L2 Summer Camp - OCEVU

LE BIG BANG « CLASSIQUE »

Exercice préparatoire : Galaxies et Univers par raisonnement dimensionnel

Cet exercice est tiré du livre « Physique et Mécanique : une initiation aux méthodes de résolution des problèmes de physique » (J.-M. Virey, édition PUP) dont vous pouvez trouver des extraits et plus d'information sur le site `http://www.cpt.univ-mrs.fr/~virey/ens.php`

Nous vous demandons de préparer cet exercice avant de venir assister au cours prévu mardi 27/06 à 9h. Merci d'essayer de faire par vous-même les questions avant d'en regarder les solutions ! ! Elles sont faciles ...

1) **Galaxies**

Le Soleil se situe à environ 30000 années-lumière (AL) du centre de la galaxie et effectue un tour complet en 250 millions d'années. L'année-lumière est surtout utilisée pour vulgariser les distances astronomiques, elle correspond à la distance parcourue par la lumière en une année. Le Soleil est une étoile « standard » permettant ainsi de considérer sa masse comme la masse moyenne des étoiles. On supposera que le mouvement du Soleil est circulaire et uniforme.
a) Calculer la valeur de l'année lumière en mètres.
b) Calculer la vitesse de déplacement du Soleil au sein de notre galaxie.
c) Calculer la masse de la galaxie.
d) En déduire le nombre moyen d'étoiles qu'elle contient.

2) **Univers**

En 1929, Hubble montre que les galaxies, en général, s'éloignent de nous avec des vitesses proportionnelles aux distances qui nous en séparent : $v_{exp} = H_0 r$ *(loi de Hubble) où* r *est la distance entre nous et la galaxie considérée, et* H_0 *est la constante de Hubble. Les mesures de la constante de Hubble donnent la valeur moyenne* $H_0 = 72\, km.s^{-1}.Mpc^{-1}$*. Le Megaparsec (*$Mpc$*) correspond à la distance moyenne entre les galaxies. Par exemple, la galaxie d'Andromède, qui est la galaxie spirale la plus proche de notre galaxie la Voie Lactée, est située à une distance de* $778\, kpc$*. Le parsec, contraction de parallaxe-seconde, est l'unité de distance utilisée en astronomie :* $1\, pc$ *correspond à la distance à laquelle une unité astronomique sous-tend un angle de* $\theta = 1''$*. La seconde d'arc est telle qu'un angle de 1 degré soit égal à 60 minutes d'arc (*$1^\circ = 60'$*) et que 1 minute d'arc soit égale à 60 secondes d'arc (*$1' = 60''$*).*
a) Calculer la vitesse d'éloignement d'Andromède par rapport à nous due à l'expansion de l'Univers. En fait Andromède se rapproche de nous à la vitesse de 300 km/s, quelle conclusion en tirez-vous ?
b) Faire un dessin montrant la définition du parsec. Calculer la correspondance entre seconde d'arc et radian. En déduire, la valeur du parsec en mètres. Déterminer la correspondance entre parsec et année lumière.

c) Relier l'âge de l'Univers t_U à la constante de Hubble H_0 à l'aide d'un raisonnement dimensionnel. Donner la valeur de H_0 en s^{-1} et en déduire l'âge de l'Univers en secondes et en années.
d) La densité critique de l'Univers ρ_c (masse volumique) est reliée à la constante de Hubble H_0 et à la constante gravitationnelle G. Calculer l'expression de ρ_c par raisonnement dimensionnel. Nous verrons lors du chapitre 8, à travers la première équation de Friedman, qu'il manque un facteur $3/(8\pi)$ à cette expression. Calculer cette densité critique en kg/m^3 et en $protons/m^3$. Comparer ce chiffre au nombre de nucléons présents dans un m^3 d'eau.
e) L'horizon classique de l'Univers (R_U) correspond à la distance à partir de laquelle la vitesse d'expansion dépasse la vitesse de la lumière. Calculer cette distance (en m, en AL et en Gpc) et essayer de l'interpréter.
f) En déduire une estimation de la masse de l'Univers observable. En déduire le nombre de protons qu'il contient.
g) Estimer le nombre de galaxies présentes dans l'Univers observable.

Réponses de la partie galaxies

1a) L'année lumière est la distance que parcourt la lumière, possédant la vitesse c, en un an : $1\,AL = ct_{1\,an} = 3\,10^8 \times 3,16\,10^7 = 9,46\,10^{15}\,m \simeq 10^{16}\,m$.

1b) L'énoncé donne la période du mouvement du Soleil dans la Voie Lactée $T = 2,5\,10^8\,ans = 7,89\,10^{15}\,s$, ainsi que le rayon de la trajectoire $R = 3\,10^4\,AL = 2,84\,10^{20}\,m$. Si on suppose que la trajectoire est circulaire, la distance parcourue pendant la période T est le périmètre $P = 2\pi R$. En supposant le mouvement uniforme on admet que la vitesse est constante, et est ainsi simplement reliée au rapport de la distance parcourue sur le temps écoulé : $v = d/t = P/T = 226\,km/s$! Le Soleil se déplace vite dans la galaxie, mais les distances entre les étoiles sont telles que l'on n'a pas conscience de ce mouvement...

1c) La masse de la galaxie s'obtient directement à partir de la $3^{ème}$ loi de Kepler donnée par l'éq.(**??**) : $M_g = 4\pi^2 R^3/(GT^2) = 2,57\,10^{41}\,kg$.

1d) En supposant que le Soleil est une étoile « standard », on obtient le nombre d'étoiles de type Soleil dans la Voie Lactée en calculant le rapport des masses : $N_{\odot/g} = M_g/M_\odot \approx 10^{11}$. Il y a environ 100 milliards d'étoiles dans notre galaxie !

Réponses de la partie Univers

2a) La vitesse d'éloignement d'Andromède par rapport à la Voie Lactée due à l'expansion de l'univers s'obtient directement par application de la loi de Hubble : $v_{exp} = H_0 r = 72 \times 0,778 = 56\,km/s$.
En fait, Andromède se rapproche de nous à la vitesse $v_{radial} = 300\,km/s$. L'indice *radial* indique que cette vitesse est la projection de la vitesse (du vecteur vitesse) sur la ligne de visée (la direction Voie Lactée - Andromède). La vitesse due à l'expansion de l'Univers domine les vitesses pour les galaxies « lointaines ». Pour Andromède, la galaxie la plus proche de nous, c'est la vitesse « propre » ou « vitesse particulière » qui domine celle due à l'expansion.

2b) La définition du parsec est donnée sur la figure 1. On en déduit la relation entre l'angle $\theta = 1''$ et les distances $d = 1\,pc$ et $R = 1\,UA = 1,5\,10^{11}\,m$: $R/d = \tan\theta \quad \Rightarrow \quad d = R/\tan\theta$. Cependant pour exprimer d (le parsec) en mètres, il faut exprimer θ en radian ou en degré (en radian si on veut utiliser la formule approchée $d \simeq R/\theta$). Il faut convertir $1''$ en radian ou en degré :

$$1^\circ = 60' = 3600'' \quad \Rightarrow \quad 1'' = \frac{1}{3600}{}^\circ = 2,78\,10^{-4}\,degrés$$

$$\pi = 180^\circ = 180 \times 3600'' \quad \Rightarrow \quad 1'' = \frac{\pi}{6,48\,10^5} rad = 4,85\,10^{-6}\,rad$$

On en déduit la valeur du parsec :

$$1\,pc = d = \frac{R}{\tan\theta} \approx \frac{R}{\theta} = \frac{1\,UA}{1''} = \frac{1,5\,10^{11}}{4,85\,10^{-6}}\frac{m}{rad} = 3,09\,10^{16}\,m$$

Ce résultat avec celui de la question 1a donne immédiatement $1\,pc = 3,27\,AL$.

2c) On a $[t_U] = T$ et $[H_0] = [v/r] = T^{-1}$. La relation entre l'âge de l'Univers et la constante

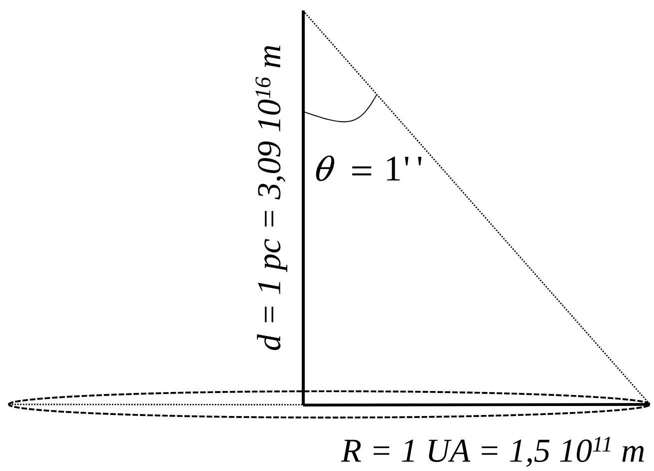

Figure 1 – Définition du parsec

de Hubble est donc immédiate : $t_U \approx 1/H_0$. On peut être surpris par la dimension $1/T$ relativement simple de H_0 au vu de l'unité « compliquée » utilisée pour exprimer sa valeur $H_0 = 72\,km.s^{-1}.Mpc^{-1}$. Il n'y a pas de mystère, car le Megaparsec (Mpc) est une distance comme les kilomètres, ces deux unités ont la même dimension. Les astronomes et les cosmologues s'amusent-ils à nous embrouiller les idées pour le plaisir ? Non, bien-sûr, cette façon d'exprimer H_0 est la plus physique quand on étudie la dynamique des galaxies. À ces échelles où les galaxies sont des points, l'échelle de la cosmologie, les distances caractéristiques sont de l'ordre du Mégaparsec et les vitesses de l'ordre des centaines de km/s.
Calculons à présent l'âge de l'Univers. À cette fin, déterminons la valeur de H_0 en s. Toutes les conversions entre unités sont connues, il suffit de les appliquer à la constante de Hubble H_0 :

$$H_0 = 72\,km.s^{-1}.Mpc^{-1} = 72\frac{10^3\,m}{1\,Mpc}s^{-1} = 72\frac{10^3\,m}{3,09\,10^{22}\,m}s^{-1} = 2,33\,10^{-18}\,s^{-1}$$

On en déduit alors un ordre de grandeur de l'âge de l'Univers :

$$t_U \approx \frac{1}{H_0} \;=\; 4,29\,10^{17}\,s \;=\; 13,6\,10^9 ans$$

Les données cosmologiques les plus récentes interprétées dans le cadre de la théorie de la relativité générale et du modèle cosmologique du big bang chaud, fournissent la même valeur de 13,6 milliards d'années. C'est une chance que ce raisonnement dimensionnel élémentaire fournisse une valeur numérique aussi proche des observations.

2d) On a dimensionnellement : $[\rho_c] = ML^{-3}$, $[H_0] = T^{-1}$ et $[G] = M^{-1}L^3T^{-2}$. Le raisonnement direct est assez évident et donne : $\rho_c \approx H_0^2/G$. Un raisonnement plus rigoureux nous permettra d'obtenir l'équation de Friedman (chapitre 8) montrant que $\rho_c = 3H_0^2/(8\pi G)$.

Numériquement, on a $\rho_c = 0,97\,10^{-26}\,kg/m^3$. En divisant par la masse du proton, on obtient $\rho_c \simeq 6\,protons/m^3$. Ce chiffre est extrêmement faible par rapport à la densité de la matière ordinaire (liquide ou solide). En effet, aux questions C de l'exercice C1.4 nous avons vu que la constante d'Avogadro $\mathcal{N}_A = 6,02\,10^{23}$ *entités/mol* était en fait le nombre de protons (nucléons) par gramme de matière. En choisissant de l'eau pour fixer les idées, dans $1\,m^3$ d'eau il y a $10^6\,g$ de matière, soit environ $6\,10^{29}$ protons (nucléons) : la matière ordinaire est 10^{29} fois plus dense que l'Univers !

2e) La loi de Hubble stipule que $v_{exp} = H_0 r$. Pour des distances extrêmement grandes on peut imaginer que cette vitesse d'expansion dépasse la vitesse de la lumière. Cela implique que la lumière, ou toute autre forme d'information, n'arrivera plus à nous parvenir. L'Univers devient « noir » au-delà de cette zone que l'on appelle « horizon ». La distance que l'on va calculer maintenant est l'horizon « classique » par opposition aux calculs qui peuvent être menés dans le cadre de la relativité (générale).

L'horizon classique de l'Univers est atteint, $r = R_U$, lorsque $v_{exp} = c$. Ce qui donne avec la loi de Hubble :
$c = H_0 R_U \quad \Rightarrow \quad R_U = c/H_0 = 1,29\,10^{26}\,m = 4,15\,Gpc = 13,6\,10^9\,AL$
Quel que soit la véritable taille de l'univers (fini ou infini, peu importe), il apparaît que nous, les observateurs, recevons de l'information de toutes les directions où l'on regarde. Cela délimite « une sphère d'information » où nous sommes au centre et qui a pour rayon l'horizon classique calculé précédemment, c'est ce que nous appelons « l'univers observable (classique) ».

2f) Ayant en main une densité, ρ_c, et une distance, R_U, on peut calculer une masse. La masse de l'univers observable, associé à cette sphère d'information, est alors simplement : $M_U = \rho_c 4\pi R_U^3/3 = 8,67\,10^{52}\,kg \simeq 5\,10^{79}\,protons$.

2g) À partir de cette estimation de la masse de l'Univers observable, et de l'estimation de la masse de notre galaxie faite à la question 1c, on en déduit le nombre de galaxies, du type Voie Lactée, dans notre Univers observable : $N_{g/U} = M_U/M_g \simeq 3\,10^{11}$. Il y a quelques centaines de milliards de galaxies dans notre Univers observable !