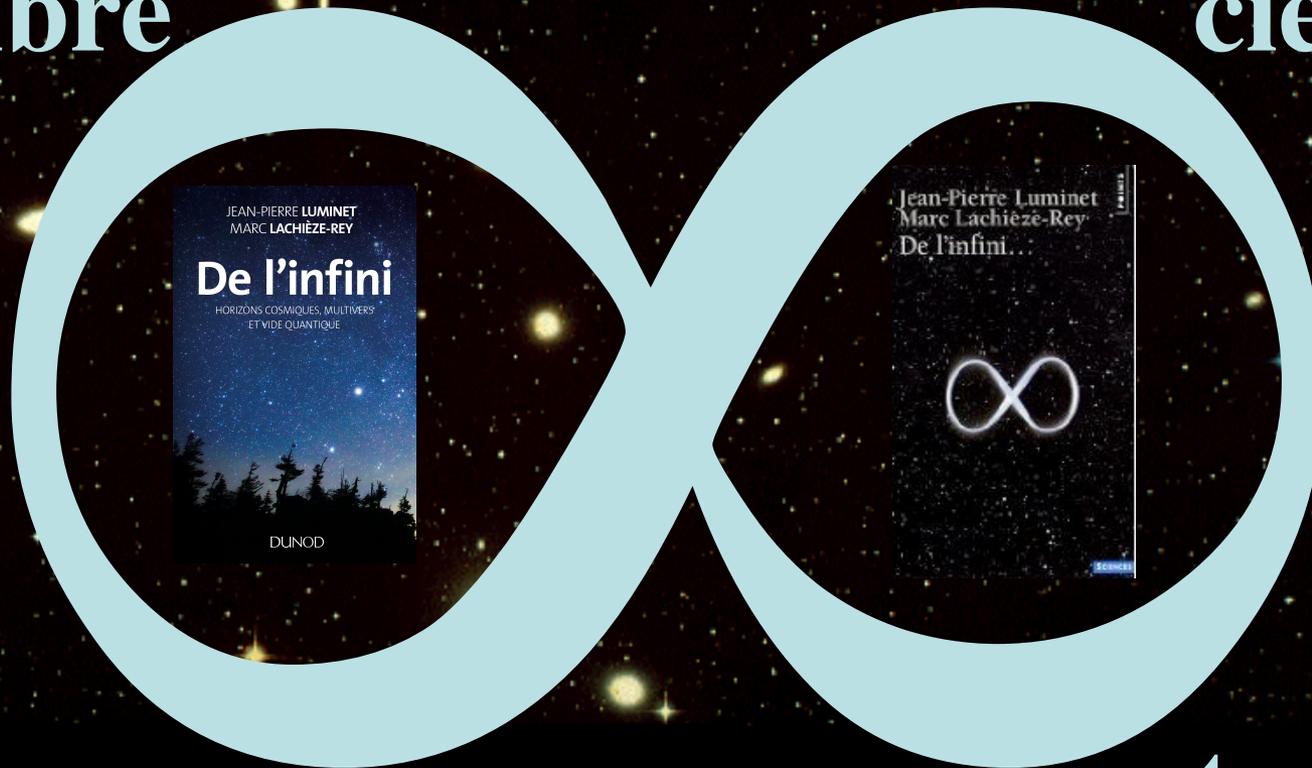


# Jean-Pierre Luminet

Laboratoire d'Astrophysique de Marseille  
Centre de Physique Théorique  
& Observatoire de Paris

nombre

ciel



matière

temps

# Infiniment grand / Infiniment petit

Cosmologie	Sciences de la matière	Mathématiques	Philosophie, théologie art, etc.
espace temps big-bang trous noirs	particules élémentaires	$0$ $\infty$	<ul style="list-style-type: none"><li>• existe-t-il en dehors de la pensée?</li><li>• attribut de Dieu?</li><li>• perspective...</li></ul>

A vast field of stars in space, with the text "L'infini du nombre" overlaid in red. The stars are of various colors, including yellow, white, blue, and red, and are scattered across a dark, starry background. The text is centered and written in a bold, sans-serif font.

**L'infini du  
nombre**

# Les grands nombres (1)

\* Nombre d'étoiles visibles

3 000

\* Myriade

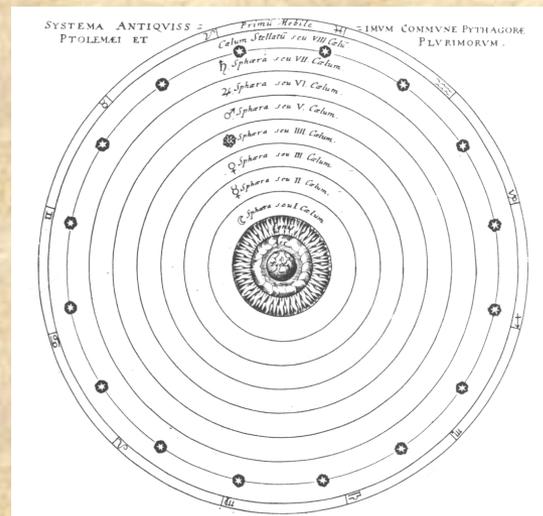
10 000

M -> m -> ∞

\* Archimède :  
le compteur de sable

$10^{63}$  dans  
l'univers

$\ll 10^{800\,000\,000}$



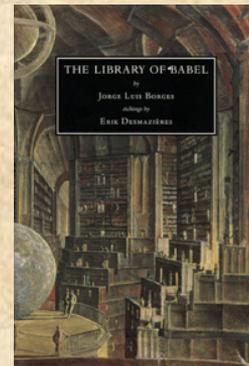
# Les grands nombres (2)

\* Nombre de particules dans l'univers  $10^{87}$

\* **Googol**  $10^{100}$

\* Les singes dactylographes & Shakespeare  $10^{107}$  années

\* Borges : la bibliothèque de Babel, l'Immortel

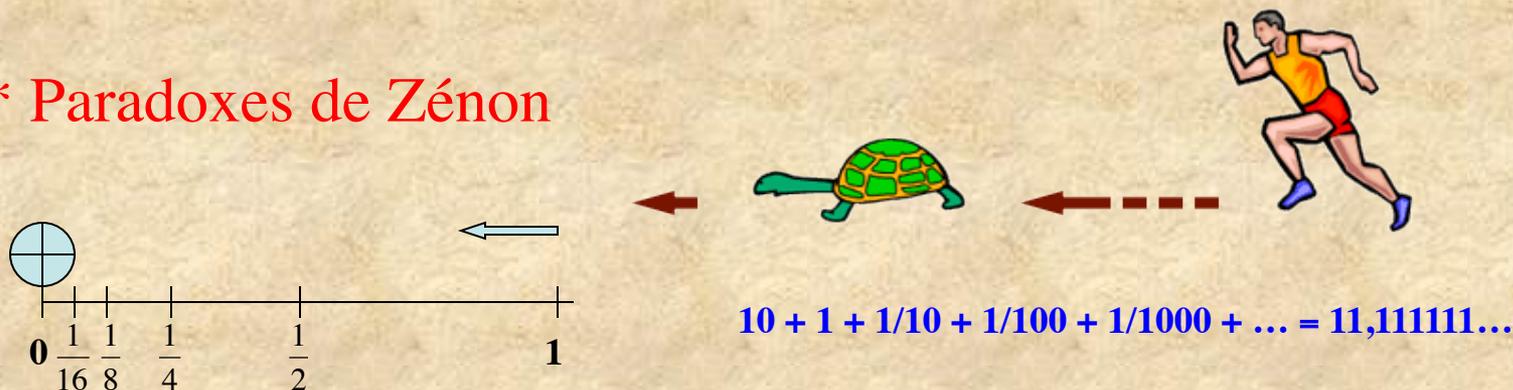


\* **Nombre de Graham** : très grand nombre « utile »

$\gg 10^{800\,000\,000}$

# Les paradoxes de l'infini (1)

## \* Paradoxes de Zénon



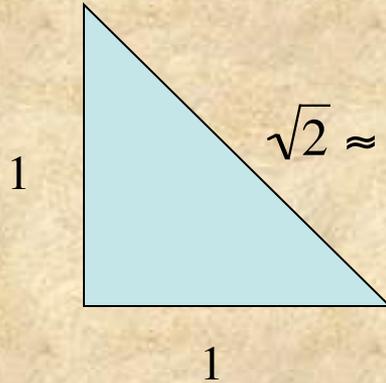
- \* **Aristote**
  - Infini par composition (les nombres)  $1+1=2, 2+1=3, \text{etc}$
  - Infini par division (la matière)  $\neq$  Atomistes
  - Infini par composition et division (le temps)  $\neq$  christianisme

\* Exemple :  
Espace fini  
 $\neq$  Atomistes

<del>Infini actuel</del>	<b>Infini potentiel</b>
<del>Réalisé dans la nature</del>	Fiction intellectuelle sans réalité physique

**Pourtant ... les irrationnels!**

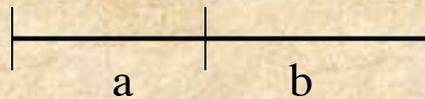
# Les irrationnels



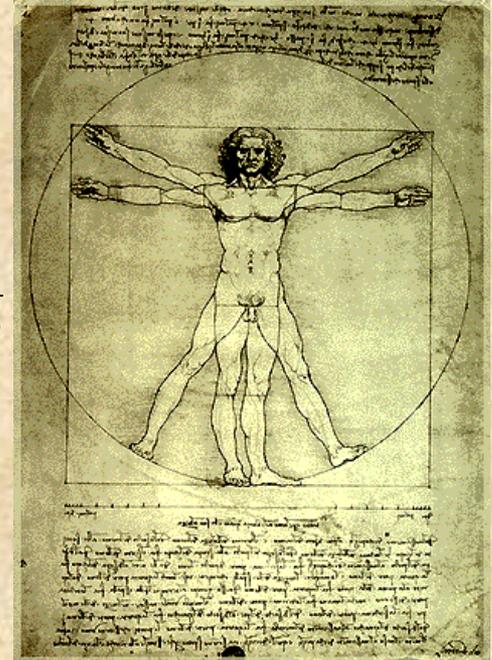
$$\sqrt{2} \approx 1,414\dots$$

- Nombre infini de décimales
- pas une fraction

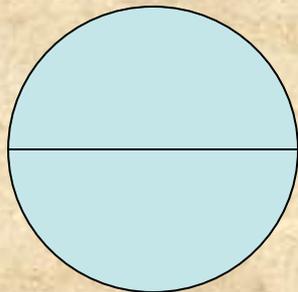
Nombre d'or :



$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b}$$



Le nombre pi :



$$\text{circonférence} / \text{diamètre} = \pi$$

# Les paradoxes de l'infini (2)

Yajur Veda (Inde, v. 1200–900 av. J-C):

« Si vous retranchez ou ajoutez une partie à l'infini, le résultat est toujours l'infini »

**\* Paradoxe de la réflexivité** (la partie peut être aussi grande que le tout)

**N** : 1, 2, 3, ..., 100, 101, ...

**P** : 2, 4, 6, ..., 200, 202, ...

**C** : 1, 4, 9, ..., 10000, ...

**M**:  $10^6$ ,  $10^{12}$ ,  $10^{24}$ , ...

=> **Même**

« cardinal »!

**\* L'hôtel de Hilbert**

**==> Définition de l'infini!**

(Bolzano, 1851)

# Une hiérarchie d'infinis!

**Cantor (1845-1918)**

**Entiers  $\mathbb{N}$**  : 1, 2, 3, ...

**Rationnels  $\mathbb{Q}$**  : 1/1, 2/1, 3/1, 1/3, 3/2, 2/3, ...

**Réels  $\mathbb{R}$**  : rationnels + irrationnels



**Nombres transfinis:**

$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_3, \dots$

$\aleph_0, 2^{\aleph_0}, 2^{2^{\aleph_0}}, \dots$

**Hypothèse du continu:**  
(Cantor, 1890)

$2^{\aleph_0} = \aleph_1 ?$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$

mais même cardinal:

**le dénombrable**  $\aleph_0$

**le continu**  $2^{\aleph_0} > \aleph_0!$

# Incomplétude!

- **L'hypothèse du continu est indécidable**
- **Théorème d'incomplétude de Gödel (1931):**  
tout système axiomatique contient  
une proposition indécidable

# Nécessité de l'infini actuel

## Suites de Goodstein

$$266 = 2^8 + 2^3 + 2^1$$

$$g_1(266) = 2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2$$

$$g_2(266) = 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 3 - 1 \approx 10^{37}$$

$$g_3(266) = 4^{4^{4+1}} + 4^{4+1} + 2 - 1 \approx 10^{615}$$

$$g_4(266) = \dots \approx 10^{10000}!$$

$$\text{quand } n \rightarrow \infty, \quad g_n(266) \rightarrow 0 !!$$

**Théorème 1 :** toute suite de Goodstein tend vers zéro

**Exemple:**  $g_n(4) = 0$  pour  $n \approx 10^{130\,000\,000}$  !

**Théorème 2 :** ne peut être démontré qu'à l'aide des transfinis

**==> l'arithmétique est incomplète !**

A vast field of stars in space, with the text "L'infini du ciel" overlaid in the center. The stars are of various colors, including yellow, white, blue, and red, and are scattered across a dark, starry background. The text is in a bold, red, sans-serif font.

**L'infini du ciel**

# ESPACE

Infini

Fini

Grèce antique

Atomistes  
Milésiens  
Stoïciens  
Lucrece

Aristote

Europe médiévale

N. de Cuse

Ptolémée

Moyen-Âge

Dante

Copernic

Kepler

Cosmologie classique

Digges  
Bruno  
Descartes  
Newton  
Kant

Riemann

Einstein 1917

Friedmann

Lemaître

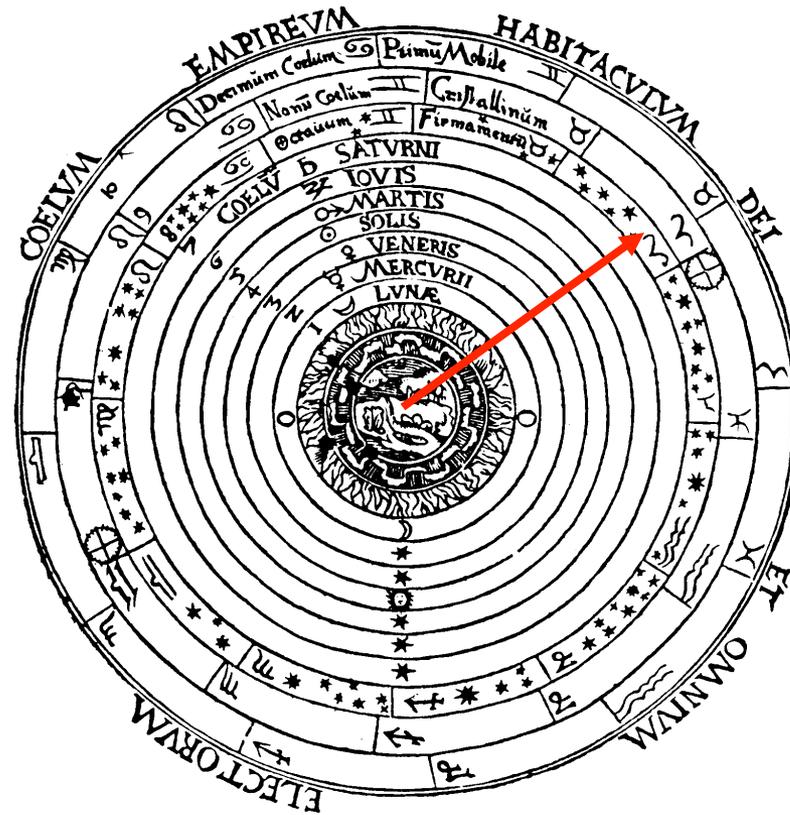
Cosmologie relativiste

Einstein - de Sitter  
Inflation

Univers chiffonné

?

# Modèle d'espace fini avec bord



Taille : 8700 ans de marche à 40 lieues/jour  
(Maimonides, XII<sup>e</sup> s.)

# *Le paradoxe du bord*

Archytas de Tarente (V<sup>e</sup> s. av.JC), Lucrece (I<sup>er</sup> s. av.JC)



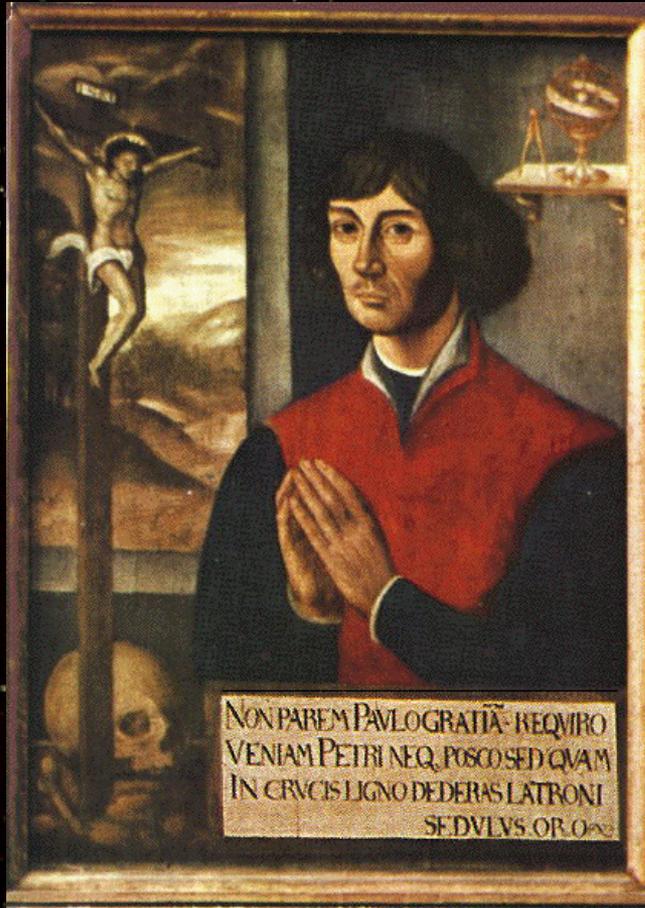
## Atomistes : Démocrite, Leucippe

« Nulle part, en aucun sens, à droite ni à gauche, en haut ni en bas, **l'univers n'a de limite.** ; cela ressort clairement de la nature même du vide. Si donc de toutes parts s'étend un libre espace sans limites, si des **atomes innombrables multipliés à l'infini** voltigent de mille façons et de toute éternité, est-il possible de croire que notre globe et notre firmament aient été seuls créés ? Ce monde est l'ouvrage de la nature. Spontanément, **par le seul hasard des rencontres**, les atomes ont réussi à former la terre, la mer, le ciel et les espèces vivantes. Il faut donc convenir **qu'il s'est formé ailleurs d'autres agrégats de matière semblables à ceux de notre monde.** »

Epicure, 341-270 av.J.C.

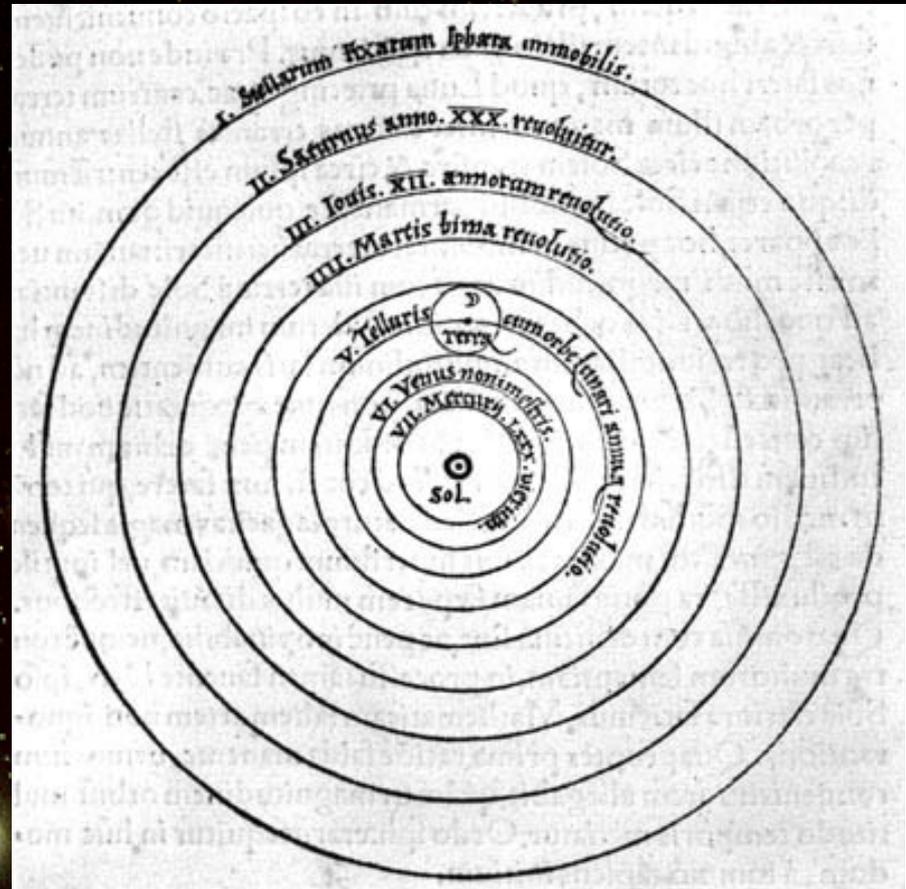
Lucreèce, 98-55 av.J.C.

# Copernic ( 1473-1543)



NON PAREM PAULO GRATIA REQUIRO  
VENIAM PETRI NEQ. POSCO SED QVAM  
IN CRVCIS LIGNO DEDERAS LATRONI  
SE DVLVS OR. O.

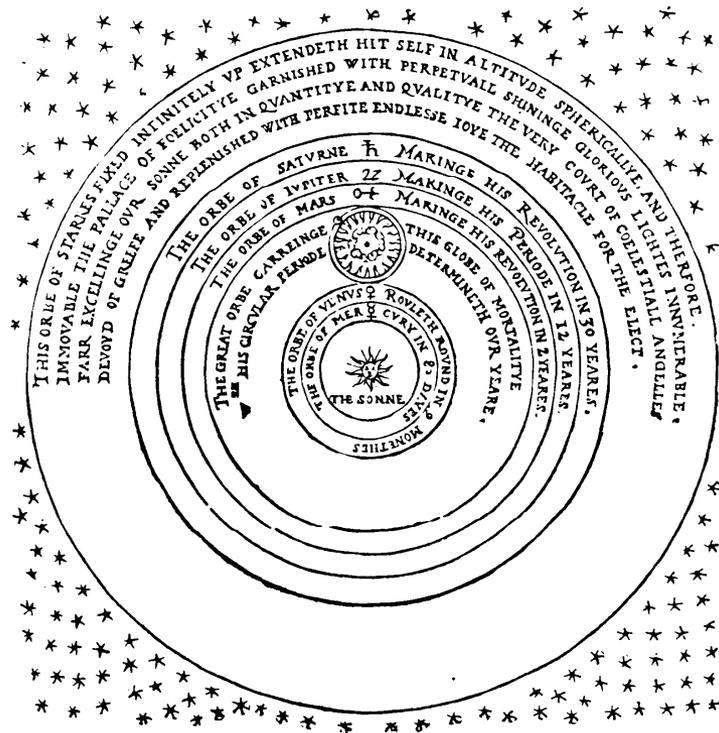
De revolutionibus orbium coelestium  
(1543)



Univers héliocentrique, mais fini

# Espace infini ?

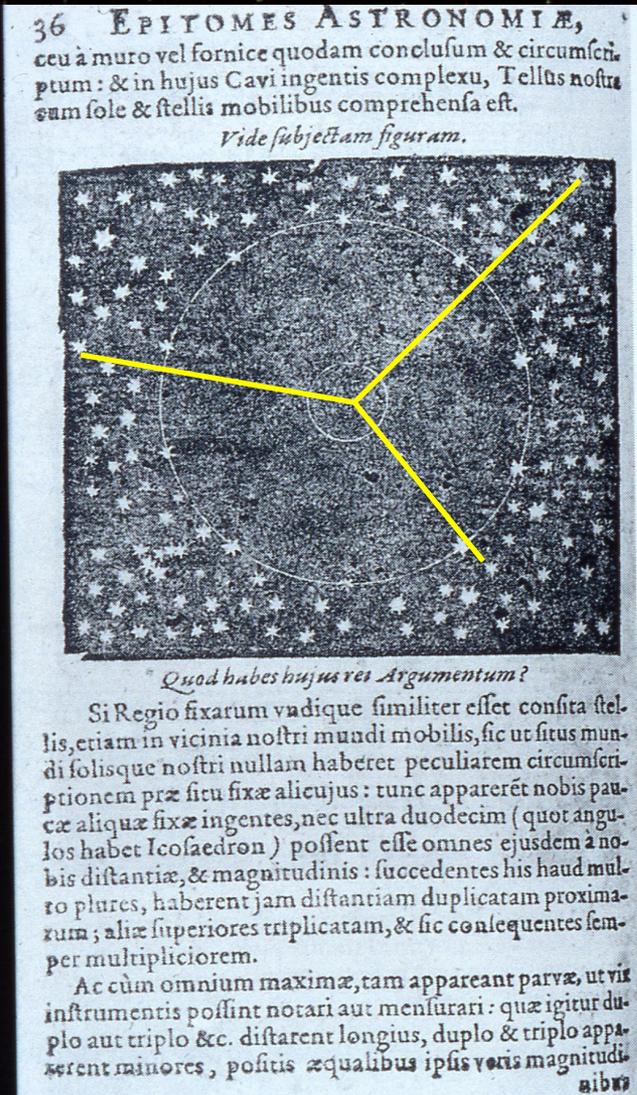
☾ A perfit description of the Caeſtiall Orbes,  
according to the moſt auncient doctrine of the  
Pythagoreans. &c.



*A Perfit Description of the Caeſtiall Orbes  
according to the moſt aunciente doctrine of the  
Pythagoreans, latelye revived by Copernicus*  
**Thomas Digges, 1576**

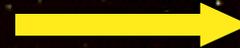
*De l'infinito, universo e mondi*  
**Giordano Bruno (1548-1600)**

# Paradoxe de la nuit noire



**Johannes Kepler :**  
**Epitomé de l'astronomie**  
**Copernicienne (1621)**

Si l'espace était infini  
(nombre infini d'étoiles) et  
éternel, la nuit serait  
éblouissante !



**L'espace est fini**

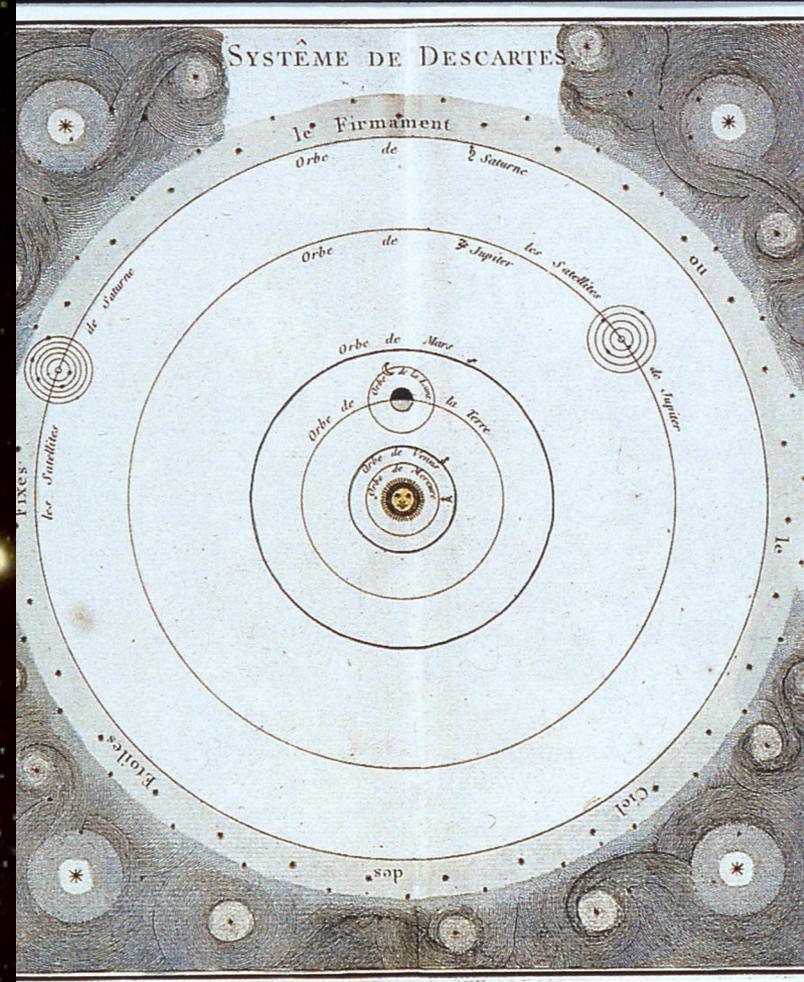


Dialogue sur les grands systèmes du monde (1632)

Galilée :

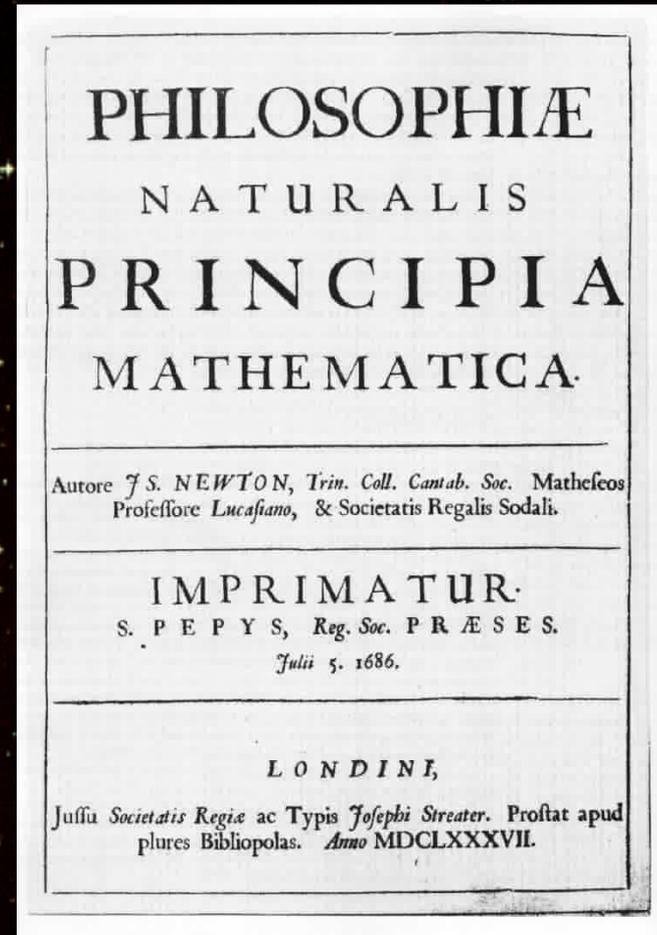
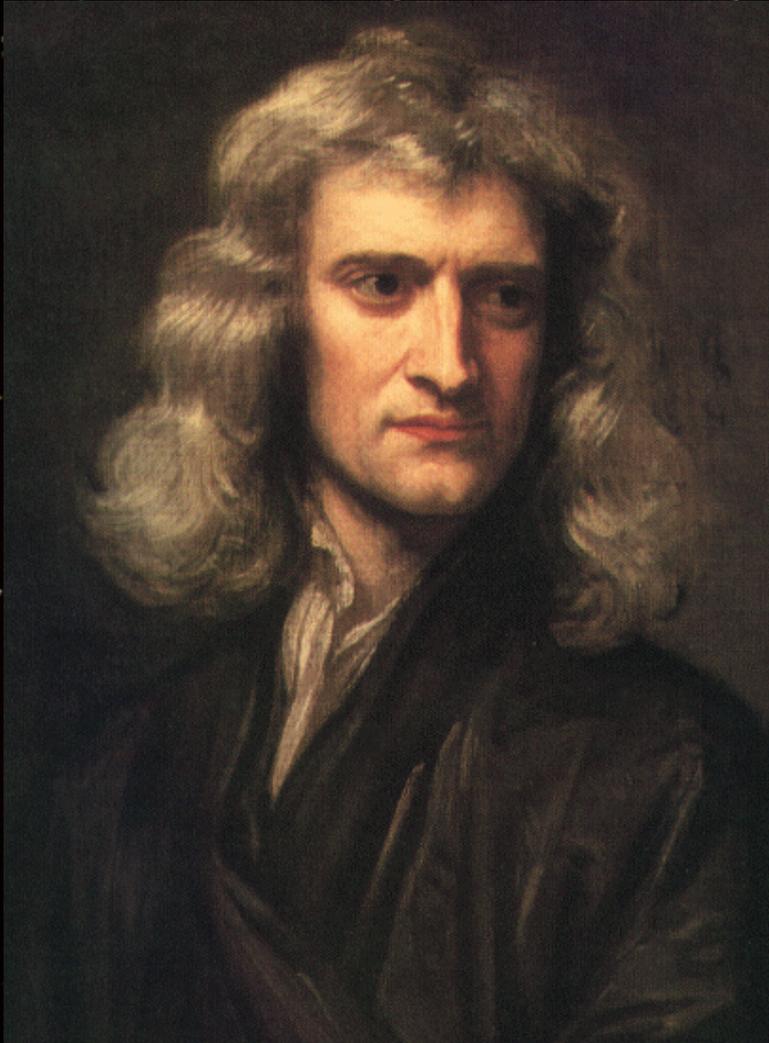
« Il est encore non décidé (et je crois que cela le restera toujours pour la science humaine) si l'Univers est fini ou infini. »

# René Descartes ( 1596-1650)

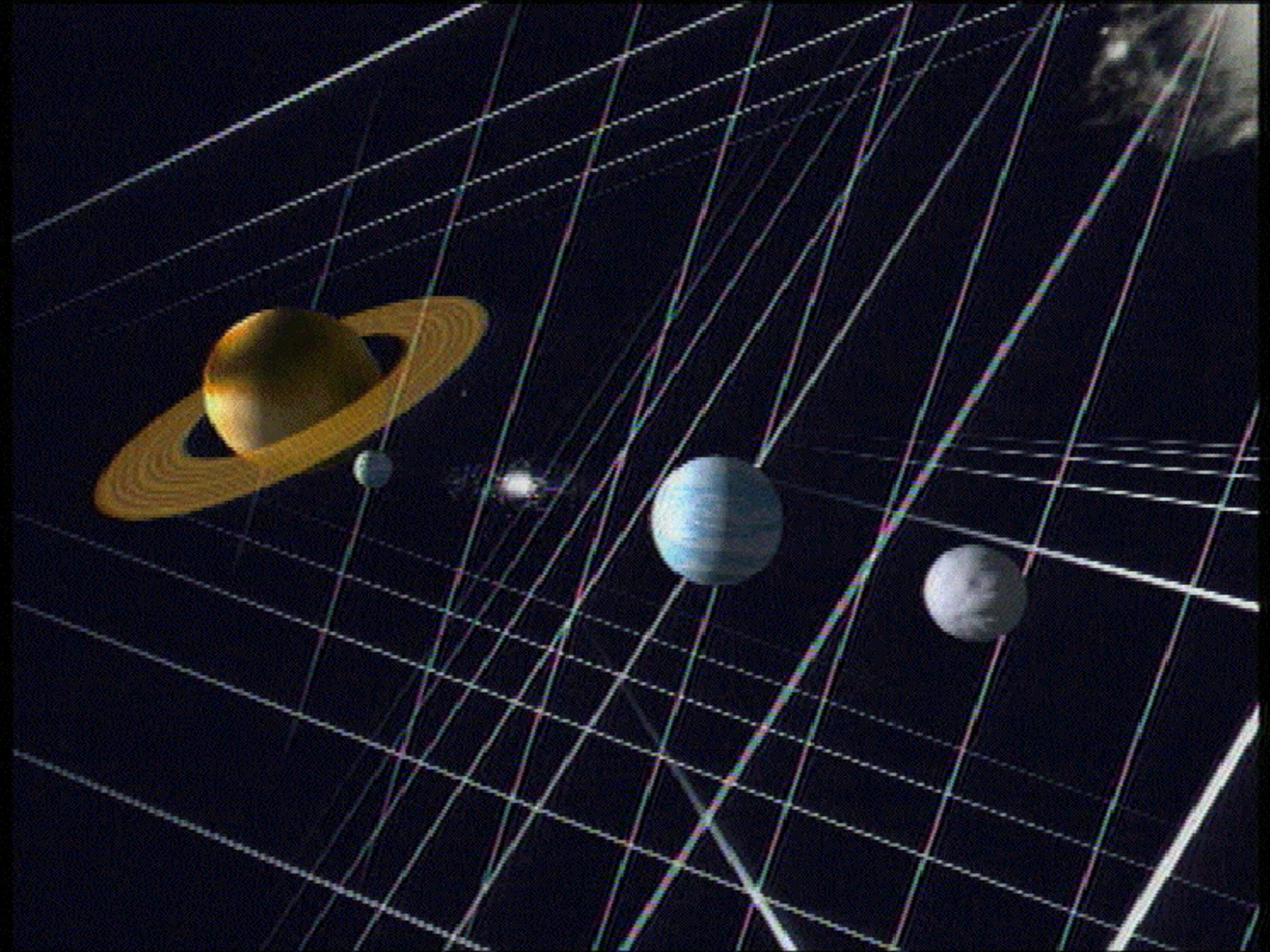


Système du monde de Descartes

# Isaac Newton ( 1642-1727)



Principia ... (1687)



# Paradoxe de la nuit noire (Olbers)



## EURÉKA

C'EST avec une humilité non affectée, —  
c'est même avec un sentiment d'effroi,  
— que j'écris la phrase d'ouverture de  
cet ouvrage; car de tous les sujets imaginables,  
celui que j'offre au lecteur est le plus solennel,  
le plus vaste, le plus difficile, le plus auguste.

→ Le temps  
est fini !



Edgar Poe, Eureka  
(1848)

# Paradoxe de la duplication

Louis-Auguste Blanqui (1871)

« Chaque terre, contenant une de ces collectivités humaines particulières, résultat de modifications incessantes, doit se répéter des milliards de fois, pour faire face aux nécessités de l'infini. De là des milliards de terres, absolument sosies, personnel et matériel, où pas un fétu ne varie, soit en temps, soit en lieu, ni d'un millièmè de seconde, ni d'un fil d'araignée. [...] Ainsi, par la grâce de sa planète, chaque homme possède dans l'étendue un nombre sans fin de doublures qui vivent sa vie, absolument telle qu'il la vit lui-même. Il est infini et éternel dans la personne d'autres lui-même, non seulement de son âge actuel, mais de tous ses âges. Il a simultanément, par milliards, à chaque seconde présente, des sosies qui naissent, d'autres qui meurent, d'autres dont l'âge s'échelonne, de seconde en seconde, depuis sa naissance jusqu'à sa mort. »

The background of the slide is a deep black space filled with numerous stars of varying brightness and colors, including white, yellow, and blue. In the upper right quadrant, there is a prominent, bright yellow and white spiral galaxy with distinct arms. Other smaller, fainter galaxies and star clusters are scattered across the field of view.

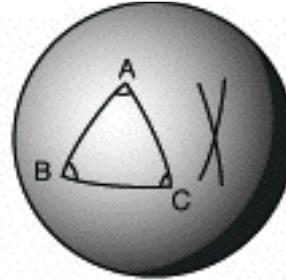
**Solution « logique » ?**

**Espace fini sans bord !**

# XIX<sup>e</sup> s. : Géométries Non-euclidiennes



Riemann (1854)

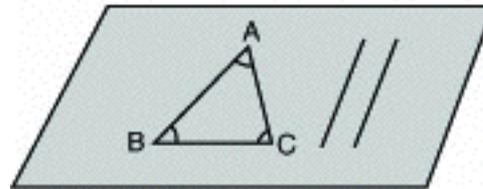


$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > 180^\circ$$

**Courbure Positive**



Gauss (1848)



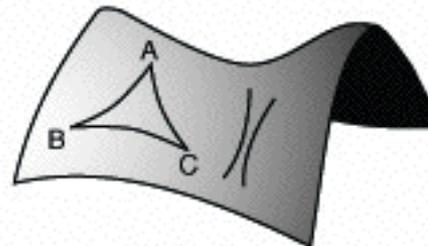
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

**Courbure Nulle**



N.I. Lobatchevski  
1793 - 1856

Lobatchevski  
(1829)



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 180^\circ$$

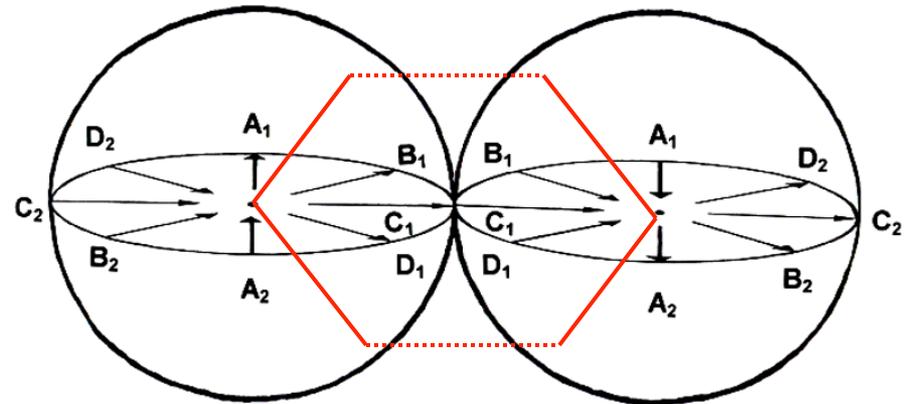
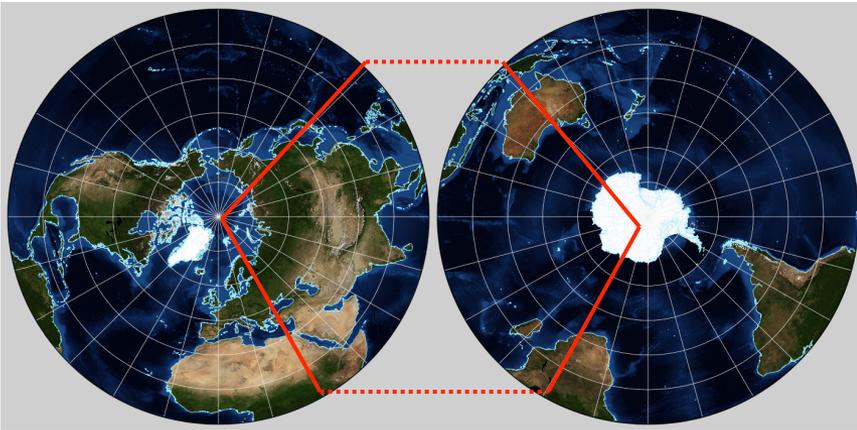
**Courbure Négative**

# L'hypersphère de Riemann : un espace fini sans bord

Sphère = Surface (2D)  
d'un volume (3D)  
sphérique

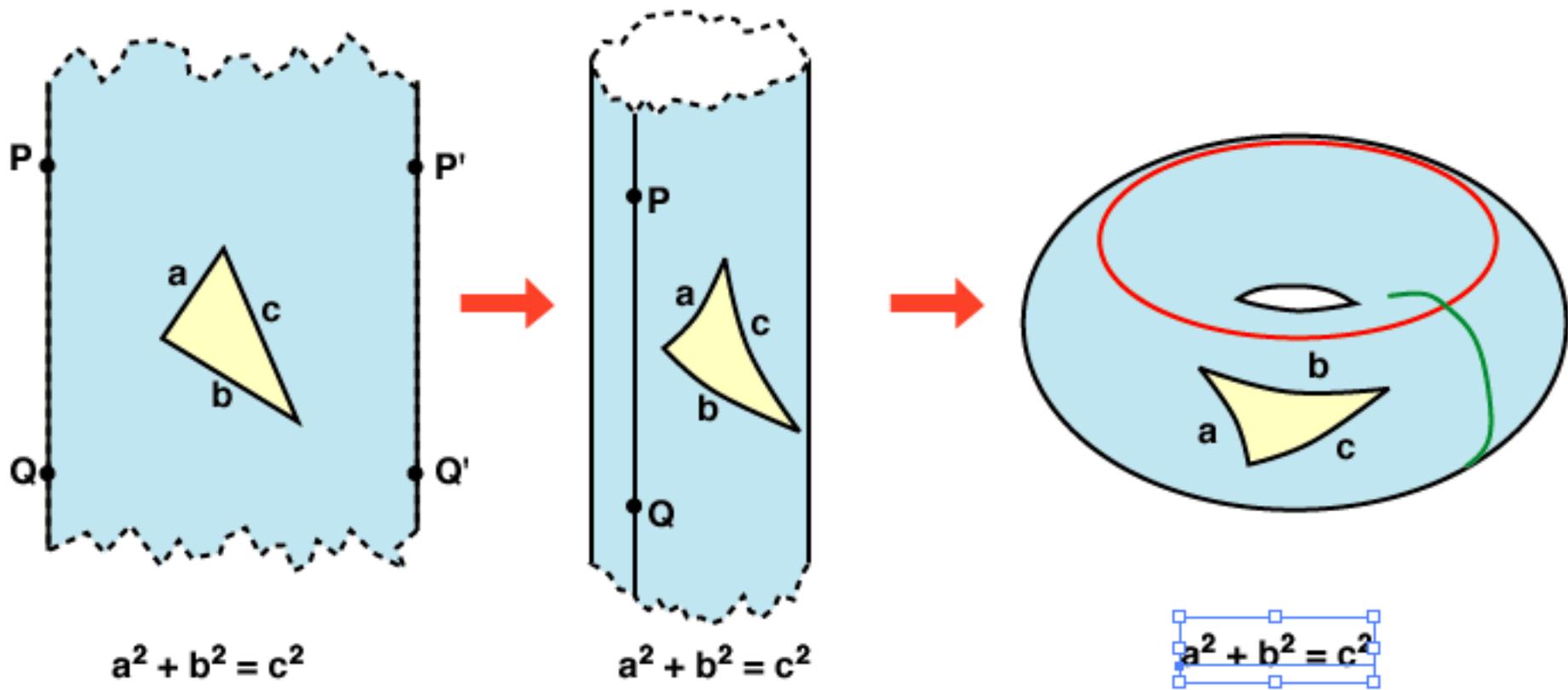


Hypersphère



Volume fini, sans bord!

# *XIX<sup>e</sup> s. : Topologie*

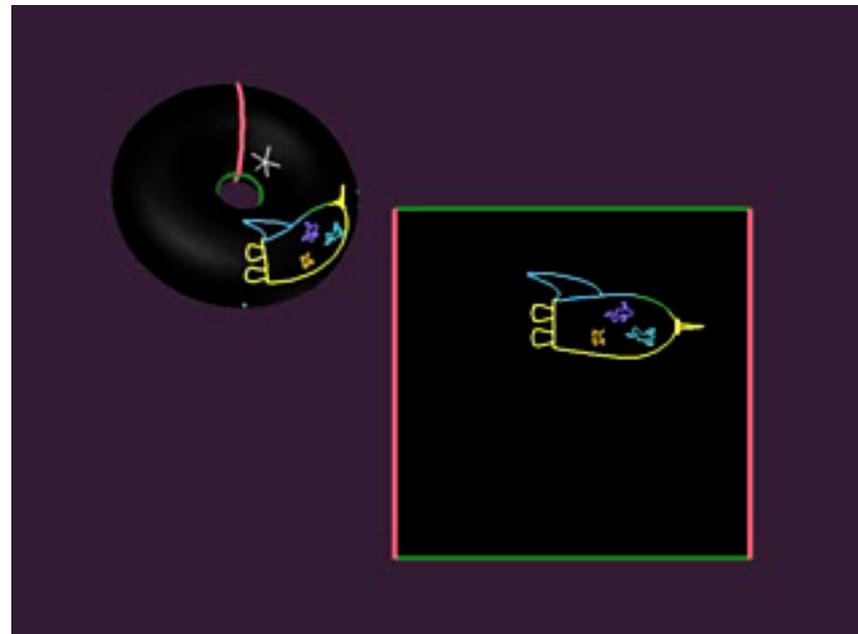
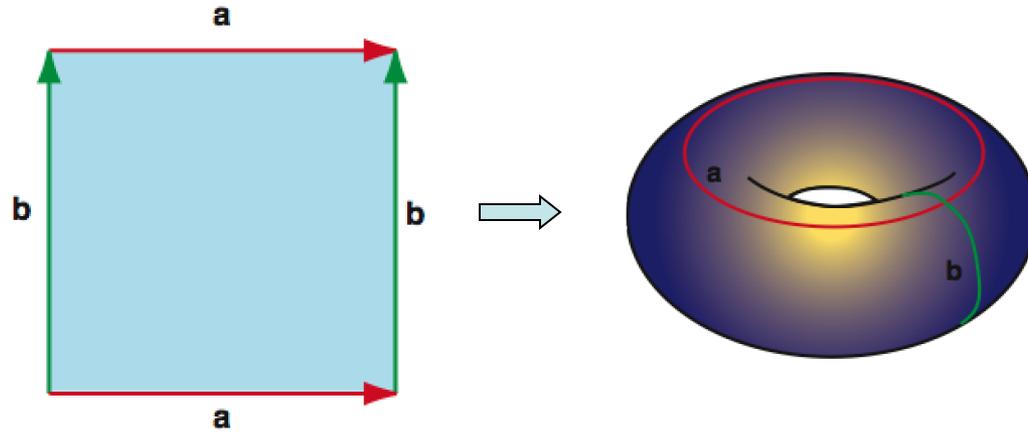


Plan

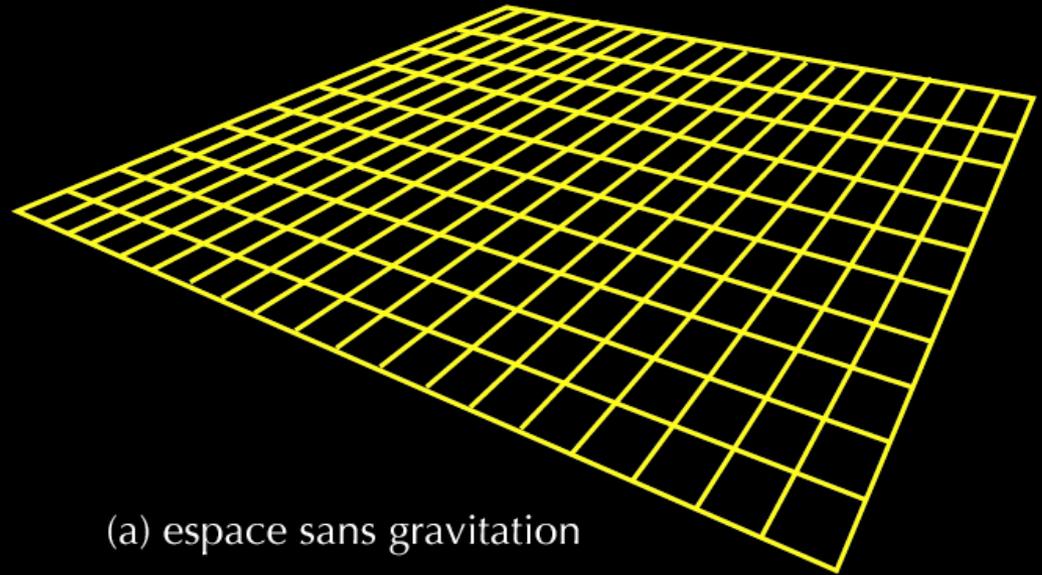
Cylindre

Tore plat

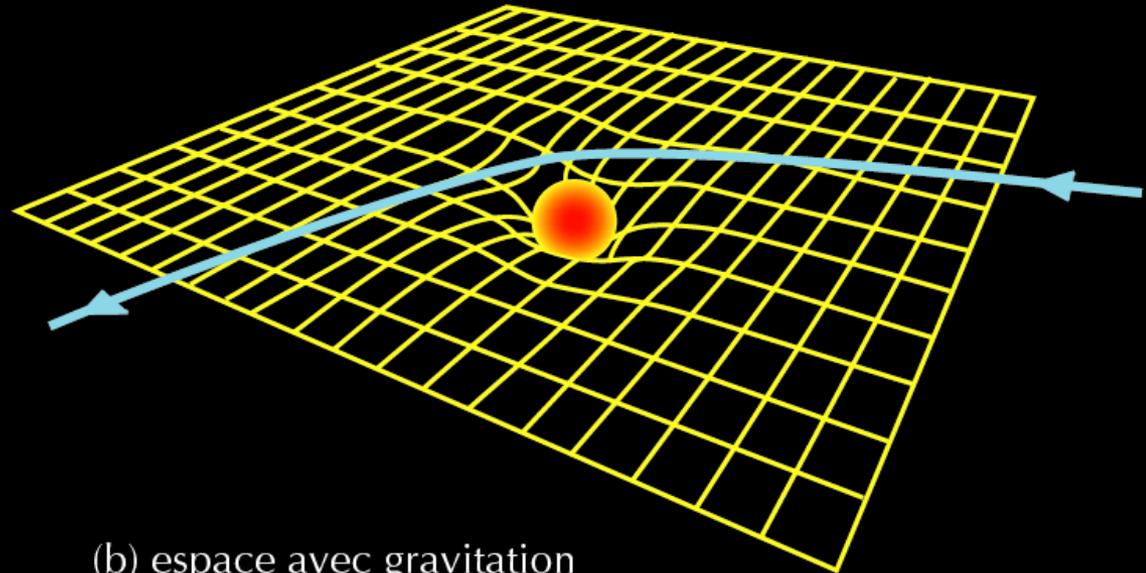
# Tore plat : espace fini sans bord



**Relativité  
Générale:  
Espace-temps  
courbe**



(a) espace sans gravitation



(b) espace avec gravitation

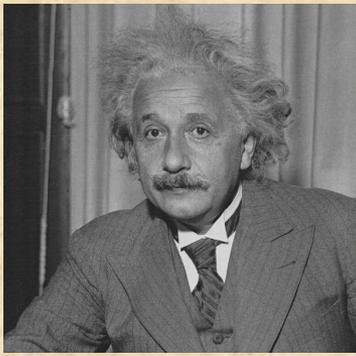
# Kant vs. Einstein ...

## **KANT (1781)**

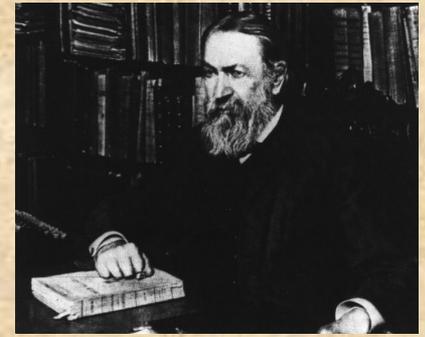
Aucune observation ne saurait confirmer la thèse de la cosmologie rationnelle, dont l'objet dépasse toute expérience possible

## **EINSTEIN (1921)**

La question de savoir si le monde est spatialement fini ou non me paraît être une question qui a un sens en géométrie pratique. Il ne me semble même pas exclu que l'astronomie trouve une réponse à cette question dans un avenir relativement proche.



## Einstein, Mach et la finitude de l'espace



*« Je ne voudrais pas manquer de rappeler qu'on peut avancer une raison théorique en faveur de l'hypothèse de la finitude de l'univers. La théorie de la relativité générale nous apprend que l'inertie d'un corps déterminé est d'autant plus grande qu'il y a plus de masses pondérables dans son voisinage ; il semble donc parfaitement naturel d'attribuer l'effet d'inertie total d'un corps à l'interaction entre celui-ci et les autres corps de l'univers ; de même que la pesanteur est, depuis Newton, entièrement attribuée à une interaction des corps entre eux. On peut déduire des équations de la théorie de la relativité générale que cette explication de l'inertie par la seule interaction entre les masses – telle que par exemple Ernst Mach l'appelait de ses vœux – suppose nécessairement un univers spatialement fini. »*

# Relativité générale et Topologie

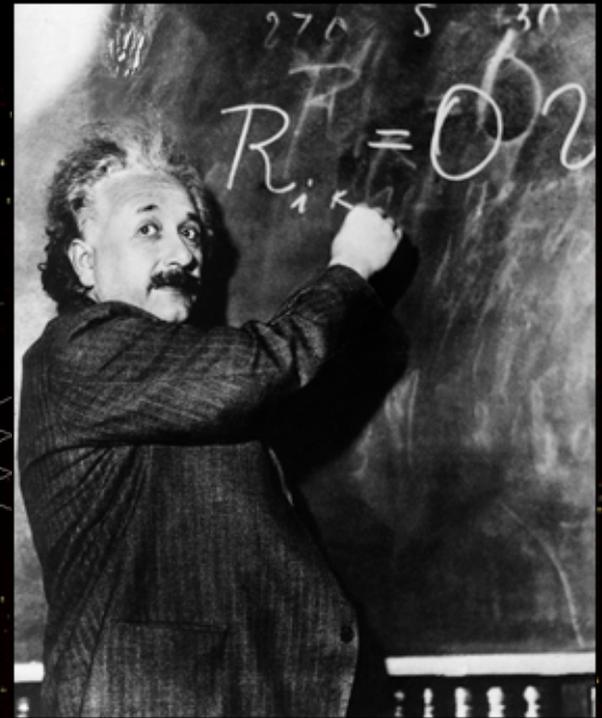


$$G_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu}$$



$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

La **métrique** de l'espace-temps ne détermine pas ses propriétés globales

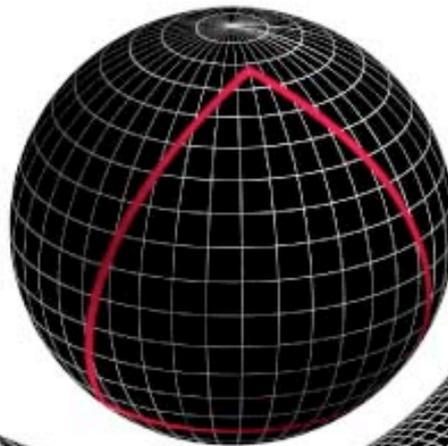


# Homogénéité+ Isotropie



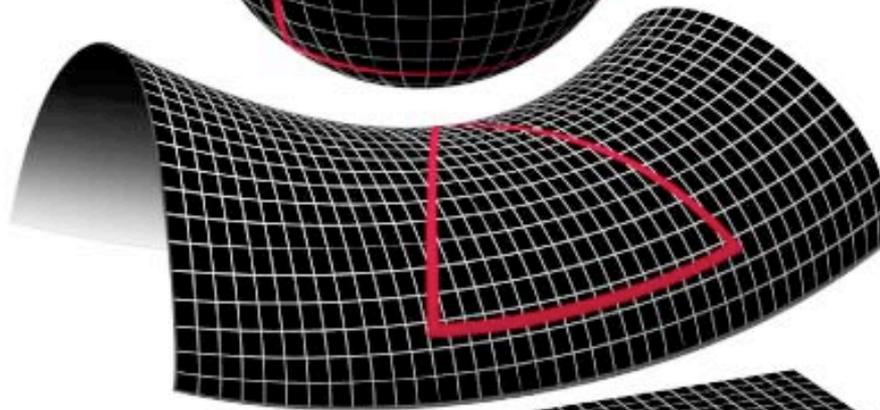
espace à courbure constante

$\Omega_0 > 1$



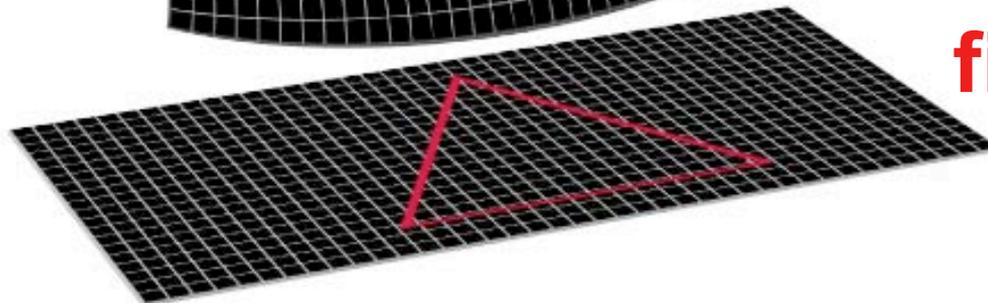
**fini (sans bord)**

$\Omega_0 < 1$



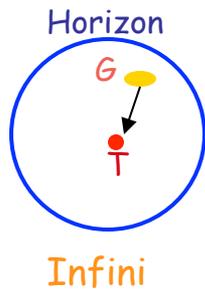
**fini ou infini**

$\Omega_0 = 1$



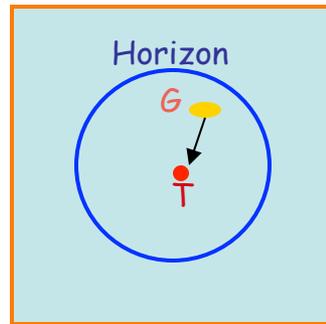
**fini ou infini**

# Quelle est la taille et la forme de l'espace ?



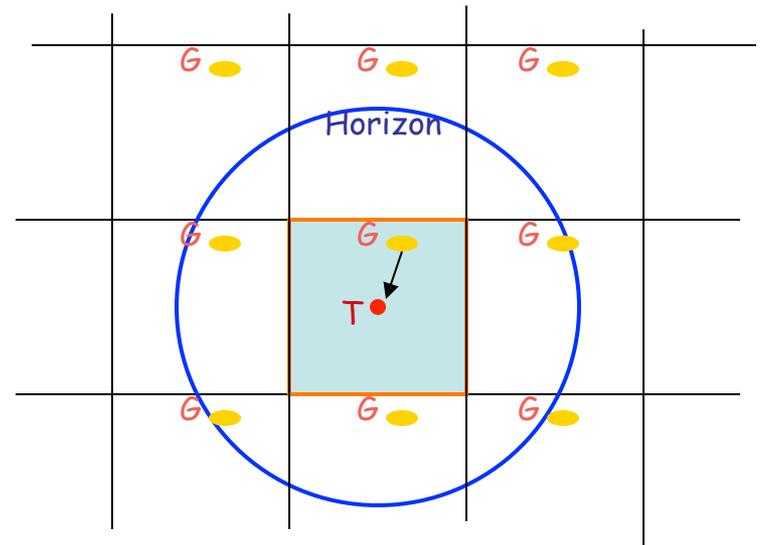
Hypothèse 1

*L'univers est infini*



Hypothèse 2

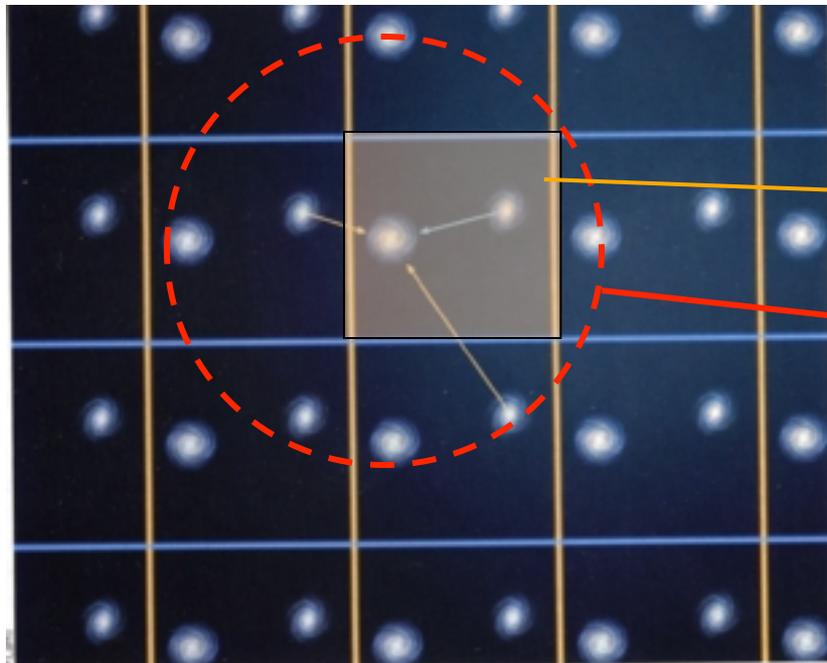
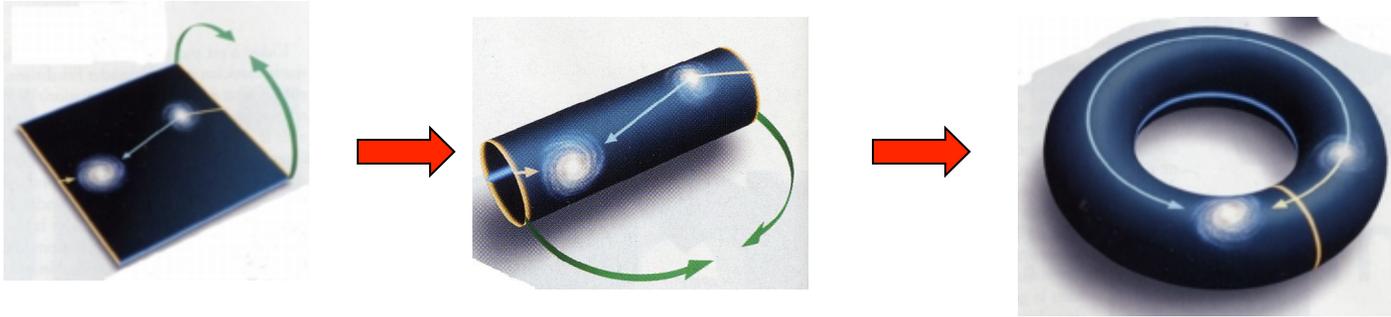
*L'univers est fini  
(sans bord) mais  
plus grand que  
l'univers visible*



Hypothèse 3

*L'univers est fini  
(sans bord) et plus  
petit que l'univers  
visible*

# Effet de mirage topologique



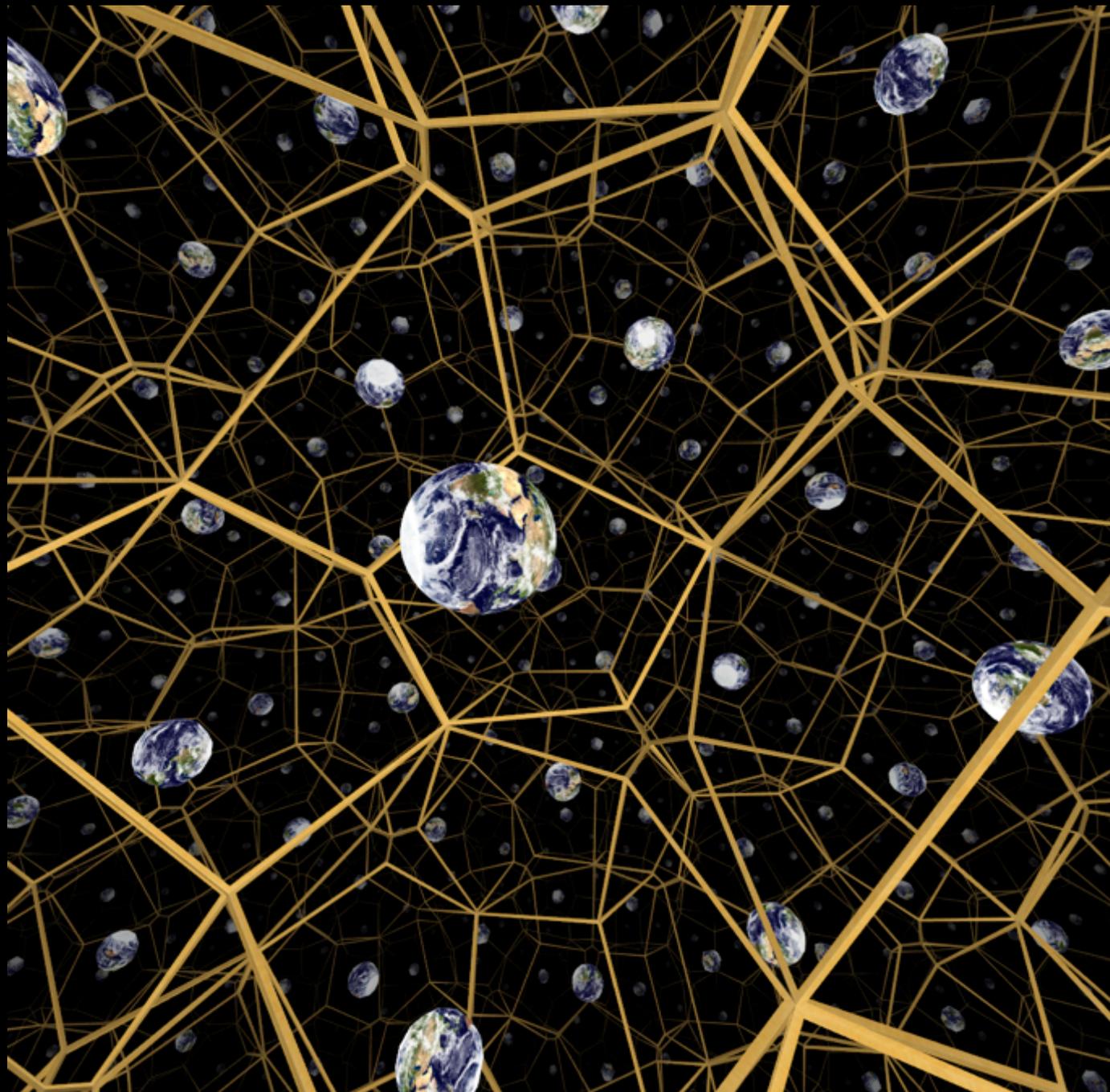
Espace réel

horizon

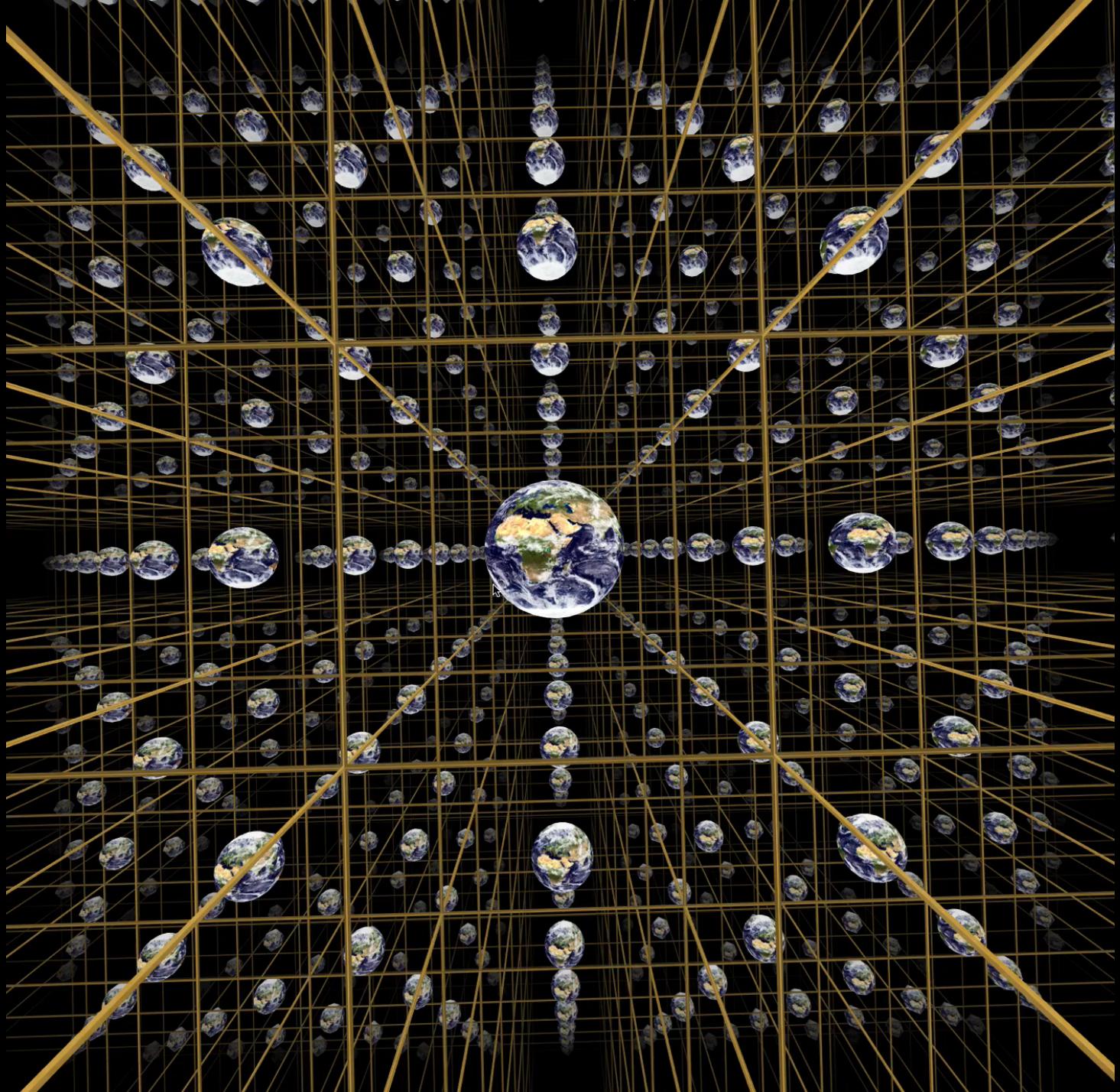
L'univers observable est l'espace de revêtement universel (ou un sous-ensemble délimité par l'horizon)

# Curved Spaces Program

©Jeff  
Weeks



Espace  
euclidien  
hypertorique



**Espace  
sphérique  
dodécaédrique  
de Poincaré**

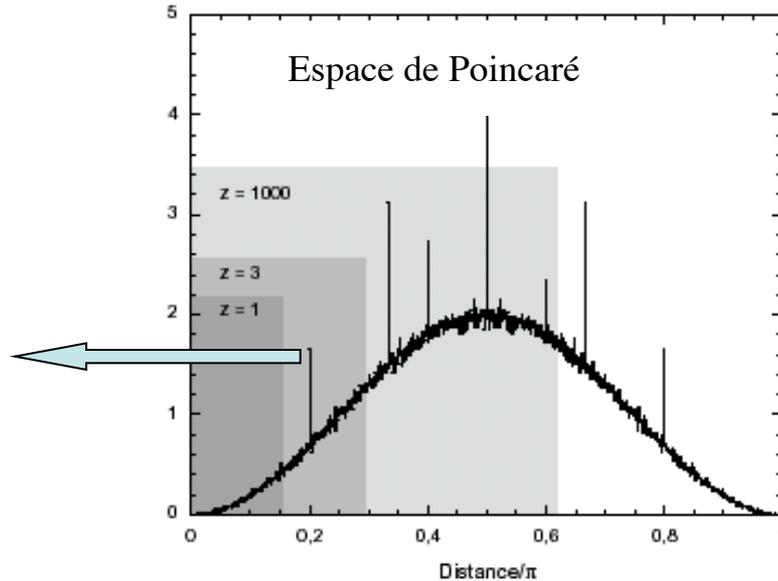


**Espace  
hyperbolique  
dodécaédrique  
de Seifert-Weber**

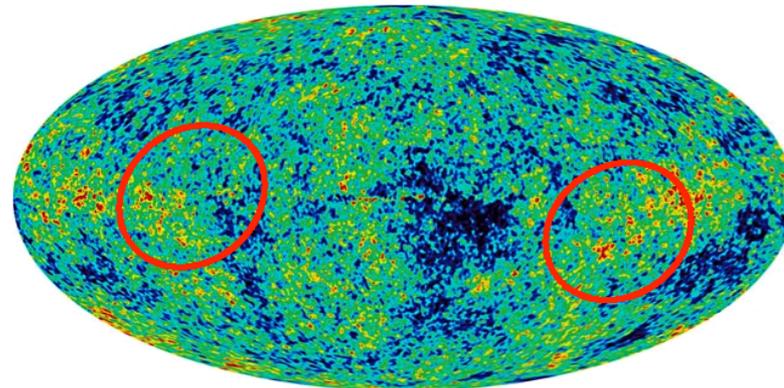


# Recherche des mirages topologiques

Premières  
images  
fantômes à  
 $z \sim 2$



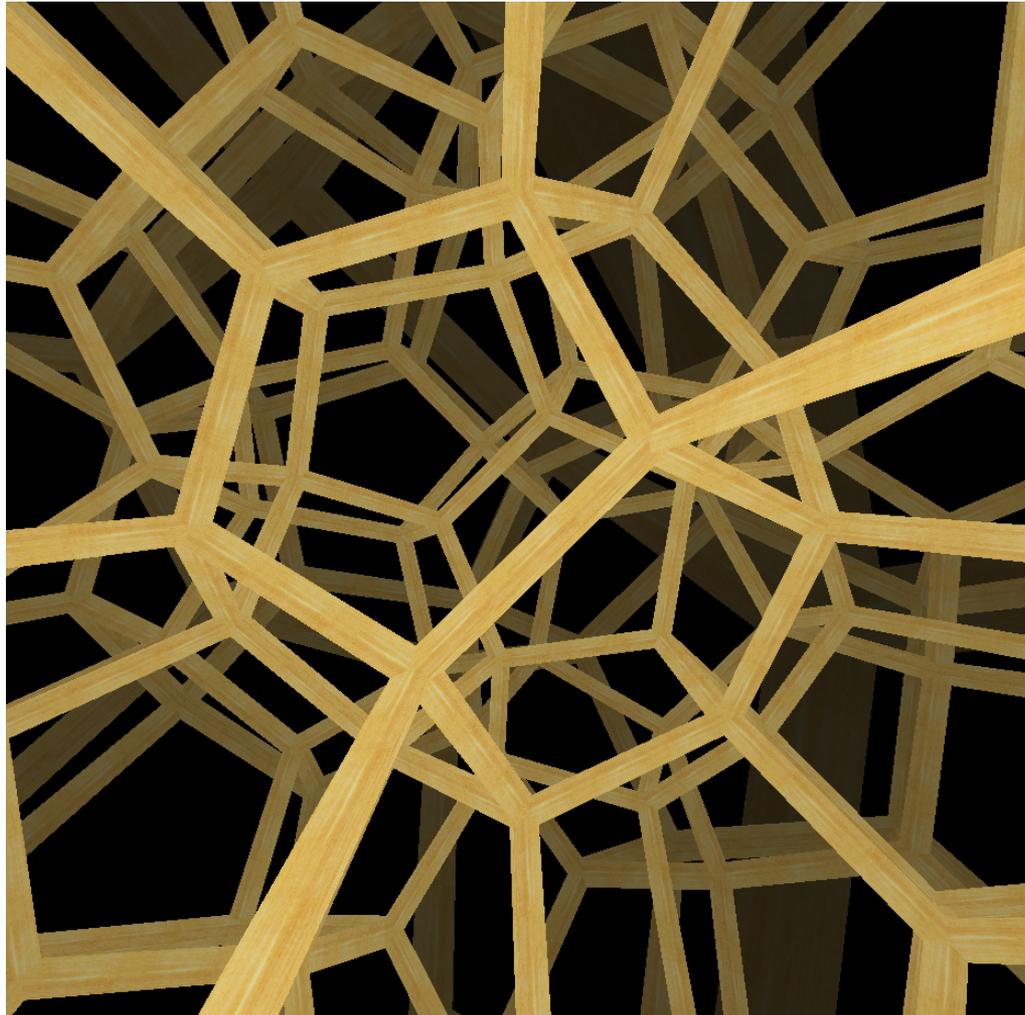
Données 3D ( $\theta, \phi, z$ )  
(galaxies, amas)  
**Cristallographie  
Cosmique**



Données 2D (CMB)  
 $\delta T/T(\theta, \phi)$  à  $z \sim 1100$

**Analyse  
statistique des  
anisotropies**

# Espace Dodécaédrique de Poincaré



Univers  
« ballon de football »



*Luminet et al.  
Nature (2003)*

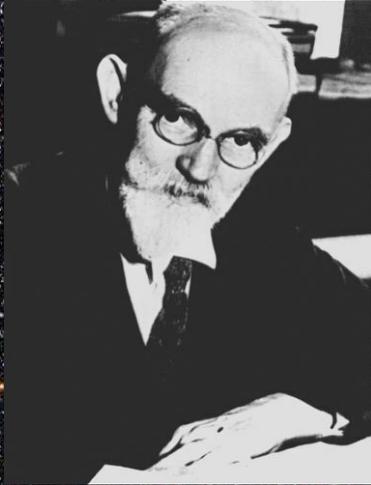
A vast field of stars in space, with the text "L'infini du temps" overlaid in red. The stars are of various colors, including yellow, white, blue, and red, and are scattered across a dark, starry background. The text is centered and written in a bold, sans-serif font.

**L'infini du temps**

# Un univers dynamique !



A. Einstein



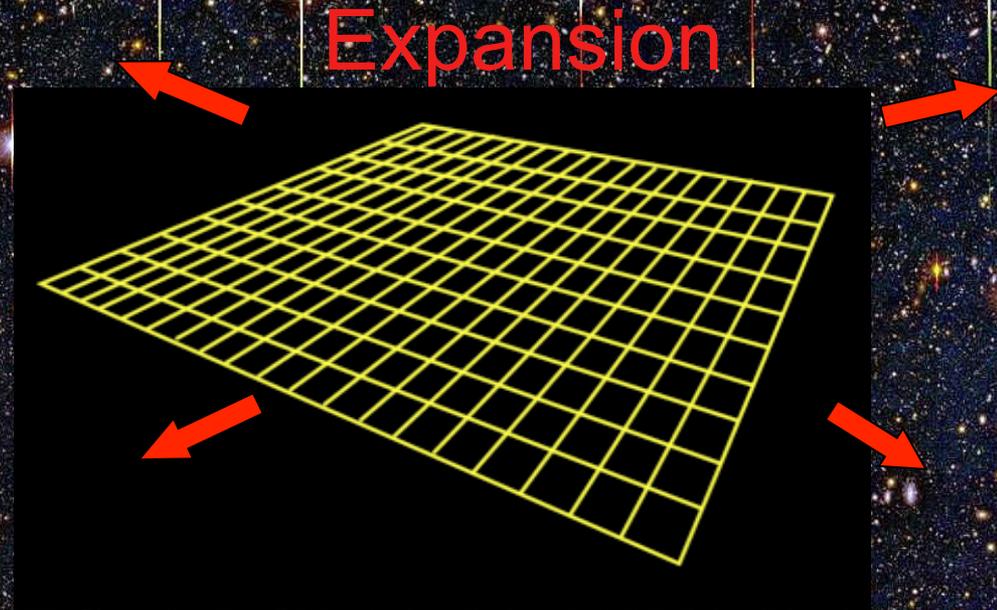
W. de Sitter



A. Friedmann



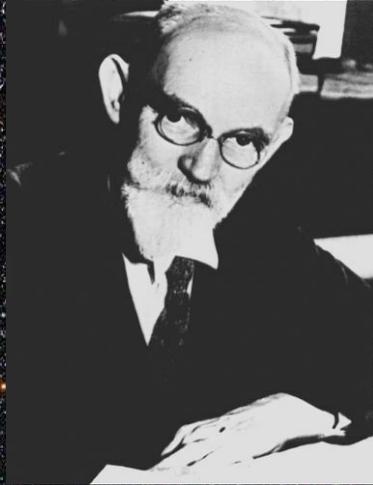
G. Lemaître



# Un univers dynamique !



A. Einstein



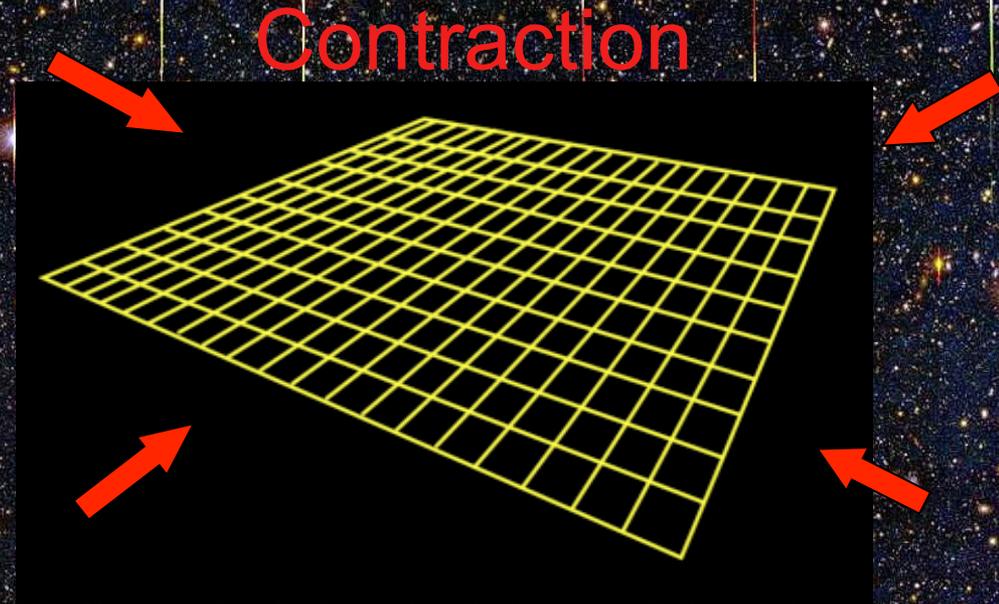
W. de Sitter



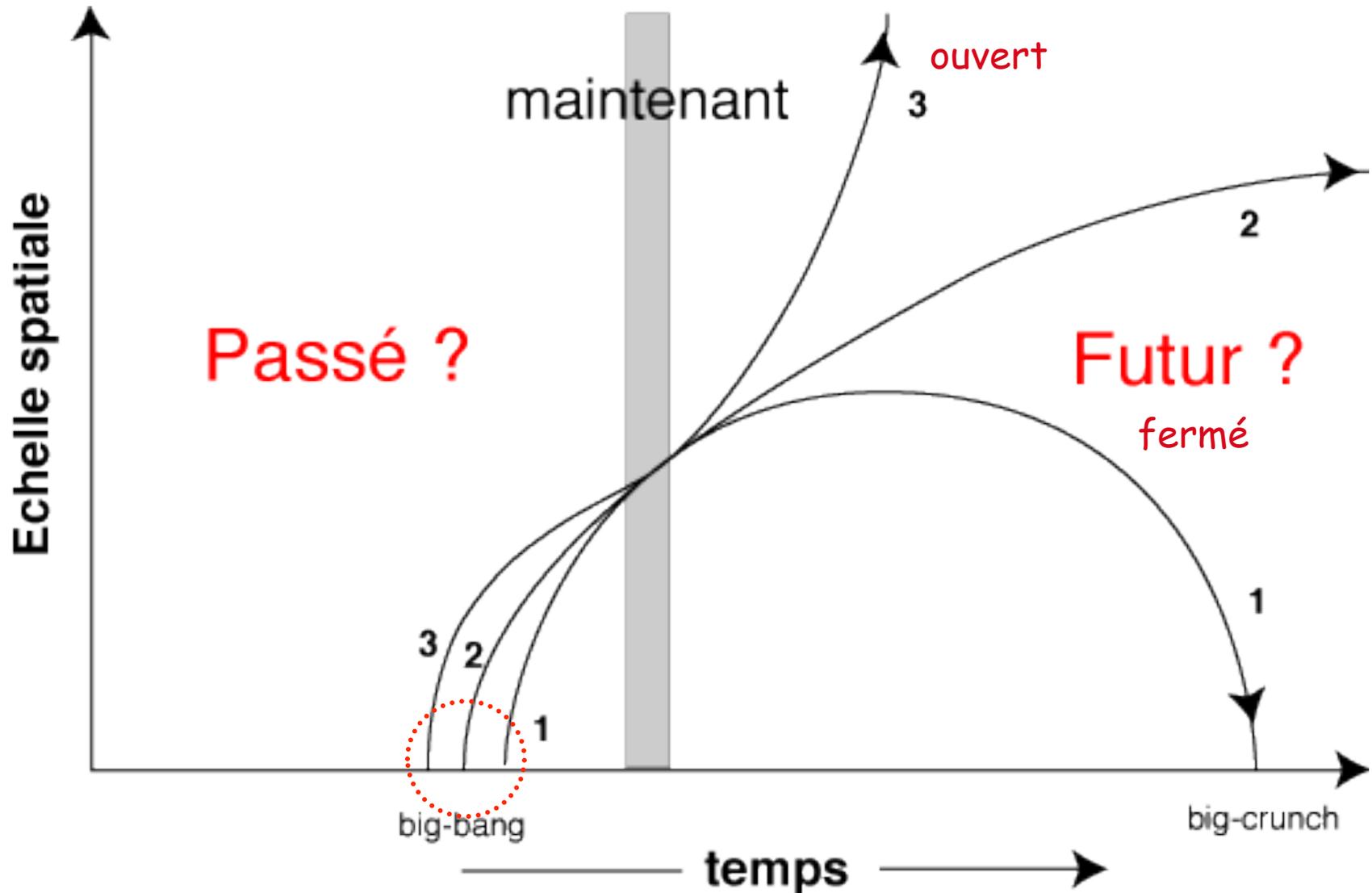
A. Friedmann



G. Lemaître

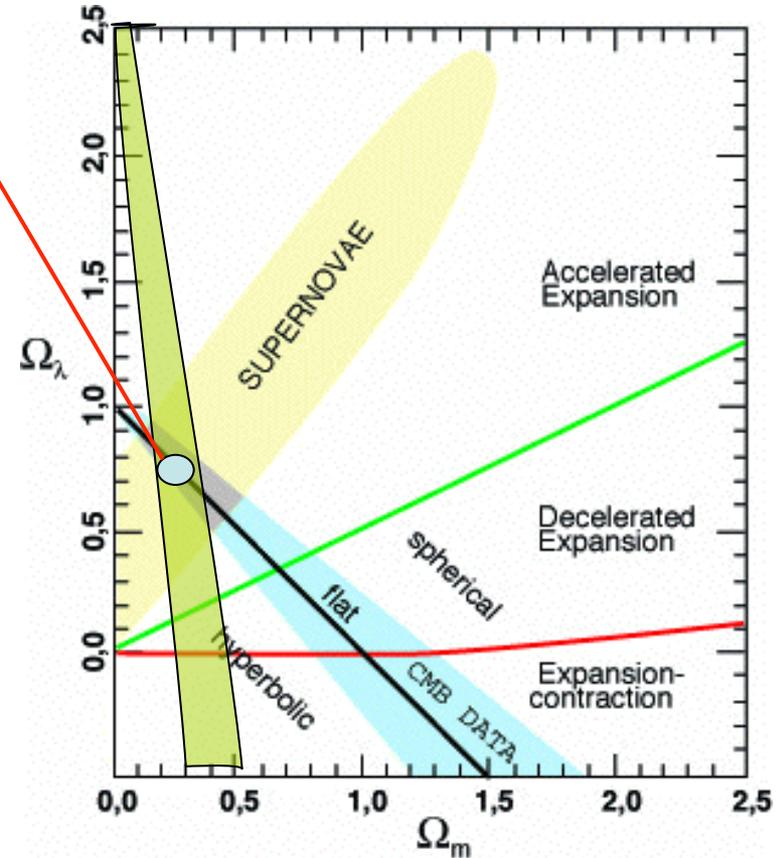
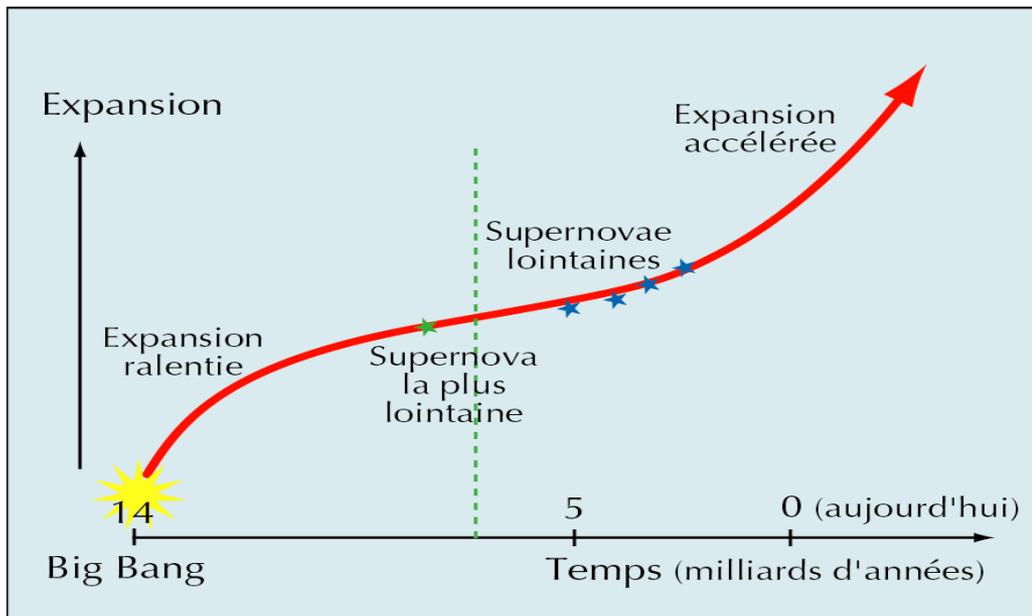
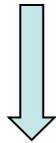


# Modèles de big bang

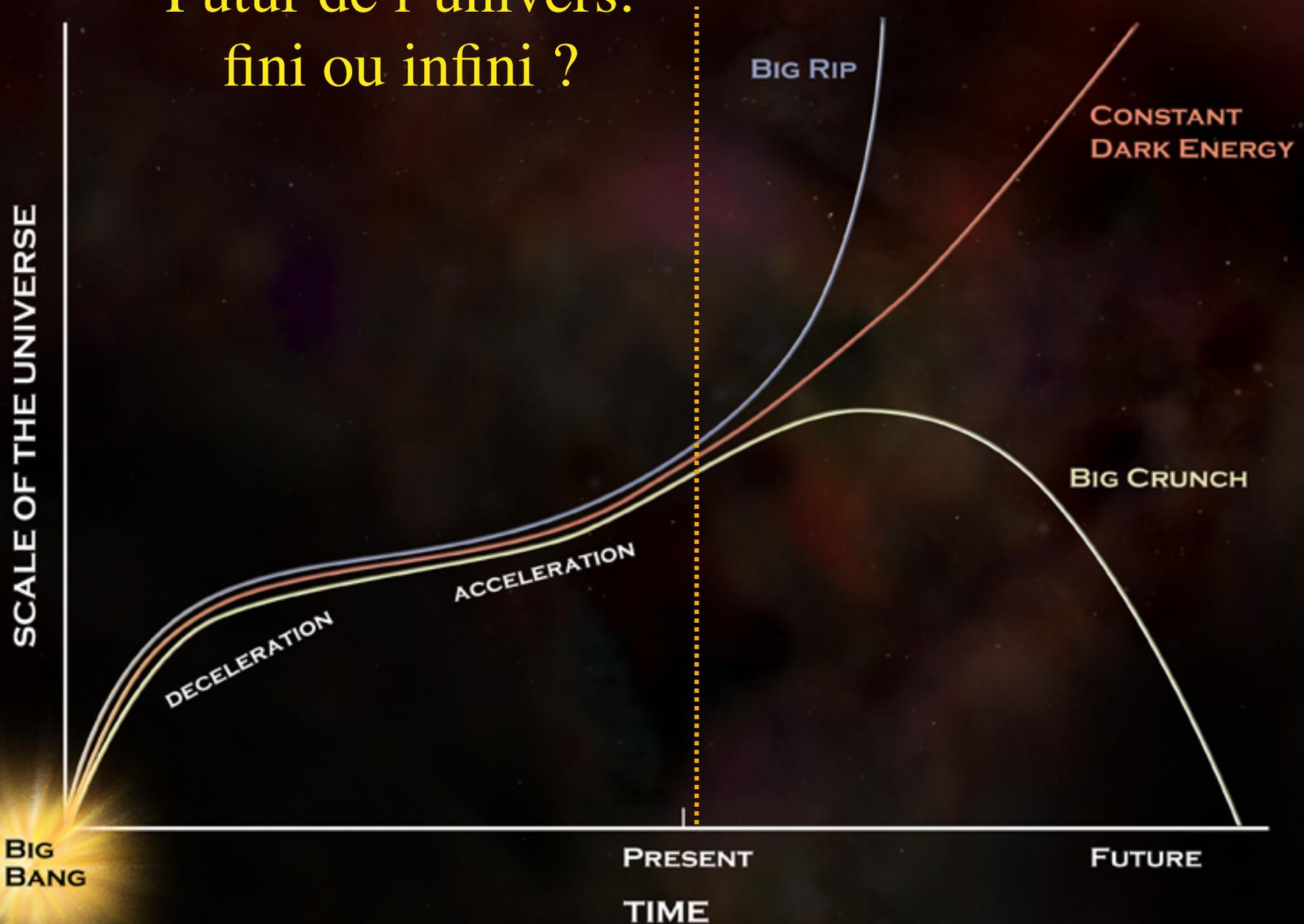


# Le modèle standard ( $\Lambda$ CDM)

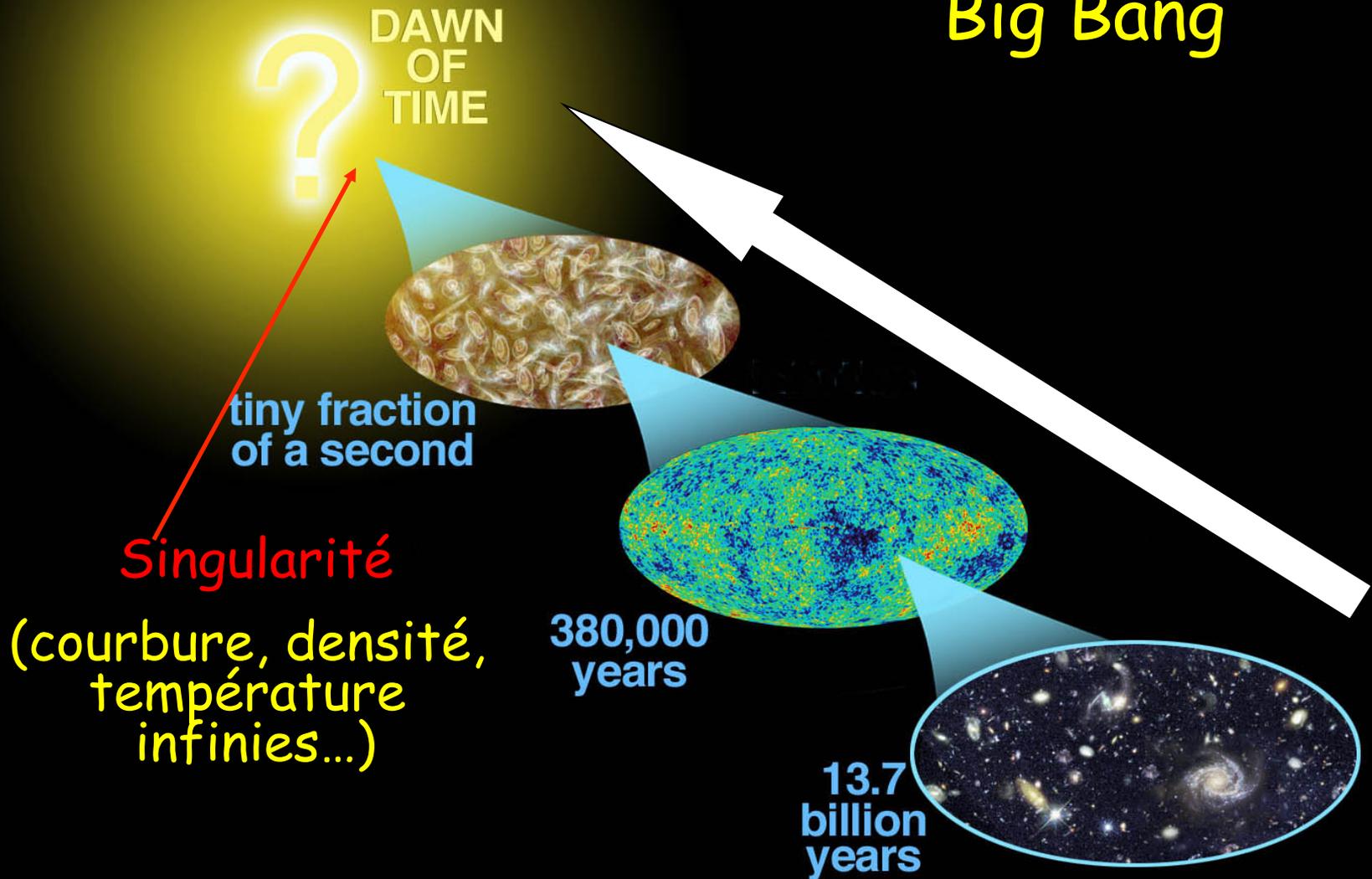
Courbure  $\sim 0$   
Energie sombre  $\sim 68\%$   
Matière  $\sim 32\%$



# Futur de l'univers: fini ou infini ?

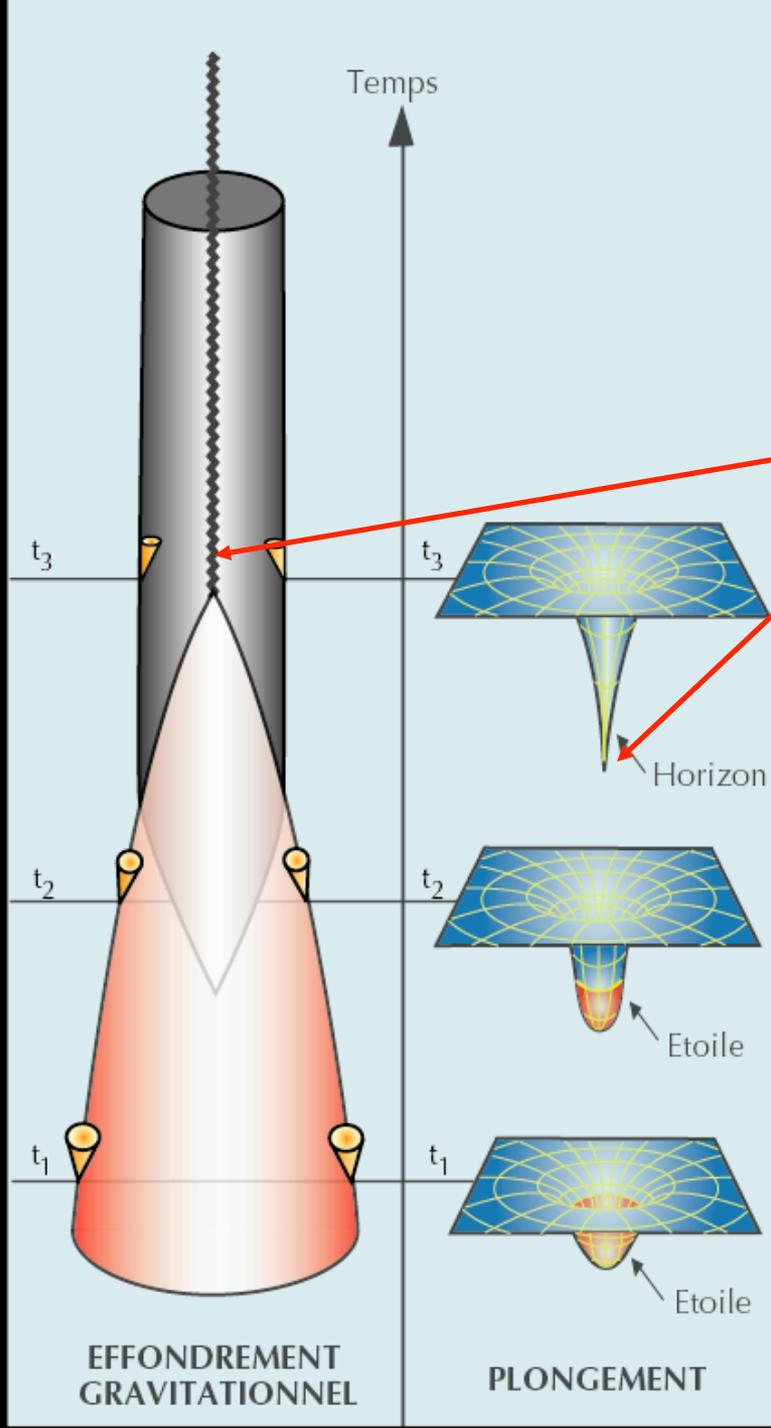


# Modèle Standard du Big Bang



Effondrement gravitationnel

***TROU NOIR !***



**Singularité**  
(courbure infinie)

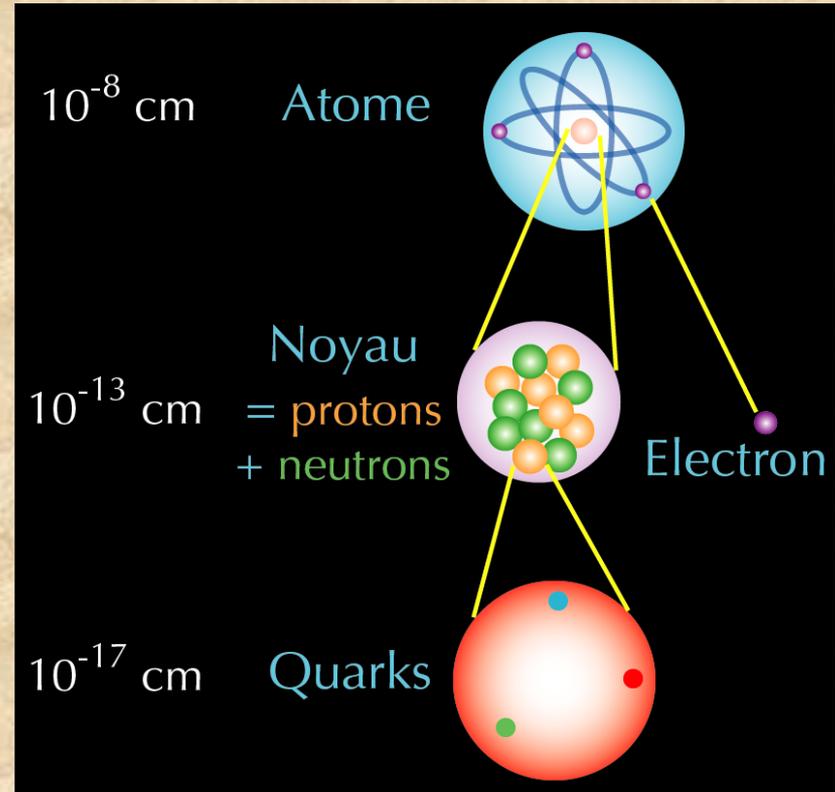
A vast field of stars in space, with the text "L'infini de la matière" overlaid in red. The stars are of various colors, including yellow, white, and blue, and are scattered across a dark, starry background. The text is centered and written in a bold, sans-serif font.

**L'infini de la  
matière**

# La matière est-elle divisible à l'infini ?



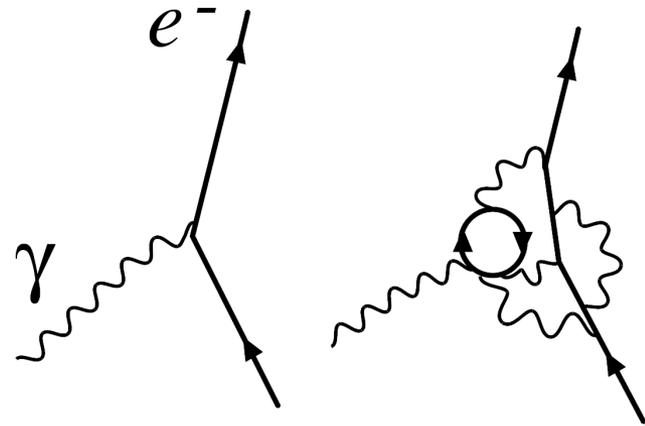
Aristote:  
OUI



Atomistes, physique moderne:  
NON

Mais...  
en **théorie quantique des champs** les  
particules élémentaires (électrons,  
quarks) sont assimilées à des points

**Problème : divergences**



*Diagrammes de Feynman*

**Solution : renormalisation**

# problèmes d'infinis en physique (singularités)

- **Big Bang**

- **Trou noir**

- **particules  
élémentaires  
ponctuelles**

**Gravitation**

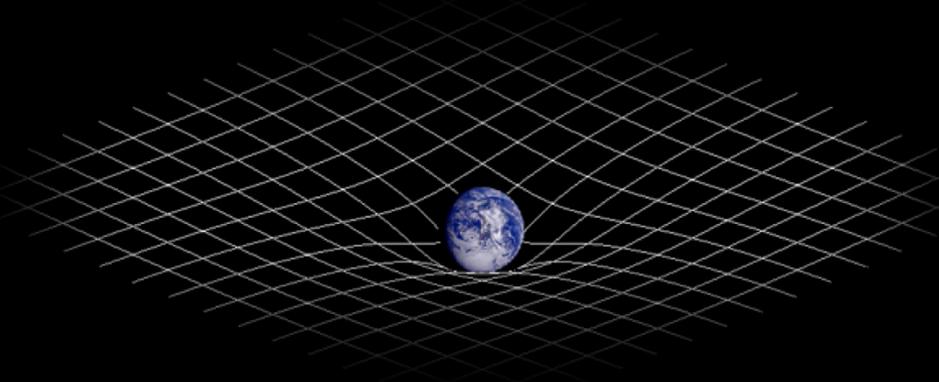
(effondrement gravitationnel)

**Physique quantique**

(renormalisation)

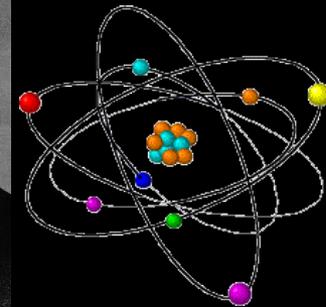
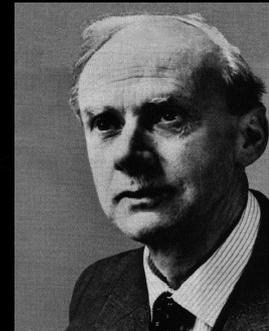
**=> Nécessité d'une théorie de gravité quantique ?**

# Relativité Générale



$$G_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu}$$

# Mécanique quantique

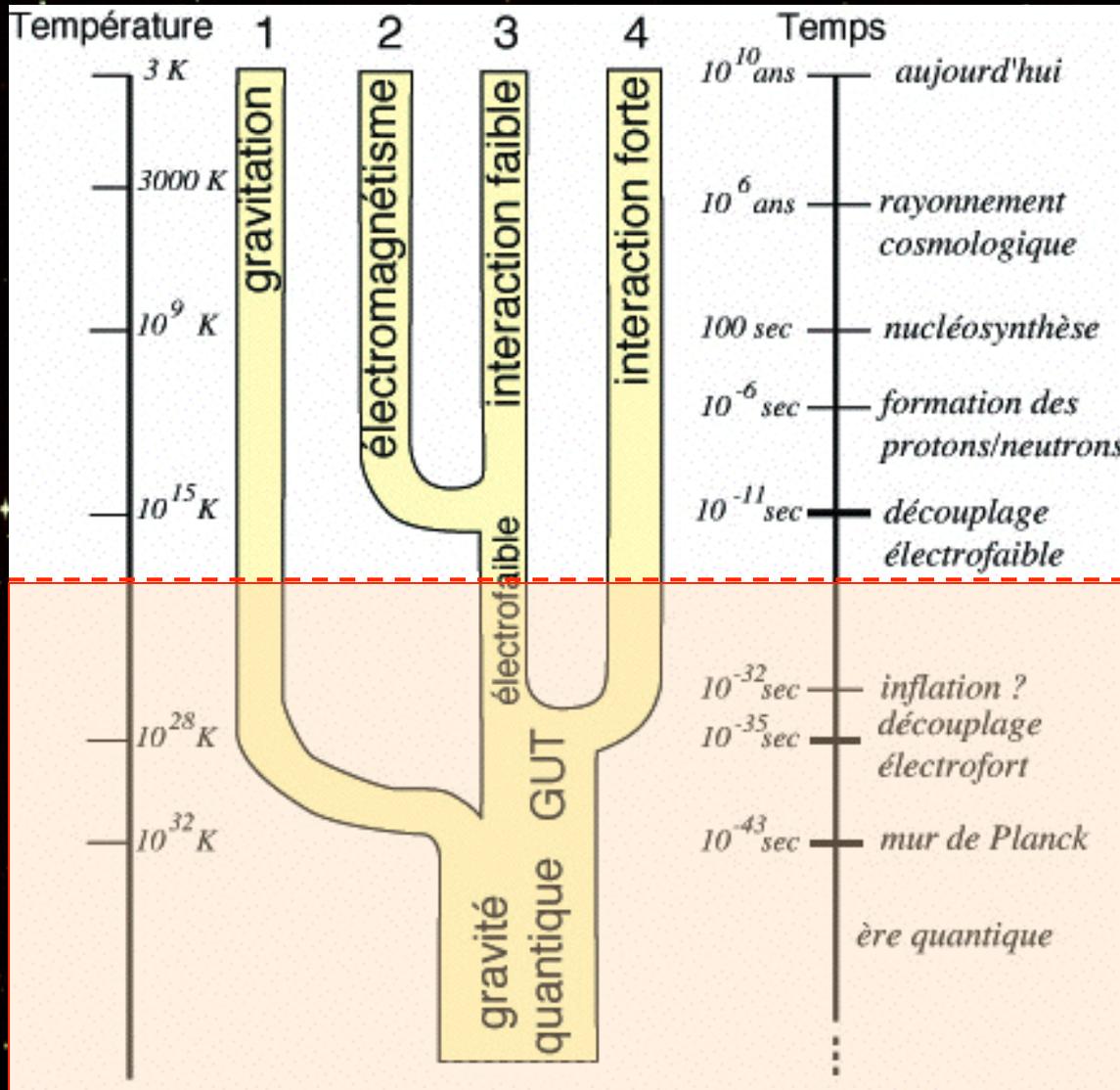


$$i\hbar\partial/\partial t |\Psi\rangle = H |\Psi\rangle$$



**Pourquoi  
une vision unifiée ?**

# Unification des interactions fondamentales



Modèle Standard

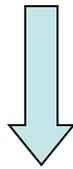
Expériences LHC

Au-delà du modèle standard (SUSY)

Limites de la physique  
(ère de Planck)

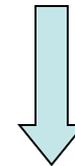
# Solutions ?

Réduire la  
géométrie à la  
matière



Cordes  
branes  
théorie M

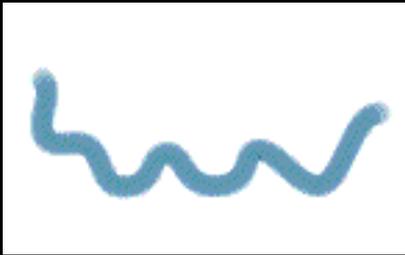
Réduire la  
matière à la  
géométrie



Gravité  
quantique à  
boucles

# Théorie des cordes

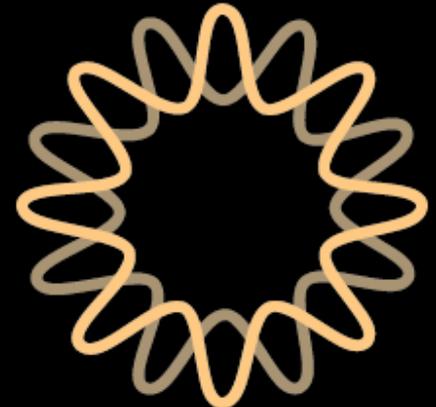
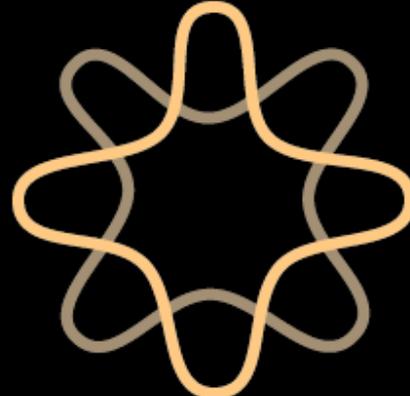
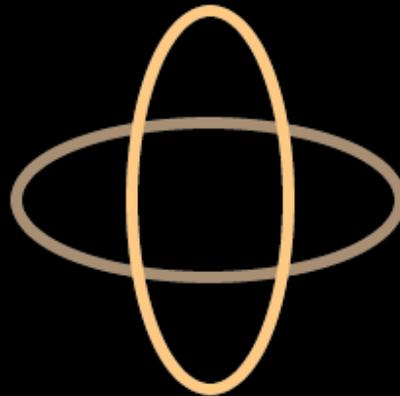
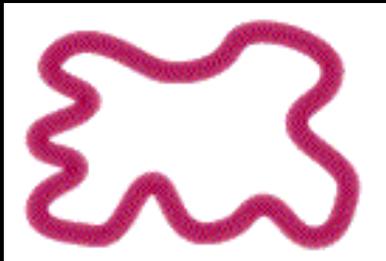
taille  $\sim 10^{-33}$  cm



cordes ouvertes



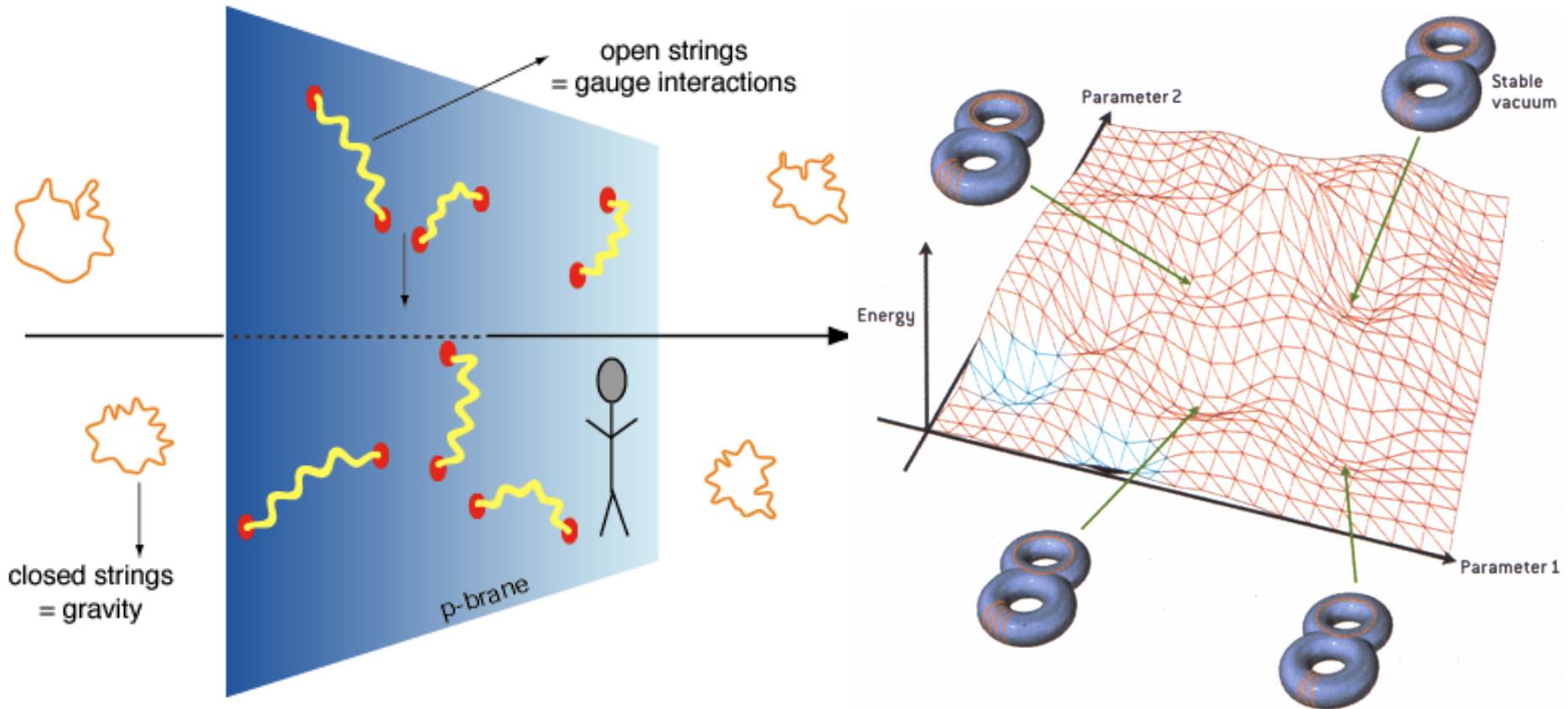
cordes fermées



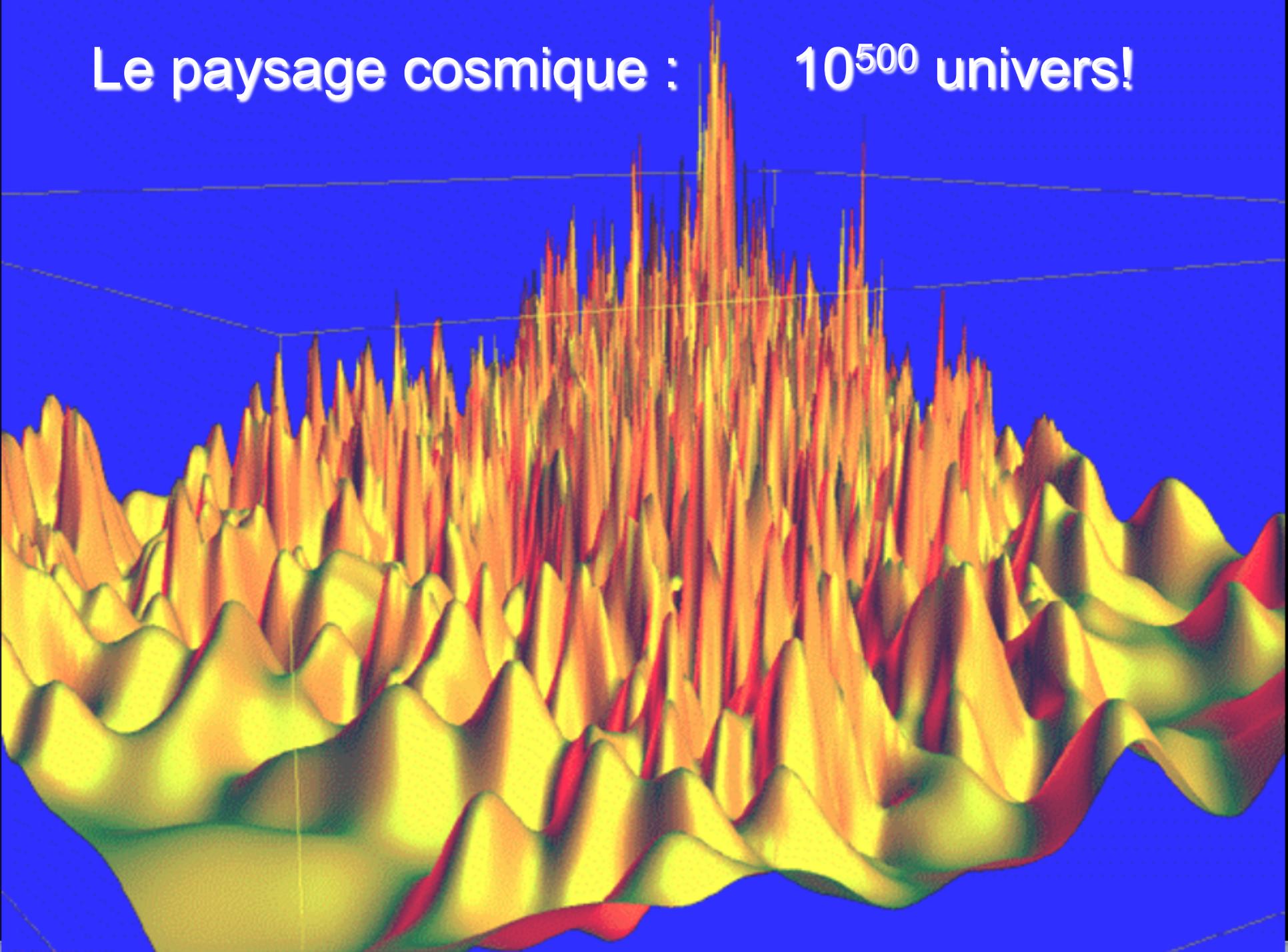
# Un multivers ?

Théorie des cordes:  
Dimensions supplémentaires

Etats du vide :  
 $10^{500}$  solutions

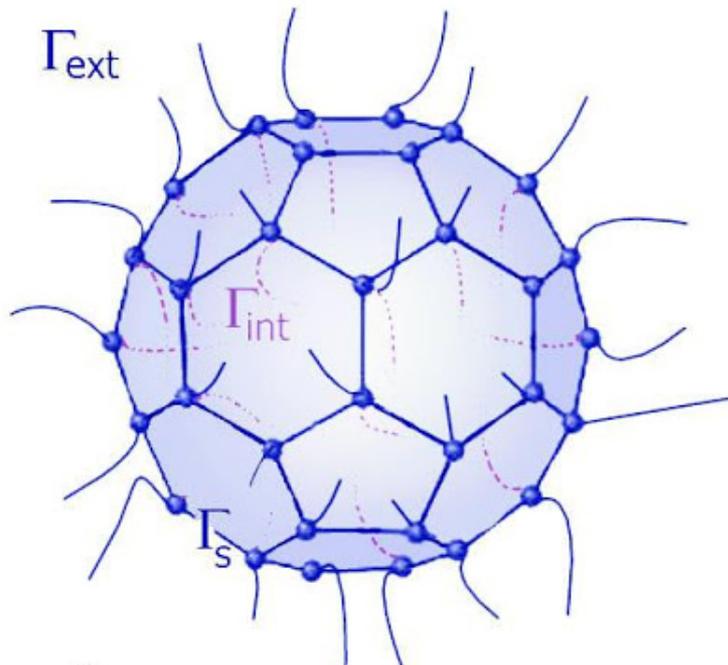


Le paysage cosmique :  $10^{500}$  universs!

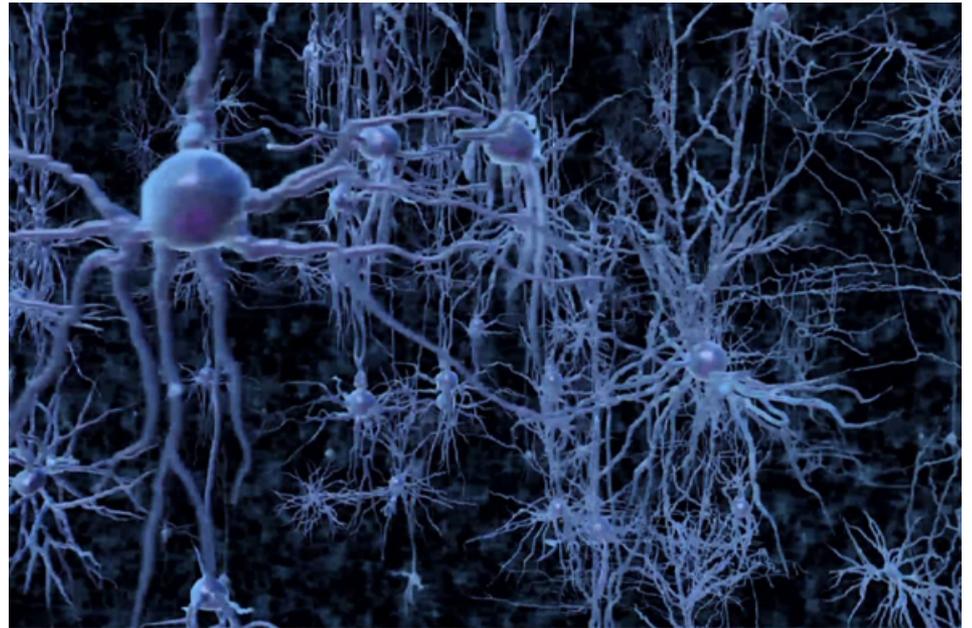


# Théorie des boucles (LQG)

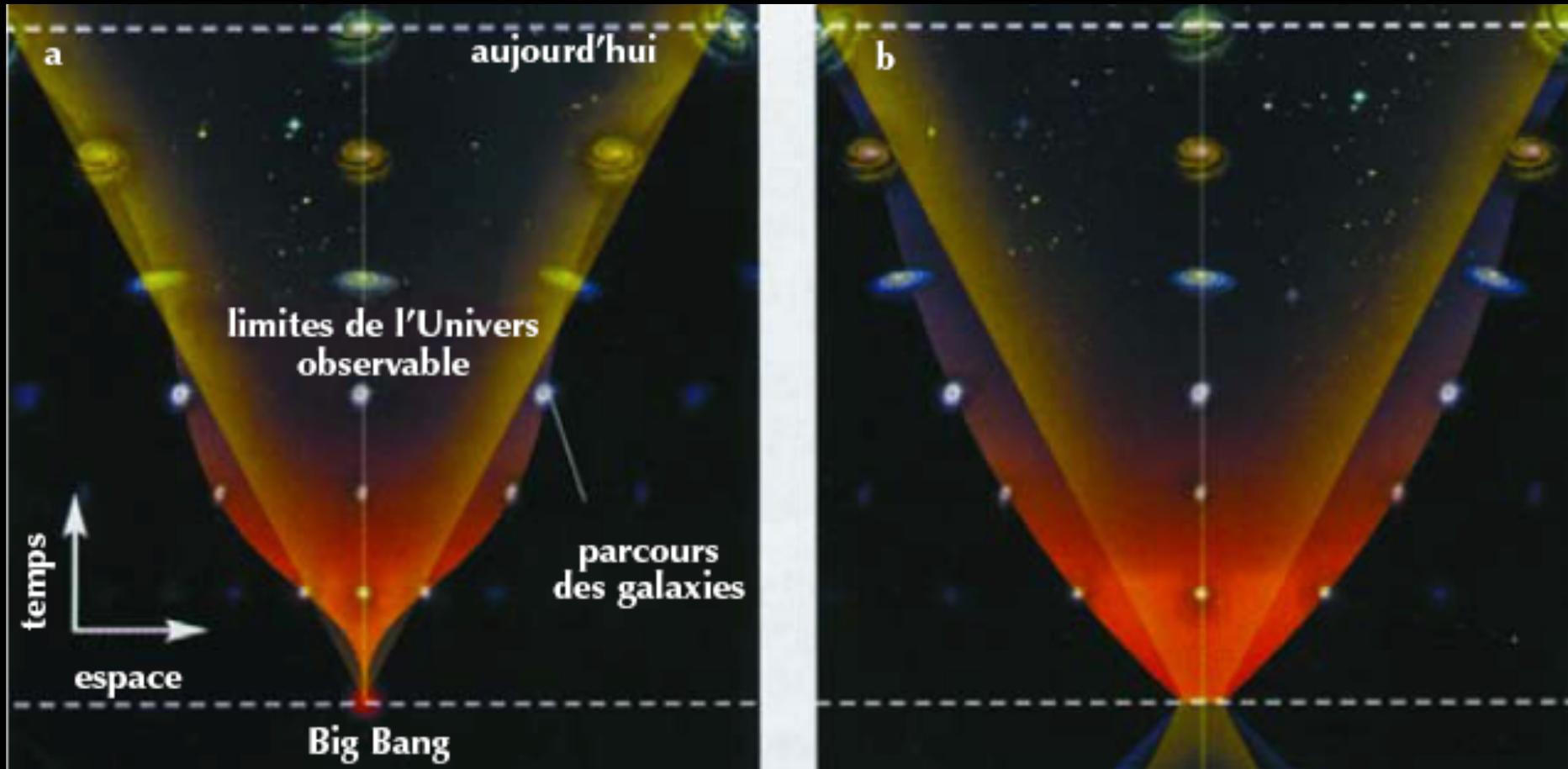
Atomes d'espace : vol  $\sim 10^{-99} \text{ cm}^3$



egrav.blogspot.com



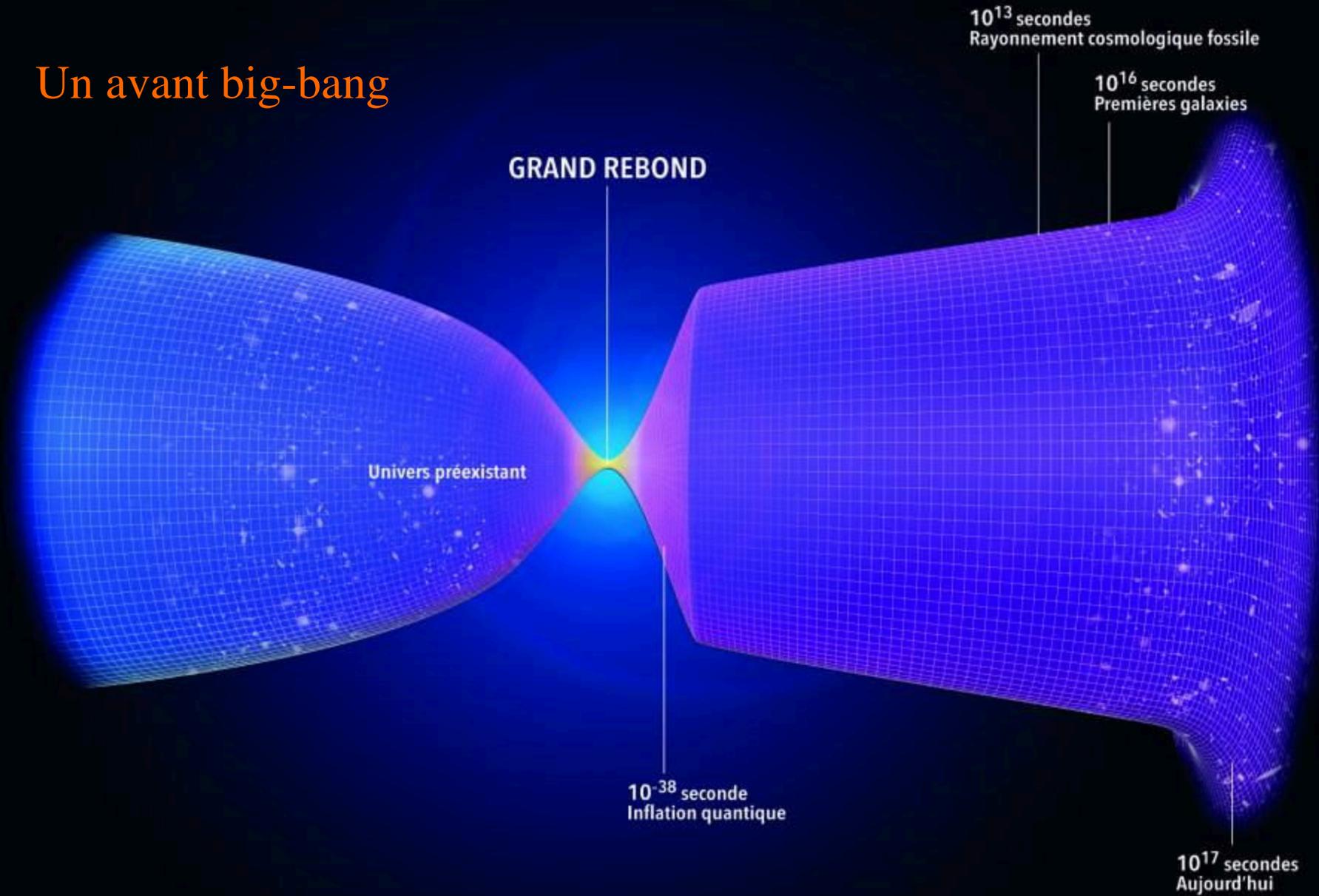
Formalisme mathématique : Réseaux de spins



**Gravité classique:**  
**Singularité - Passé fini**

**Gravité quantique:**  
**Rebond - Passé infini ?**

# Un avant big-bang



# L'espace et le temps sont-ils divisibles à l'infini ?

- Physique Classique
- Relativité Générale
- Mécanique Quantique
- Théorie des Cordes :

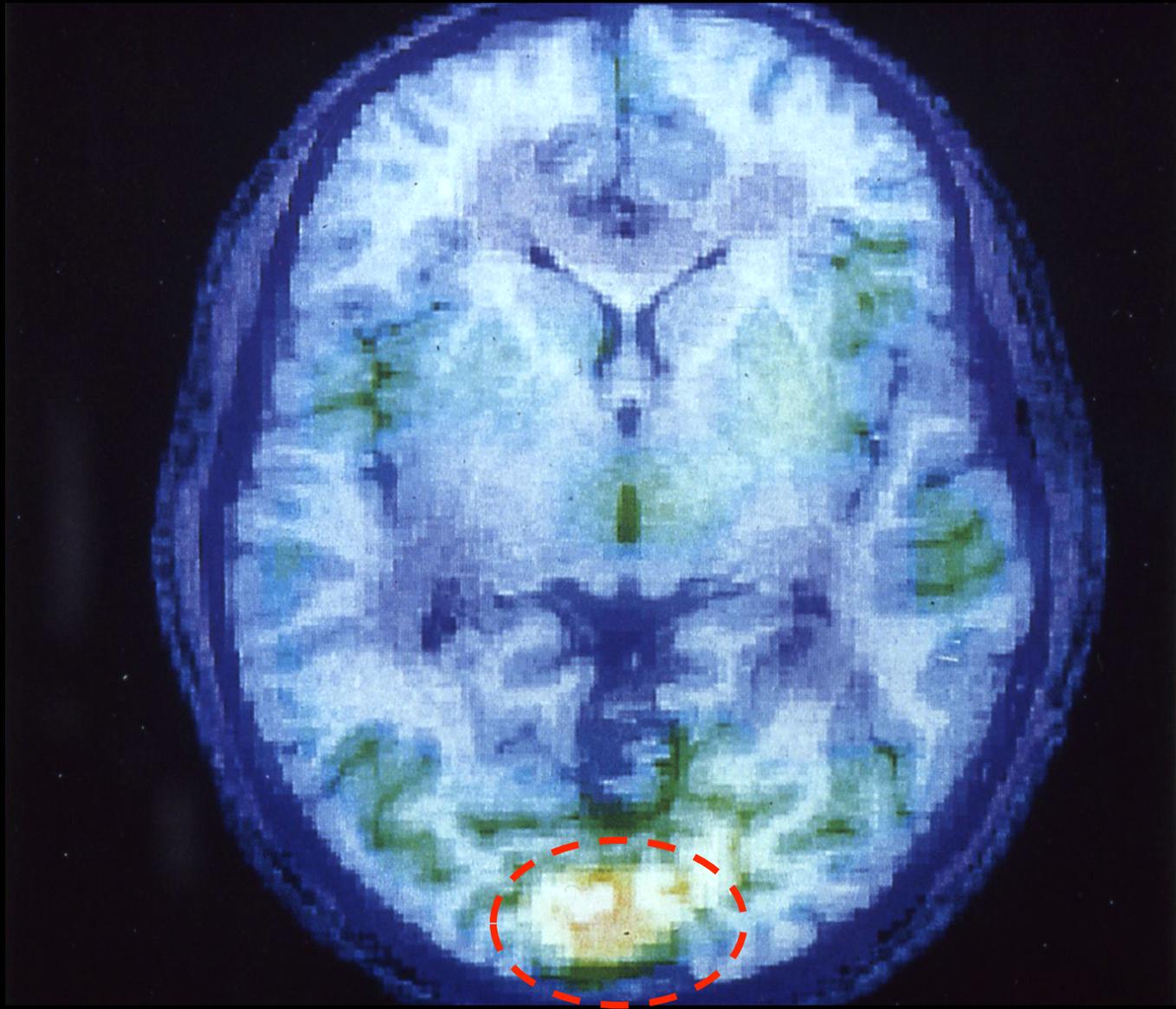
OUI

(espace-temps de fond  
continu)

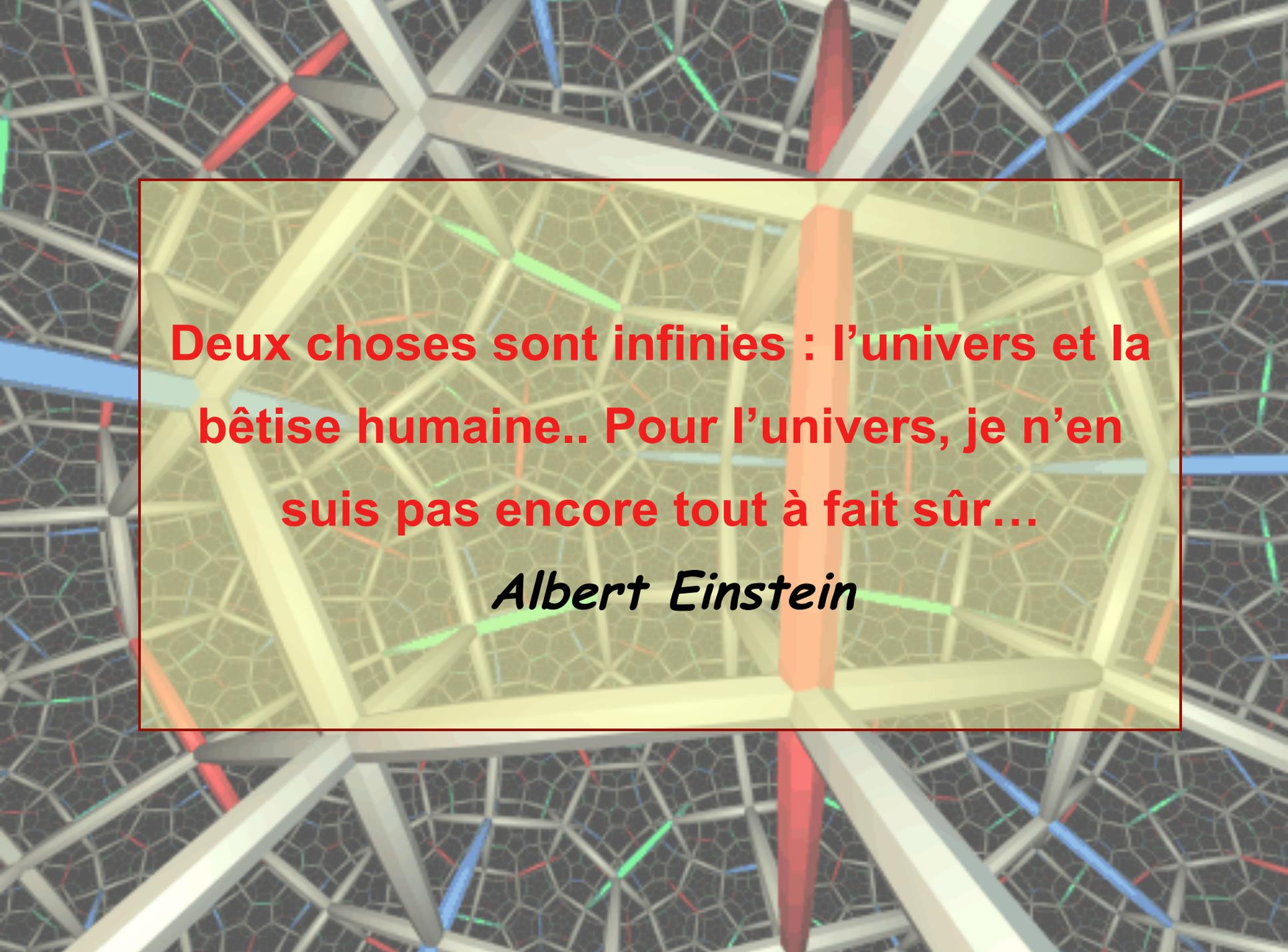
- Théorie des boucles
- Géométrie non-commutative
- Théorie des causet

NON

(espace-temps de fond  
discret)



Comment un cerveau fini peut-il penser l'infini ?



**Deux choses sont infinies : l'univers et la  
bêtise humaine.. Pour l'univers, je n'en  
suis pas encore tout à fait sûr...**

*Albert Einstein*

JEAN-PIERRE LUMINET  
MARC LACHIÈZE-REY

# De l'infini

HORIZONS COSMIQUES, MULTIVERS  
ET VIDE QUANTIQUE

DUNOD

Jean-Pierre Luminet Hubert Reeves

DIALOGUES SOUS LE CIEL ÉTOILÉ

ROBERT LAFFONT

*Jean-Pierre Luminet  
Hubert Reeves*

# DIALOGUES SOUS LE CIEL ÉTOILÉ

*adaptés par  
Iolande Cadrin-Rossignol*

ROBERT LAFFONT