



Faculté de **physique et ingénierie**

Université de Strasbourg



# Développement d'une méthode de détermination de la constante de Hubble à partir des paramètres des sources d'ondes gravitationnelles détectées par Virgo et LIGO

Florian Aubin

Master Physique Subatomique et Astroparticules

13/06/2017

Encadré par Damir Buskulic



# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Modèle
- 3 Paramètres de l'analyse
- 4 Discussions des résultats
- 5 Conclusion

# Introduction

- Première observation d'Ondes Gravitationnelles (OG) par LIGO le 14 septembre 2015 [8].
- Récentes mesures de la constante de Hubble  $H_0$  :
  - télescope spatial Hubble  $H_0 = 71.9^{+2.4}_{-3.0}$  (V. Bonvin et al. [2]).
  - satellite Planck  $H_0 = 67.8 \pm 0.9$  (Planck Collaboration et al. [10]).
- Prévission d'une mesure à  $10 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$  près avec 100 fusion d'étoiles à neutrons (Taylor [12]).

# Introduction

- Première observation d'Ondes Gravitationnelles (OG) par LIGO le 14 septembre 2015 [8].
  - Récentes mesures de la constante de Hubble  $H_0$  :
    - télescope spatial Hubble  $H_0 = 71.9^{+2.4}_{-3.0}$  (V. Bonvin et al. [2]).
    - satellite Planck  $H_0 = 67.8 \pm 0.9$  (Planck Collaboration et al. [10]).
  - Prévion d'une mesure à  $10 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$  près avec 100 fusion d'étoiles à neutrons (Taylor [12]).
- 
- Trois (ou quatre) événements avec des trous noirs.
  - Facteur 3 en sensibilité dans les prochaines années  $\Rightarrow$  Observation  $\approx$  100 fusions d'ici quelques années.
  - Peut-on estimer la valeur de  $H_0$  avec ces observations par une étude de population ?

- 1 Introduction
- 2 **Modèle**
  - Rappels sur les OG
    - Effet du redshift
    - Définition de l'observable
    - Effets du détecteur
- 3 Paramètres de l'analyse
- 4 Discussions des résultats
- 5 Conclusion

# Rappels sur les OG

## Équations d'Einstein linéarisées

$$\begin{aligned}
 R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} &= 8\pi T_{\mu\nu} \\
 g_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \\
 \bar{h}_{\mu\nu} &= h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^\mu{}_\mu \quad ; \quad \partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0 \\
 \square \bar{h}^{\mu\nu} &= -16\pi T_{\mu\nu}
 \end{aligned}$$

## Solutions

- Dans le vide  $\square \bar{h}^{\mu\nu} = 0$   
 $\Rightarrow$  Équation de d'Alembert
- Système binaire :

$$h(t) = \frac{\mathcal{M}^{5/3}}{\chi} \Theta(\pi f)^{2/3} \cos[\Phi_0 + \Phi(t)]$$

# Rappels sur les OG

## Équations d'Einstein linéarisées

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^\mu{}_\mu \quad ; \quad \partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0$$

$$\square \bar{h}^{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu}$$

## Solutions

- Dans le vide  $\square \bar{h}^{\mu\nu} = 0$   
 $\Rightarrow$  Équation de d'Alembert

- Système binaire :

$$h(t) = \frac{\mathcal{M}^{5/3}}{\chi} \Theta(\pi f)^{2/3} \cos[\Phi_0 + \Phi(t)]$$

## Masses

$$M = m_1 + m_2 \quad ; \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{M}$$

$$\mathcal{M} = \mu^{3/5} M^{2/5}$$

## Rappels sur les OG

## Équations d'Einstein linéarisées

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^\mu{}_\mu \quad ; \quad \partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0$$

$$\square \bar{h}^{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu}$$

## Solutions

- Dans le vide  $\square \bar{h}^{\mu\nu} = 0$   
⇒ Équation de d'Alembert

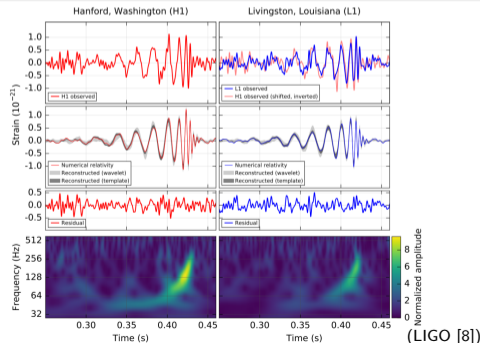
- Système binaire :

$$h(t) = \frac{\mathcal{M}^{5/3}}{\chi} \Theta(\pi f)^{2/3} \cos[\Phi_0 + \Phi(t)]$$

## Masses

$$M = m_1 + m_2 \quad ; \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{M}$$

$$\mathcal{M} = \mu^{3/5} M^{2/5}$$





- 1 Introduction
- 2 **Modèle**
  - Rappels sur les OG
  - **Effet du redshift**
  - Définition de l'observable
  - Effets du détecteur
- 3 Paramètres de l'analyse
- 4 Discussions des résultats
- 5 Conclusion

# Effet du redshift

## Redshift $z$

Paramètre d'expansion de l'Univers :

$$a(t) = \frac{R(t)}{R_0}$$

$$1 + z = \frac{1}{a}$$

# Effet du redshift

## Redshift $z$

Paramètre d'expansion de l'Univers :

$$a(t) = \frac{R(t)}{R_0}$$

$$1 + z = \frac{1}{a}$$

## Effet du redshift sur les échelles de temps

Expansion de l'Univers durant la propagation des ondes :  $\delta t_{event} \neq \delta t_{obs}$  :

$$\delta t_{obs} = (1 + z) \times \delta t_{event}$$

# Effet du redshift

## Redshift $z$

Paramètre d'expansion de l'Univers :

$$a(t) = \frac{R(t)}{R_0}$$

$$1 + z = \frac{1}{a}$$

## Effet du redshift sur les échelles de temps

Expansion de l'Univers durant la propagation des ondes :  $\delta t_{event} \neq \delta t_{obs}$  :

$$\delta t_{obs} = (1 + z) \times \delta t_{event}$$

## Effet sur les masses observées (S.A. Hughes, D.E. Holz [6])

Une masse  $m$  impacte une échelle de temps

$$\delta t = \frac{Gm}{c^3}$$

Masse observée différente de masse réelle :

$$m_{obs} = (1 + z) \times m$$

On observe des masses redshiftées et des distances de luminosité :  $D_L \approx \frac{c}{H_0} z = fct(H_0)$

# Effet du redshift sur les masses perçues

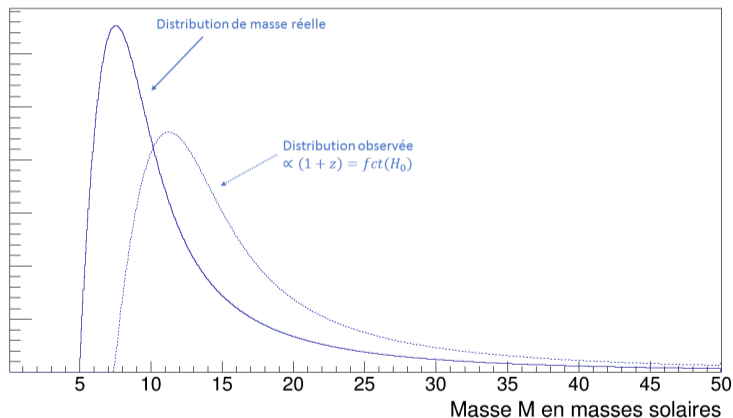


FIGURE – Effet du redshift sur les distributions de masse

- 1 Introduction
- 2** **Modèle**
  - Rappels sur les OG
  - Effet du redshift
  - Définition de l'observable**
  - Effets du détecteur
- 3 Paramètres de l'analyse
- 4 Discussions des résultats
- 5 Conclusion

# Définition de l'observable

## Observable

Nombre d'événements par unité de temps, de masse chirp perçue (redshiftée), de distance de luminosité et de SNR (intensité du signal par rapport au bruit).

$$\frac{d^4 N}{dt dD_L d\mathcal{M}_z d\rho} = \frac{1}{1+z} \frac{\partial z}{\partial D_L} \frac{\Theta}{\rho} \frac{d^4 N}{dt dz d\mathcal{M} d\Theta}$$

# Définition de l'observable

## Observable

Nombre d'événements par unité de temps, de masse chirp perçue (redshiftée), de distance de luminosité et de SNR (intensité du signal par rapport au bruit).

$$\frac{d^4 N}{dt dD_L d\mathcal{M}_z d\rho} = \frac{1}{1+z} \frac{\partial z}{\partial D_L} \frac{\Theta}{\rho} \frac{d^4 N}{dt dz d\mathcal{M} d\Theta}$$

Nombre d'événements par unité de temps, de redshift, de masse chirp et de position angulaire.  
Distribution "physique".



# Définition de l'observable

## Observable

Nombre d'événements par unité de temps, de masse chirp perçue (redshiftée), de distance de luminosité et de SNR (intensité du signal par rapport au bruit).

$$\frac{d^4 N}{dt dD_L d\mathcal{M}_z d\rho} = \frac{1}{1+z} \frac{\partial z}{\partial D_L} \frac{\Theta}{\rho} \frac{d^4 N}{dt dz d\mathcal{M} d\Theta}$$

Redshift des masses.

# Définition de l'observable

## Observable

Nombre d'événements par unité de temps, de masse chirp perçue (redshiftée), de distance de luminosité et de SNR (intensité du signal par rapport au bruit).

$$\frac{d^4 N}{dt dD_L d\mathcal{M}_z d\rho} = \frac{1}{1+z} \frac{\partial z}{\partial D_L} \frac{\Theta}{\rho} \frac{d^4 N}{dt dz d\mathcal{M} d\Theta}$$

Relation entre  $z$  et  $D_L$ .

$$z \approx \frac{1}{2(1 - \frac{3}{4}\Omega_M)} \left[ \sqrt{1 + 4(1 - \frac{3}{4}\Omega_M) \frac{D_L}{c/H_0}} - 1 \right]$$

# Définition de l'observable

## Observable

Nombre d'événements par unité de temps, de masse chirp perçue (redshiftée), de distance de luminosité et de SNR (intensité du signal par rapport au bruit).

$$\frac{d^4 N}{dt dD_L d\mathcal{M}_z d\rho} = \frac{1}{1+z} \frac{\partial z}{\partial D_L} \frac{\Theta}{\rho} \frac{d^4 N}{dt dz d\mathcal{M} d\Theta}$$

Effet du détecteur et des angles traduit en terme de SNR

# Définition de l'observable

## Observable

Nombre d'événements par unité de temps, de masse chirp perçue (redshiftée), de distance de luminosité et de SNR (intensité du signal par rapport au bruit).

$$\begin{aligned} \frac{d^4 N}{dt dD_L d\mathcal{M}_z d\rho} &= \frac{1}{1+z} \frac{\partial z}{\partial D_L} \frac{\Theta}{\rho} \frac{d^4 N}{dt dz d\mathcal{M} d\Theta} \\ &= \frac{1}{1+z} \frac{\partial z}{\partial D_L} \frac{dV_c}{dz} \frac{\dot{n}(z)}{1+z} P_{\mathcal{M}} \left( \frac{\mathcal{M}_z}{1+z} \right) P_{\rho}(\rho | \mathcal{M}_z, D_L) \end{aligned}$$

Nombre d'événements dans un volume  $dV_c$  à un redshift  $z$ .

$$\frac{dV_c}{dz} = \frac{4\pi \chi^2(z) c / H_0}{H(z) / H_0} \quad ; \quad \dot{n}(z) = \frac{d^2 N}{dt_{event} dV_c} = (1+z) \times \frac{d^2 N}{dt_{obs} dV_c}$$

# Définition de l'observable

## Observable

Nombre d'événements par unité de temps, de masse chirp perçue (redshiftée), de distance de luminosité et de SNR (intensité du signal par rapport au bruit).

$$\begin{aligned} \frac{d^4 N}{dt dD_L d\mathcal{M}_z d\rho} &= \frac{1}{1+z} \frac{\partial z}{\partial D_L} \frac{\Theta}{\rho} \frac{d^4 N}{dt dz d\mathcal{M} d\Theta} \\ &= \frac{1}{1+z} \frac{\partial z}{\partial D_L} \frac{dV_c}{dz} \frac{\dot{n}(z)}{1+z} P_{\mathcal{M}} \left( \frac{\mathcal{M}_z}{1+z} \right) P_{\rho}(\rho | \mathcal{M}_z, D_L) \end{aligned}$$

Distribution en masse chirp des binaires de trous noirs.

Supposée indépendante du redshift à petites distances (ici  $z \leq 0.3$ ) (Taylor [12]).

# Définition de l'observable

## Observable

Nombre d'événements par unité de temps, de masse chirp perçue (redshiftée), de distance de luminosité et de SNR (intensité du signal par rapport au bruit).

$$\begin{aligned} \frac{d^4 N}{dt dD_L dM_z d\rho} &= \frac{1}{1+z} \frac{\partial z}{\partial D_L} \frac{\Theta}{\rho} \frac{d^4 N}{dt dz dM d\Theta} \\ &= \frac{1}{1+z} \frac{\partial z}{\partial D_L} \frac{dV_c}{dz} \frac{\dot{n}(z)}{1+z} P_{\mathcal{M}} \left( \frac{M_z}{1+z} \right) P_{\rho}(\rho | M_z, D_L) \end{aligned}$$

Probabilité que l'événement de masse  $M_z$  à distance  $D_L$  soit détecté avec un SNR  $\rho$  suffisant (en pratique  $\rho \geq 8$ ).

- 1 Introduction
- 2** **Modèle**
  - Rappels sur les OG
  - Effet du redshift
  - Définition de l'observable
  - Effets du détecteur**
- 3 Paramètres de l'analyse
- 4 Discussions des résultats
- 5 Conclusion

# Orientation et polarisation

Une variable pour toutes les dépendances  
angulaires :

$$\Theta = 2[F_+^2(1 + \cos^2 \iota)^2 + 4F_\times^2 \cos^2 \iota]^{1/2} ;$$

$$0 < \Theta < 4$$

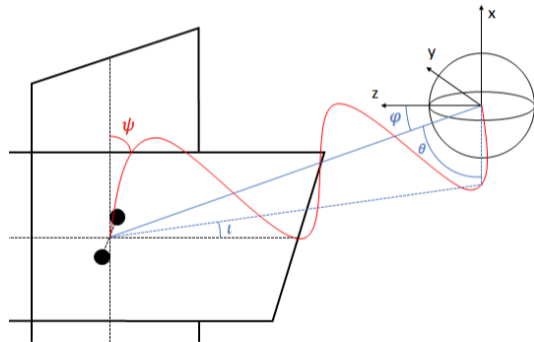
Deux polarisations :

$$F_+ = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta) \cos 2\phi \cos 2\psi$$

$$- \cos \theta \sin 2\phi \sin 2\psi$$

$$F_\times = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta) \cos 2\phi \cos 2\psi$$

$$+ \cos \theta \sin 2\phi \sin 2\psi$$





# Réponse en fréquence du détecteur

## Définition du SNR

Variable évaluant la ressemblance entre le signal observé (bruité) et des modèles paramétrés (L.S Finn, D.F. Chernoff [4]).

$$\rho = 8\Theta \frac{r_0}{D_L} \left( \frac{M_z}{1.2} \right)^{5/6} \sqrt{\zeta(f_{max})}$$

# Réponse en fréquence du détecteur

## Définition du SNR

Variable évaluant la ressemblance entre le signal observé (bruité) et des modèles paramétrés (L.S Finn, D.F. Chernoff [4]).

$$\rho = 8\Theta \frac{r_0}{D_L} \left( \frac{M_z}{1.2} \right)^{5/6} \sqrt{\zeta(f_{\max})}$$

$r_0$  : distance comparant avec une binaire d'étoiles à neutrons de  $1.4M_\odot$ ,  $\zeta$  : effet de la bande passante du détecteur.

$$r_0^2 = \frac{(GM_\odot)^{5/3}}{c^3} \frac{1.2^{5/3}}{8^2} \frac{5}{96\pi} \int_0^{+\infty} \frac{df \pi^2}{(\pi f)^{7/3} S_n(f)} \approx (75 \text{ Mpc})^2$$

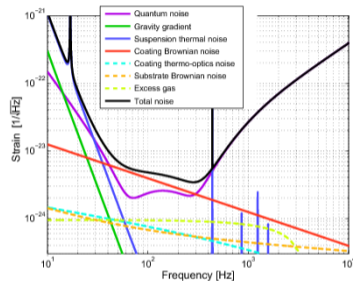
$$\zeta(f_{\max}) = \int_0^{2f_{\max}} \frac{df \pi^2}{(\pi f)^{7/3} S_n(f)} / \int_0^{+\infty} \frac{df \pi^2}{(\pi f)^{7/3} S_n(f)}$$

# Réponse en fréquence du détecteur

## Définition du SNR

Variable évaluant la ressemblance entre le signal observé (bruité) et des modèles paramétrés (L.S Finn, D.F. Chernoff [4]).

$$\rho = 8\Theta \frac{r_0}{D_L} \left( \frac{M_z}{1.2} \right)^{5/6} \sqrt{\zeta(f_{max})}$$



$r_0$  : distance comparant avec une binaire d'étoiles à neutrons de  $1.4M_{\odot}$ ,  $\zeta$  : effet de la bande passante du détecteur.

$$r_0^2 = \frac{(GM_{\odot})^{5/3}}{c^3} \frac{1.2^{5/3}}{8^2} \frac{5}{96\pi} \int_0^{+\infty} \frac{df \pi^2}{(\pi f)^{7/3} S_n(f)} \approx (75 \text{ Mpc})^2$$

$$\zeta(f_{max}) = \int_0^{2f_{max}} \frac{df \pi^2}{(\pi f)^{7/3} S_n(f)} / \int_0^{+\infty} \frac{df \pi^2}{(\pi f)^{7/3} S_n(f)}$$

# Marginalisation sur les angles

## Intégration sur $\Theta$ (Taylor [12])

$$P_{\Theta}(\Theta) \approx \begin{cases} \frac{5}{256} \Theta(4 - \Theta)^3, & \text{si } 0 < \Theta < 4 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

# Marginalisation sur les angles

## Intégration sur $\Theta$ (Taylor [12])

$$P_{\Theta}(\Theta) \approx \begin{cases} \frac{5}{256} \Theta(4 - \Theta)^3, & \text{si } 0 < \Theta < 4 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\int_{\rho_0}^{+\infty} P_{\rho}(\rho | \mathcal{M}_z, D_L) d\rho = \int_x^{+\infty} P_{\Theta}(\Theta) d\Theta$$

$$\equiv C_{\Theta}(x) \approx \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{(1+x)(4-x)^4}{256}, & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

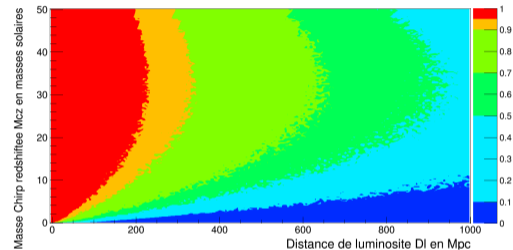


FIGURE – Valeur du paramètre instrumental

$$x = \frac{\rho_0}{8} \frac{D_L}{r_0} \left( \frac{1.2}{\mathcal{M}_z} \right)^{5/6} \left( \sqrt{\zeta(f_{max}(M, z))} \right)^{-1}$$

- 1 Introduction
- 2 Modèle
- 3 Paramètres de l'analyse**
  - **Résumé des paramètres importants**
  - Le taux d'événements
  - Les distributions de masses
  - Corrélation entre la masse chirp et la masse totale
- 4 Discussions des résultats
- 5 Conclusion

# Résumé des paramètres importants

## Forme finale de l'observable

$$\frac{d^3 N}{dt dD_L d\mathcal{M}_z} (\mathcal{M}, M, z, D_L) = \frac{4\pi\chi^2(z)D_H}{\chi(z)E(z) + D_H(1+z)} \frac{\dot{n}(z)}{(1+z)^2} P_{\mathcal{M}} \left( \frac{\mathcal{M}_z}{1+z} \right) C_{\Theta} \left( \frac{\rho_0}{8} \frac{D_L}{r_0} \left( \frac{1.2}{\mathcal{M}_z} \right)^{5/6} \left( \sqrt{\zeta(f_{\max}(M, z))} \right)^{-1} \right)$$

- 1 Introduction
- 2 Modèle
- 3 Paramètres de l'analyse**
  - Résumé des paramètres importants
  - Le taux d'événements**
  - Les distributions de masses
  - Corrélation entre la masse chirp et la masse totale
- 4 Discussions des résultats
- 5 Conclusion



# Le taux d'événements

## Paramétrisation en $z$ de $\dot{n}(z)$

$$\dot{n}(z) = \dot{n}_0 \times \xi(z)$$

A bas redshift :  $\xi(z) = (1+z)^2$

Kovetz et al. [7]

## Valeur du paramètre $\dot{n}_0$

$\dot{n}_0 \approx 9 - 240 \text{ Gpc}^{-3} \cdot \text{yr}^{-1}$  Abbott et al. [1]

On a choisi  $\dot{n}_0 = 99 \text{ Gpc}^{-3} \cdot \text{yr}^{-1}$  [7]

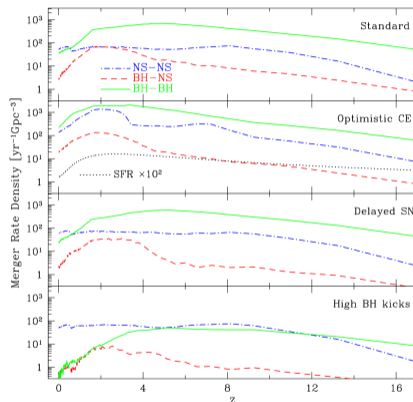


FIGURE – Prédictions des taux d'événements en fonction du redshift

(Dominik et al. [3])

- 1 Introduction
- 2 Modèle
- 3 Paramètres de l'analyse**
  - Résumé des paramètres importants
  - Le taux d'événements
  - Les distributions de masses**
  - Corrélation entre la masse chirp et la masse totale
- 4 Discussions des résultats
- 5 Conclusion

# Les distributions de masses

## Distribution de masses des trous noirs

Différents modèles : fonctions de masses initiales de Salpeter (Salpeter [11])

$$P_m(m) = m^{-\alpha} \mathcal{H}(m - 5) \mathcal{H}(50 - m) \quad \alpha = 2.35 \quad (\text{Kovetz et al. [7]})$$

$$P_m(m) \rightarrow P_m(m) \times \text{Gauss}(\mu, \sigma = 2M_{\odot})$$

# Les distributions de masses

## Distribution de masses des trous noirs

Différents modèles : fonctions de masses initiales de Salpeter (Salpeter [11])

$$P_m(m) = m^{-\alpha} \mathcal{H}(m - 5) \mathcal{H}(50 - m) \quad \alpha = 2.35 \quad (\text{Kovetz et al. [7]})$$

$$P_m(m) \rightarrow P_m(m) \times \text{Gauss}(\mu, \sigma = 2M_{\odot})$$

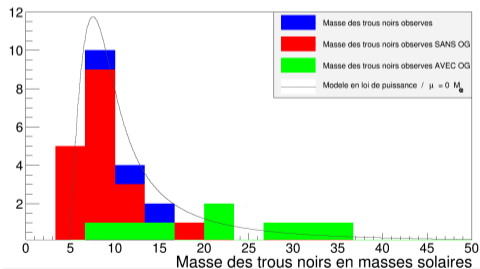


FIGURE – Masses observées et modèle en loi de puissance  $\mu = 0M_{\odot}$

# Les distributions de masses

## Distribution de masses des trous noirs

Différents modèles : fonctions de masses initiales de Salpeter (Salpeter [11])

$$P_m(m) = m^{-\alpha} \mathcal{H}(m - 5) \mathcal{H}(50 - m) \quad \alpha = 2.35 \quad (\text{Kovetz et al. [7]})$$

$$P_m(m) \rightarrow P_m(m) \times \text{Gauss}(\mu, \sigma = 2M_{\odot})$$

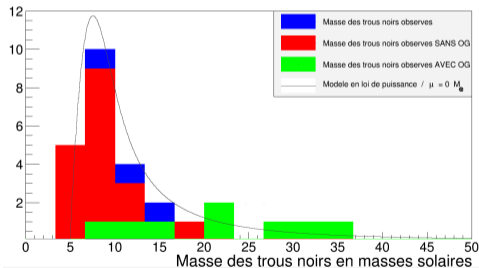


FIGURE – Masses observées et modèle en loi de puissance  $\mu = 0M_{\odot}$

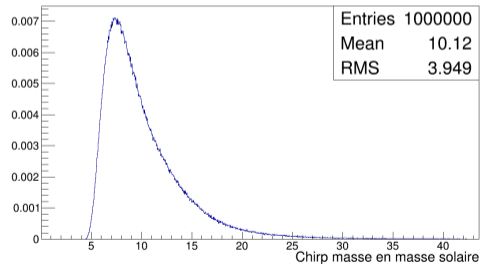


FIGURE – Masse chirp obtenue

# Limites de ces distributions

## De nombreux effets physiques méconnus

Plus hautes masses pour les trous noirs vus par OG !

- Faibles masses plus difficiles à détecter (effet de l'instrument).
- Éjection des faibles masses dans les zones denses (Park et al. [9]).
- Fusions multiples (Gerosa et al. [5]).

# Limites de ces distributions

## De nombreux effets physiques méconnus

Plus hautes masses pour les trous noirs vus par OG !

- Faibles masses plus difficiles à détecter (effet de l'instrument).
- Éjection des faibles masses dans les zones denses (Park et al. [9]).
- Fusions multiples (Gerosa et al. [5]).

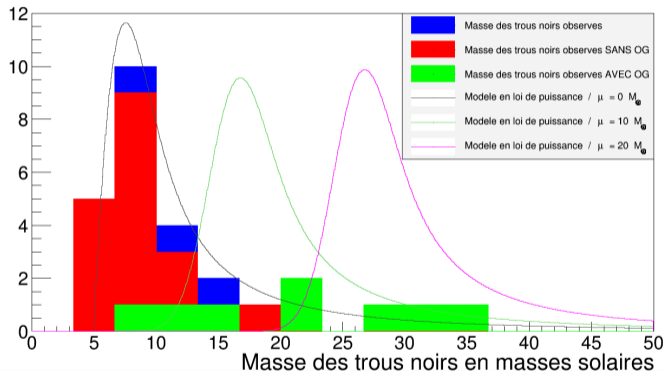


FIGURE – Plusieurs modèles à différentes masses

- 1 Introduction
- 2 Modèle
- 3 Paramètres de l'analyse**
  - Résumé des paramètres importants
  - Le taux d'événements
  - Les distributions de masses
  - Corrélation entre la masse chirp et la masse totale**
- 4 Discussions des résultats
- 5 Conclusion



## Fréquence maximale de l'OG et Masse totale

Le paramètre  $C_\Theta$  est sensible au paramètre de bande passante du détecteur  $\zeta(f_{max})$ , où  $f_{max}$  est la fréquence maximale de rotation de la binaire.

## Fréquence maximale de l'OG et Masse totale

Le paramètre  $C_\Theta$  est sensible au paramètre de bande passante du détecteur  $\zeta(f_{max})$ , où  $f_{max}$  est la fréquence maximale de rotation de la binaire.

Expression de la fréquence maximale de l'OG  $f_{max}^{GW}$

$$f_{max}^{GW} = 2f_{max} = \frac{1570}{1+z} \frac{2.8}{M}$$

Relation entre la masse chirp  $\mathcal{M}$  et la masse totale  $M$  :

$$\mathcal{M}(m_1, m_2) = \mu^{3/5}(m_1, m_2) M^{2/5}(m_1, m_2)$$

Corrélation entre la masse chirp et la masse totale

## Fréquence maximale de l'OG et Masse totale

Le paramètre  $C_\Theta$  est sensible au paramètre de bande passante du détecteur  $\zeta(f_{max})$ , où  $f_{max}$  est la fréquence maximale de rotation de la binaire.

Expression de la fréquence maximale de l'OG  $f_{max}^{GW}$

$$f_{max}^{GW} = 2f_{max} = \frac{1570}{1+z} \frac{2.8}{M}$$

Relation entre la masse chirp  $\mathcal{M}$  et la masse totale  $M$  :

$$\mathcal{M}(m_1, m_2) = \mu^{3/5}(m_1, m_2) M^{2/5}(m_1, m_2)$$

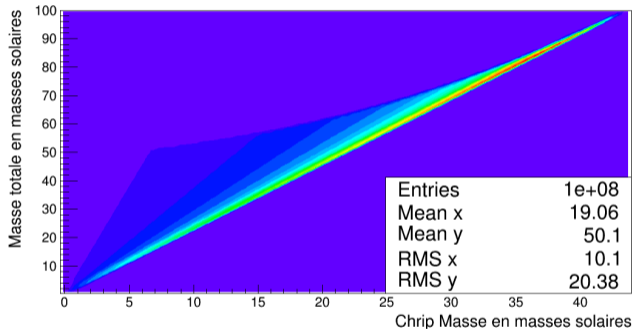
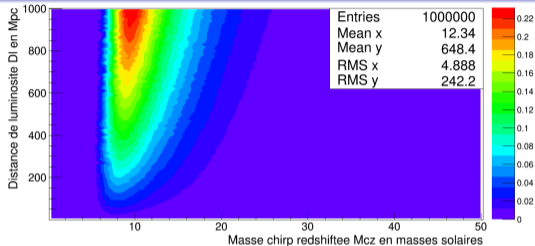


FIGURE – Corrélation masse chirp  $\mathcal{M}$  et masse totale  $M$

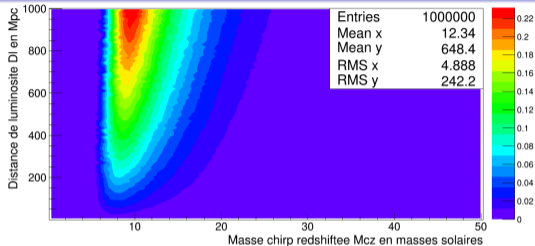
- 1 Introduction
- 2 Modèle
- 3 Paramètres de l'analyse
- 4 Discussions des résultats**
  - **Forme générale des distributions**
  - Effet de la valeur de  $H_0$
  - Limites de la méthode et introduction à une analyse bayésienne
- 5 Conclusion

# Distribution en masse basse ( $\mu = 0$ )



## Sans les effets instrumentaux

- Suit la forme de la distribution de masse.
- Augmentation du nombre d'événements avec la distance de luminosité : Volume considéré plus grand.
- Décalage Vers des plus hautes masses et élargissement quand  $D_L$  et  $z$  augmentent.

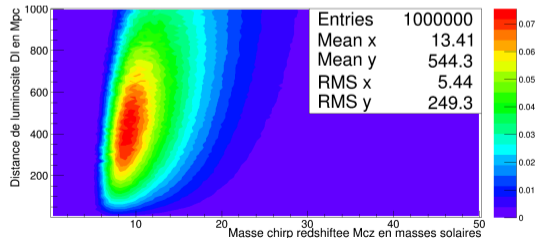
Distribution en masse basse ( $\mu = 0$ )

## Sans les effets instrumentaux

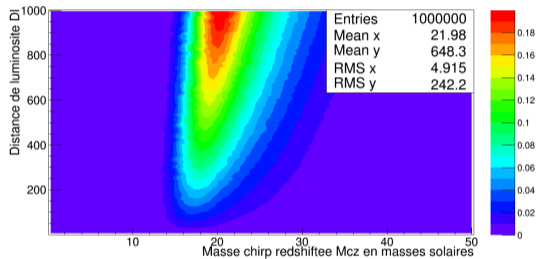
- Suit la forme de la distribution de masse.
- Augmentation du nombre d'événements avec la distance de luminosité : Volume considéré plus grand.
- Décalage Vers des plus hautes masses et élargissement quand  $D_L$  et  $z$  augmentent.

## Avec les effets instrumentaux

- Diminution du nombre d'événements à basse masse et grande distance de luminosité.
- Maximum de la distribution vers 400  $Mpc$  et 10  $M_{\odot}$  !



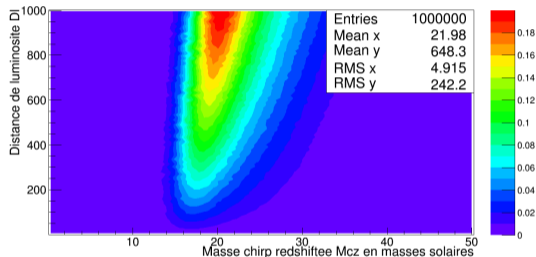
# Distribution en haute basse ( $\mu = 10$ )



## Sans les effets instrumentaux

- Effets du redshift plus importants

# Distribution en haute basse ( $\mu = 10$ )

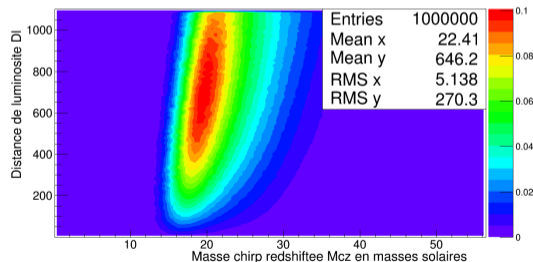


## Sans les effets instrumentaux

- Effets du redshift plus importants

## Avec les effets instrumentaux

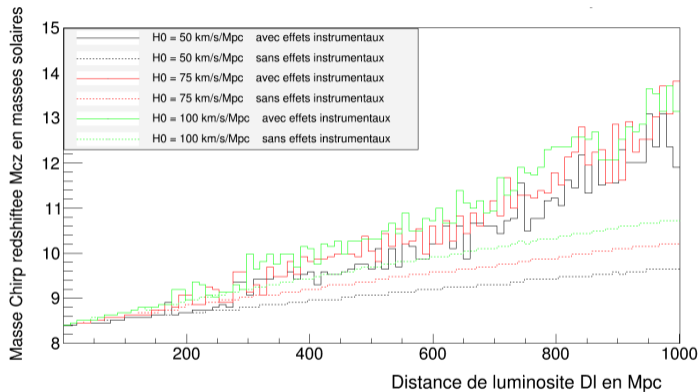
- Effet du détecteur moins important.
- Beaucoup d'événements entre 400 et 1000  $Mpc$  vers 20 – 25  $M_{\odot}$ .





- 1 Introduction
- 2 Modèle
- 3 Paramètres de l'analyse
- 4 Discussions des résultats**
  - Forme générale des distributions
  - Effet de la valeur de  $H_0$**
  - Limites de la méthode et introduction à une analyse bayésienne
- 5 Conclusion

# Effet sur le maximum de la distribution



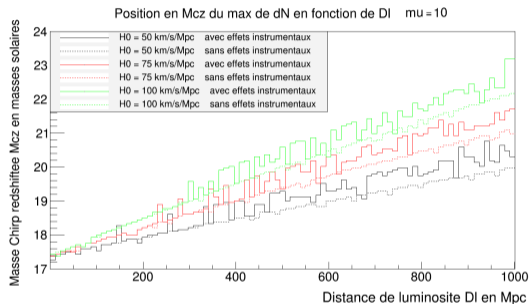
Masse associée au maximum de la distribution  $\mu = 0$

Effet du redshift plus important pour  $H_0$  élevé.

Masse plus important avec les effets du détecteur. Plus de bruit car tirage de  $\mathcal{M}$  puis de  $M$ .

Effet de la valeur de  $H_0$ 

# Masses plus élevées

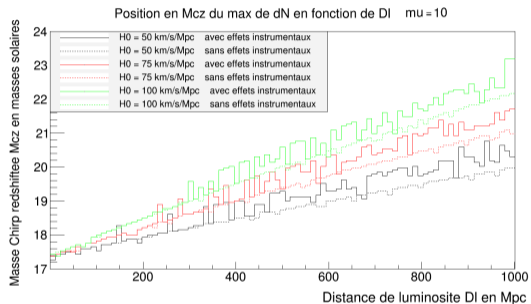


Masse associée au maximum de la distribution  
 $\mu = 10$

Effet du redshift plus important. Effets du détecteur moins important

Effet de la valeur de  $H_0$ 

# Masses plus élevées



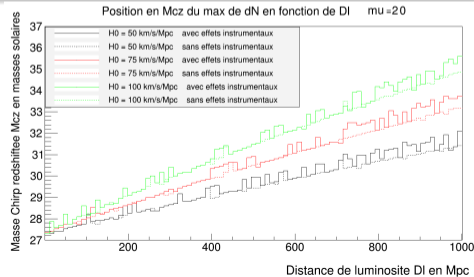
Masse associée au maximum de la distribution  
 $\mu = 10$

Effet du redshift plus important. Effets du détecteur moins important

Masse associée au maximum de la distribution  
 $\mu = 20$

Effet du redshift allant jusqu'à quelques masses solaires. Précision actuelle sur les masses entre 3 et  $20 M_{\odot}$  !

Effet du détecteur presque inexistant. Moins de bruit car plus forte corrélation entre  $\mathcal{M}$  et  $M$ .



- 1 Introduction
- 2 Modèle
- 3 Paramètres de l'analyse
- 4 Discussions des résultats**
  - Forme générale des distributions
  - Effet de la valeur de  $H_0$
  - Limites de la méthode et introduction à une analyse bayésienne
- 5 Conclusion

# Corrélation entre les distributions de masse et la valeur de $H_0$

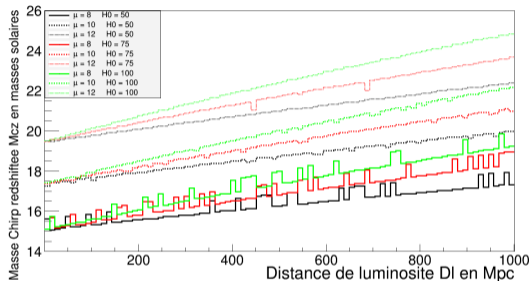


FIGURE – Sans les effets instrumentaux

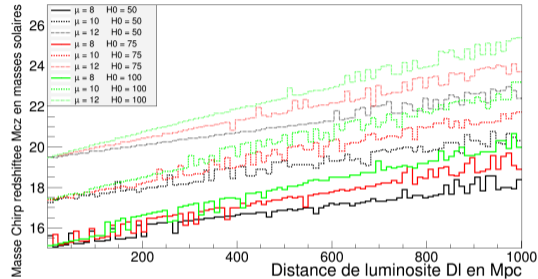


FIGURE – Avec les effets instrumentaux

Effets des distributions de masses et de la valeur de  $H_0$  sur le maximum de la distribution  $dN$

Effet des masses comparable à celui de  $H_0$ . Pour décorrélérer, il faut mieux connaître les distributions en masses.

Effet du détecteur augmente les difficultés à différencier les distributions.

# Vers une analyse bayésienne ?

## Loi de probabilité

La détection suit une loi de Poisson :

Probabilité  $p_i$  au bin  $i$  de détecter  $n_i$  événements avec un modèle  $\mu$  qui en prévoit  $r_i(\vec{\mu})$  :

$$p_i(n_i|\vec{\mu}) = \frac{(r_i(\vec{\mu}))^{n_i} e^{-r_i(\vec{\mu})}}{n_i!}.$$

# Vers une analyse bayésienne ?

## Loi de probabilité

La détection suit une loi de Poisson :

Probabilité  $p_i$  au bin  $i$  de détecter  $n_i$  événements avec un modèle  $\mu$  qui en prévoit  $r_i(\vec{\mu})$  :

$$p_i(n_i|\vec{\mu}) = \frac{(r_i(\vec{\mu}))^{n_i} e^{-r_i(\vec{\mu})}}{n_i!}.$$

## Vraisemblance $L$

$$\mathcal{L}(\vec{\lambda}|\vec{\mu}) = e^{-N_{\vec{\mu}}} \prod_{i=1}^{N_0} r(\vec{\lambda}_i|\vec{\mu})$$

$N_{\vec{\mu}}$  = nombre total d'événements prévus,  $N_0$  nombre d'événements détectés,  $\vec{\lambda} = (\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2, \dots, \vec{\lambda}_{N_0})$ ,  
 $\vec{\lambda}_i = (\mathcal{M}_z, D_L)_i$ ,  $r(\vec{\lambda}_i|\vec{\mu}) = dN(\mathcal{M}_z, D_L)$  (Taylor [12]).



# Vers une analyse bayésienne ?

## Loi de probabilité

La détection suit une loi de Poisson :

Probabilité  $p_i$  au bin  $i$  de détecter  $n_i$  événements avec un modèle  $\mu$  qui en prévoit  $r_i(\vec{\mu})$  :

$$p_i(n_i|\vec{\mu}) = \frac{(r_i(\vec{\mu}))^{n_i} e^{-r_i(\vec{\mu})}}{n_i!}.$$

## Vraisemblance $L$

$$\mathcal{L}(\vec{\lambda}|\vec{\mu}) = e^{-N_{\vec{\mu}}} \prod_{i=1}^{N_0} r(\vec{\lambda}_i|\vec{\mu})$$

$N_{\vec{\mu}}$  = nombre total d'événements prévus,  $N_0$  nombre d'événements détectés,  $\vec{\lambda} = (\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2, \dots, \vec{\lambda}_{N_0})$ ,  
 $\vec{\lambda}_i = (\mathcal{M}_z, D_L)_i$ ,  $r(\vec{\lambda}_i|\vec{\mu}) = dN(\mathcal{M}_z, D_L)$  (Taylor [12]).

## Remarques

- On peut s'affranchir des incertitudes sur  $\hat{n}_0$  en intégrant dessus.
- Attention à bien paramétrer le détecteur. Sinon la méthode peut converger vers une solution biaisée.
- Inclusion des paramètres distributions de masses dans le modèle  $\vec{\mu}$  avec des formes à priori.

# Conclusion

## Résumé des résultats

- Effet du redshift sur les masses observées fonction de  $H_0$ . Faible effet, demande plus de données.
- Fort effet du détecteur, principalement à basse masse et grande distance de luminosité.
- Distributions de masses très peu connues! Beaucoup d'effets à prendre en compte et peu de données. Effet de la méconnaissance des distributions comparable à celui de  $H_0$ .

# Conclusion

## Résumé des résultats

- Effet du redshift sur les masses observées fonction de  $H_0$ . Faible effet, demande plus de données.
- Fort effet du détecteur, principalement à basse masse et grande distance de luminosité.
- Distributions de masses très peu connues! Beaucoup d'effets à prendre en compte et peu de données. Effet de la méconnaissance des distributions comparable à celui de  $H_0$ .

## Ouverture

- Analyse bayésienne pour essayer d'obtenir les distributions de masses. Plus d'inconnus demande plus de statistique.
- Multi-messagers (optique et neutrino) pour avoir plus d'informations sur les trous noirs mis en jeu.

Merci de votre attention !

# Bibliographie I

-  B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, M. R. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. X. Adhikari, and et al.  
The Rate of Binary Black Hole Mergers Inferred from Advanced LIGO Observations Surrounding GW150914.  
*ArXiv e-prints 1602.03842*, December 2016.  
<https://arxiv.org/abs/1602.03842>.
-  V. Bonvin, F. Courbin, S. H. Suyu, P. J. Marshall, C. E. Rusu, D. Sluse, M. Tewes, K. C. Wong, T. Collett, C. D. Fassnacht, T. Treu, M. W. Auger, S. Hilbert, L. V. E. Koopmans, G. Meylan, N. Rumbaugh, A. Sonnenfeld, and C. Spiniello.  
H0LiCOW - V. New COSMOGRAIL time delays of HE 0435-1223 : to 3.8 per cent precision from strong lensing in a flat  $\Lambda$ CDM model.  
*arXiv 1607.01790*, March 2017.  
<https://arxiv.org/abs/1607.01790>.
-  M. Dominik, K. Belczynski, C. Fryer, D. E. Holz, E. Berti, T. Bulik, I. Mandel, and R. O'Shaughnessy.  
Double Compact Objects. II. Cosmological Merger Rates.  
779 :72, December 2013.  
<https://arxiv.org/abs/1308.1546>.

# Bibliographie II



L. S. Finn and D. F. Chernoff.

Observing binary inspiral in gravitational radiation : One interferometer.

*ArXiv gr-qc/9301003*, March 1993.

<https://arxiv.org/abs/gr-qc/9301003>.



D. Gerosa and E. Berti.

Are merging black holes born from stellar collapse or previous mergers ?

*ArXiv e-prints 1703.06223*, March 2017.

<https://arxiv.org/abs/1703.06223>.



S. A. Hughes and D. E. Holz.

Cosmology with coalescing massive black holes.

*Classical and Quantum Gravity*, 20 :S65–S72, May 2003.

<http://adsabs.harvard.edu/abs/2003CQGra...20S...65H>.



E. D. Kovetz, I. Cholis, P. C. Breyse, and M. Kamionkowski.

The Black Hole Mass Function from Gravitational Wave Measurements.

*arXiv 1611.01157*, November 2016.

<http://adsabs.harvard.edu/abs/2016arXiv161101157K>.

# Bibliographie III



LIGO.

LIGO Open Science Center, 2016.

<https://losc.ligo.org/>.



D. Park, C. Kim, H. M. Lee, Y.-B. Bae, and C. Belczynski.

Black Hole Binaries Dynamically Formed in Globular Clusters.

*ArXiv e-prints 1703.01568*, March 2017.

<https://arxiv.org/abs/1703.01568>.



Planck Collaboration, P. A. R. Ade, N. Aghanim, M. Arnaud, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, A. J. Banday, R. B. Barreiro, J. G. Bartlett, and et al.

Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters.

594 :A13, September 2016.

<https://arxiv.org/abs/1502.01589>.



Edwin E. Salpeter.

The Luminosity function and stellar evolution.

*Astrophys. J.*, 121 :161–167, 1955.

# Bibliographie IV



Stephen Taylor.

*Exploring the Cosmos with Gravitational Waves.*

PhD thesis, Cambridge U., Inst. of Astron., 2014.

[https://gwic.ligo.org/thesisprize/2014/taylor\\_thesis.pdf](https://gwic.ligo.org/thesisprize/2014/taylor_thesis.pdf).



# Autres méthodes de détections

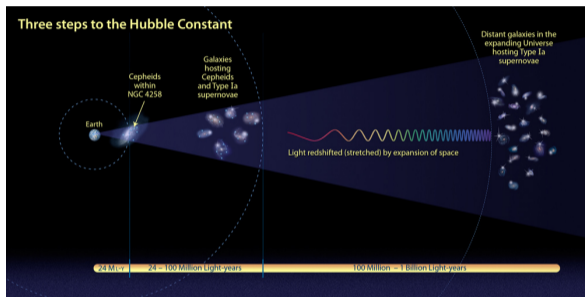


FIGURE – Méthode de mesure par le télescope Hubble

(NASA/ESA, A. Feild (STScI))

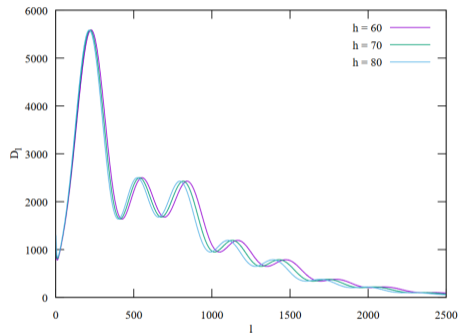


FIGURE – Méthode de mesure par Planck

(cosmology.education)

## Valeur de la constante de Hubble au fil des mesures

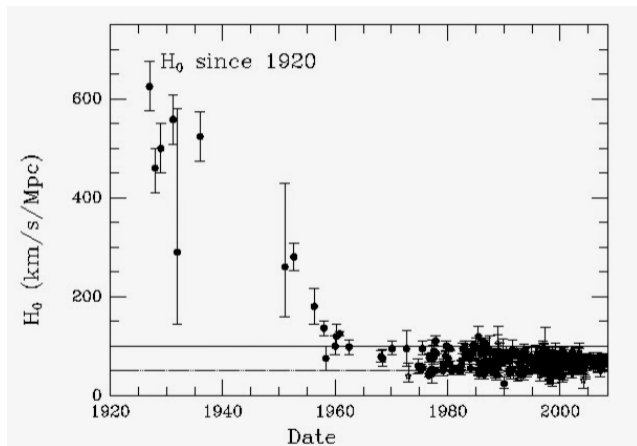
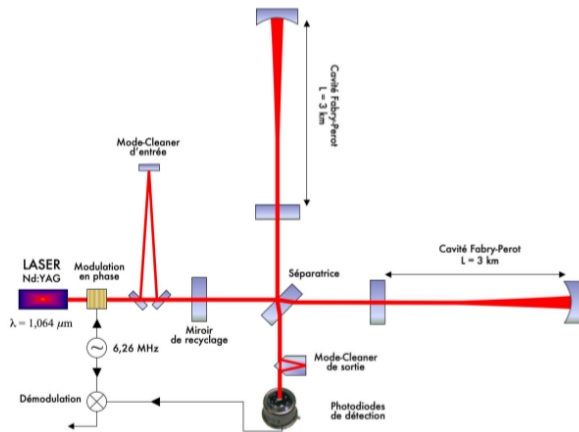
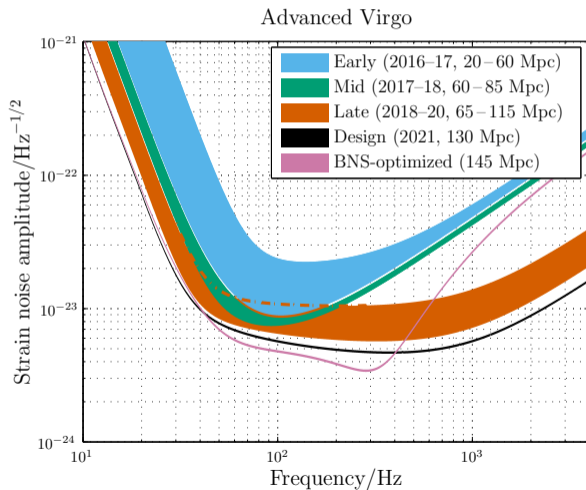


FIGURE – Convergences des mesures de  $H_0$

(John P. Huchra, Harvard)

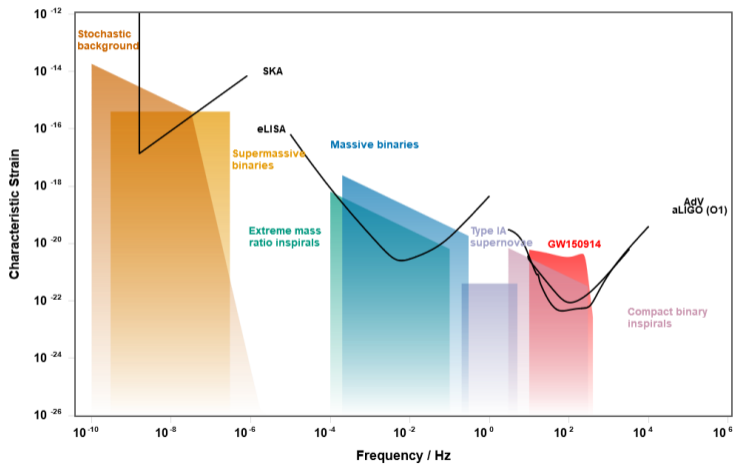


# Sensibilité



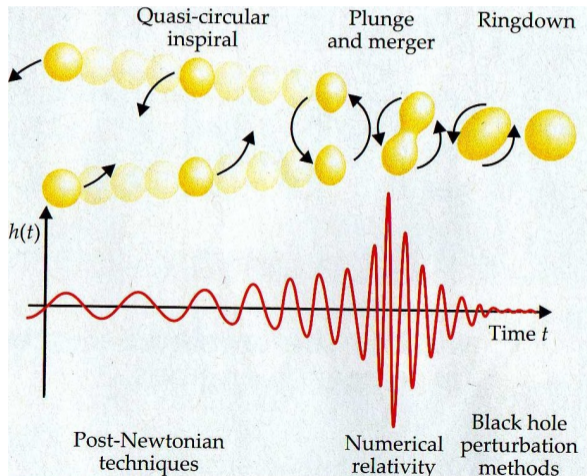
(Abbott et al.)

# Autres détecteurs



(C. Moore et al.)

# Phases de la fusion



(Myridis, N.E.)

# Polarisation

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \exp(i\eta_{\mu\nu} k_\sigma x^\sigma) = A_{\mu\nu} \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}))$$

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{12} & -A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A_{11} = 1$  et  $A_{12} = 0$  : polarisation notée +.

$A_{11} = 0$  et  $A_{12} = 1$  : polarisation notée  $\times$ .



FIGURE – Polarisation rectiligne



FIGURE – Polarisation circulaire

(D. Buskalic)

# Modèle Cosmologique I

## Première équation de Friedmann

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = H_0^2 \left( \frac{\Omega_M}{a^3} + \Omega_\Lambda \right)$$

## Temps-redshift

$$\begin{aligned} \dot{a}^2 &= H_0^2 \left( \frac{\Omega_M}{a} + \Omega_\Lambda a^2 \right) \Leftrightarrow \dot{a} = H_0 \sqrt{\frac{\Omega_M}{a} + \Omega_\Lambda a^2} \\ \Leftrightarrow \frac{d(1/(1+z))}{dt} &= -\frac{dz}{dt} \frac{1}{(1+z)^2} = H_0 \sqrt{\Omega_M(1+z) + \Omega_\Lambda \frac{1}{(1+z)^2}} \\ \Leftrightarrow dt &= -\frac{dz}{H_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega_M(1+z)^5 + \Omega_\Lambda(1+z)^2}} \end{aligned}$$



# Modèle Cosmologique II

## Constante de Hubble

$$dv = cdz = H(z)d\chi$$

$$H = \frac{\dot{a}}{a}$$

$$\Leftrightarrow H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}$$

## Distance Comobile

$$ds^2 = 0 \Leftrightarrow cdt = ad\chi$$

$$\Leftrightarrow d\chi = \frac{cdt}{a}$$

$$\Leftrightarrow \chi(t) = \int_t^{t_0} \frac{cdt'}{a(t')}$$

$$\Leftrightarrow \chi(z) = \int_{z_0=0}^z \frac{cdz'}{H(z')}$$

$$\chi(z) \approx \chi(0) + z \left. \frac{\partial \chi}{\partial z} \right|_{z=0} + \frac{z^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right|_{z=0}$$

$$\Leftrightarrow \chi(z) \approx D_H \left[ z + \frac{3}{4} \Omega_M z^2 \right]$$

## Modèle Cosmologique III

### Distance de luminosité

$D_L = (1+z)\chi$  Dilatation de l'espace pendant le temps de trajet de la lumière.

$$D_L(z) \approx D_H \left[ z + \left(1 - \frac{3}{4}\Omega_M\right)z^2 \right]$$

$$\Leftrightarrow z \approx \frac{1}{2\left(1 - \frac{3}{4}\Omega_M\right)} \left[ \sqrt{1 + 4\left(1 - \frac{3}{4}\Omega_M\right)\frac{D_L}{D_H}} - 1 \right]$$