de Pauli $\implies \exists$ LT

Et aussi... astrophysique, cosmologie

- • Naine blanche (plasma noyaux-électrons)
- Étoile à neutrons

C'est la pression de dégénérescence qui empêche l'effondrement gravitationnel

- Fluctuations du fond diffus cosmologique ?

La TQ est essentielle pour comprendre la stabilité du monde à toutes les échelles observables, de l'infiniment petit à l'infiniment grand (noyau, atome, système macroscopique,..., naine blanche, étoile à neutrons, fluctuations du fond diffus cosmologique...)

À ce jour, aucune expérience ne l'a prise en défaut