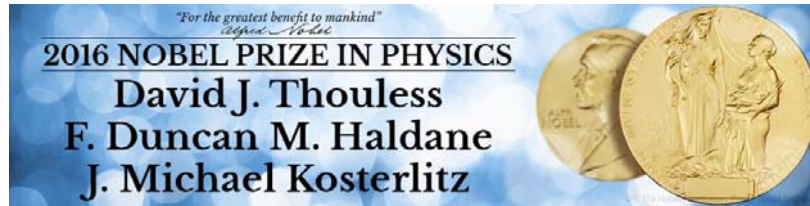


# Le prix Nobel de Physique 2016



"for theoretical discoveries of topological phase transitions and topological phases of matter"

## Topologie et matière condensée



Gilles Montambaux  
Laboratoire de Physique des Solides, CNRS  
Université Paris-Sud, Orsay, France



Clermont-Ferrand, 31 mars 2017

SCIENCES

# Comprendre les travaux des nouveaux Nobel de physique avec un bretzel et un bagel

Par Camille Gévaudan — 4 octobre 2016 à 14:28



Mardi à Stockholm, Thors Hans Hansson, membre du comité Nobel pour les sciences physiques, explique la topologie avec un bretzel. Photo Anders Wiklund. AFP



- « Applications pratiques dans une ou deux décades ... »
- « Nouveaux matériaux moins consommateurs en énergie ... »
- « Ordinateurs du futur ... »
- « Transport de l'énergie et de l'information plus loin et plus vite... »

Topologie: « l'étude des déformations spatiales par des transformations continues »



Topologie = « robustesse » :

Un état « topologiquement » protégé ne peut pas être perturbé



D. Thouless  
(U. Washington)



M. Kosterlitz  
(U. Brown)

"topological phase transitions and topological phases of matter"



D. Haldane  
(U. Princeton)

"Topological phase transitions and topological phases of matter"

La transition de Kosterlitz-Thouless (1973)

La chaîne de Haldane (1983)

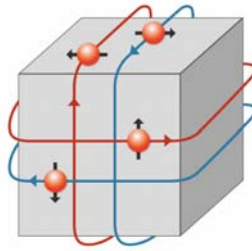
L'effet Hall quantique TKNN (1982)

Le modèle de Haldane (1988)

Les isolants topologiques (2005)

graphène

"isolant topologique"



# La transition de Kosterlitz-Thouless (1973)

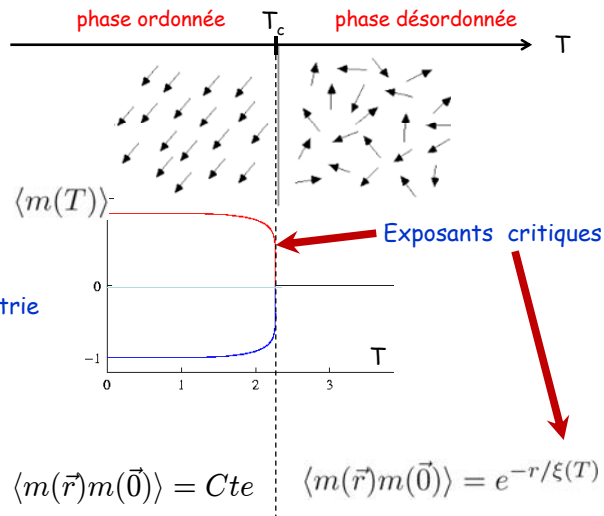
Nouveau concept de transition de phase où les défauts topologiques jouent un rôle crucial

La transition de Kosterlitz-Thouless

Contexte : les transitions de phase années 70 :

On comprend que les transitions de phase présentent des caractéristiques universelles

Exemple : magnétisme



Paramètre d'ordre

$T \searrow$   
Brisure spontanée de symétrie

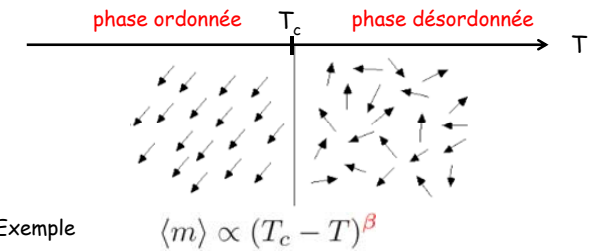
Fonction de corrélation

La transition de Kosterlitz-Thouless

Contexte : les transitions de phase années 70 :

On comprend que les transitions de phase présentent des caractéristiques universelles

Exemple : magnétisme



Exposants critiques

Classes d'universalité : deux paramètres seulement  
la dimension d'espace  $d$   
la dimensionnalité du paramètre d'ordre  $n$

Théorie de Landau (champ moyen, néglige les fluctuations)  
Très peu de solutions exactes (Onsager, 1944,  $d=2, n=1$ )

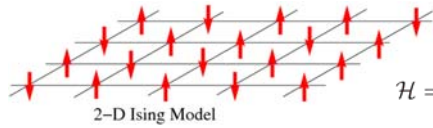
Modèle canonique : transition para-ferromagnétisme

$$Z(\beta) = \sum_{\{\vec{S}_i\}} e^{\beta J \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j}$$

Le modèle d'Heisenberg

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$$

$J > 0$



$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} S_i^z \cdot S_j^z$$

Solution exacte, Onsager  $d=2, n=1$  (Ising)

Théorie de Landau → exposants de champ moyen,

$$\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \rightarrow \langle \vec{S}_i \rangle \cdot \langle \vec{S}_j \rangle$$

Importance des fluctuations

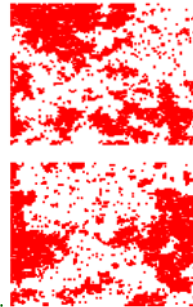
Groupe de renormalisation

1970's K. Wilson, L. Kadanoff, M.E. Fisher,  
E. Brézin, J.C. Le Guillou, J. Zinn-Justin, etc..



1982

Classes d'universalité

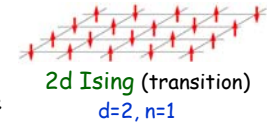


fluctuations

À basse dimension, les fluctuations thermiques et quantiques sont importantes  
Pas d'ordre à longue distance

Mermin-Wagner (1966)

À  $d \leq 2$  pas de transition de phase à température finie  
avec brisure spontanée de symétrie continue  
(Transition de phase à  $T=0K$ )



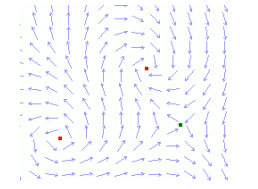
2d Ising (transition)  
 $d=2, n=1$

$d=2, n=2$  aimants ou supraconducteurs,  $^4He$  superfluide

condensat supra : amplitude et phase  $n=2$

Pas d'ordre à longue distance

mais ordre algébrique : décroissance lente des corrélations

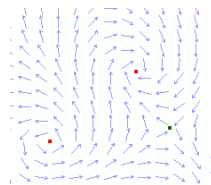


2d XY (pas de transition)  
 $d=2, n=2$

$d=2, n=2$

Modèle X-Y

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j) \quad J > 0$$

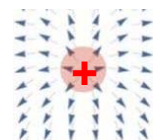
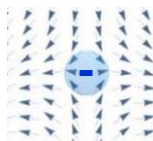
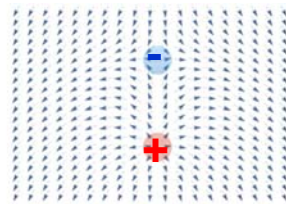
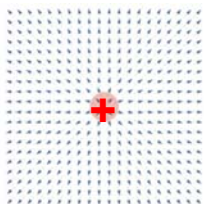


Ordre algébrique :

→ décroissance lente des corrélations

Kosterlitz-Thouless :

∃ des défauts topologiques, des vortex, enroulement de l'angle  $\theta$



Configurations topologiquement distinctes

∃ des vortex + et des vortex -

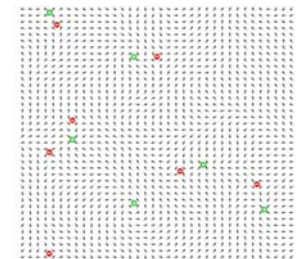
$$\oint d\theta = 2n\pi$$

La transition de Kosterlitz-Thouless...

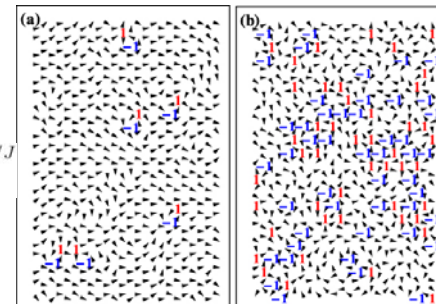
... est une transition de dissociation des vortex

À basse température, les vortex forment des paires liées  
et ne perturbent pas l'ordre algébrique à longue distance

À haute température, dissociation des paires de vortex  
→ décroissance exponentielle des corrélations



$$\langle m(\vec{r})m(\vec{0}) \rangle \sim \left(\frac{a}{r}\right)^{T/J}$$



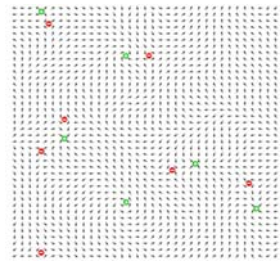
$$\langle m(\vec{r})m(\vec{0}) \rangle = e^{-r/\xi(T)}$$

Nouveau type de transition de phase, induite par des défauts topologiques

Argument entropique  $\oint d\theta = 2n\pi \implies \nabla\theta \propto \frac{1}{r}$

$$E \sim J \int (\nabla\theta)^2 2\pi r dr \sim J \ln \frac{R}{a}$$

$$S = k \ln W \sim k \ln \frac{R^2}{a^2}$$



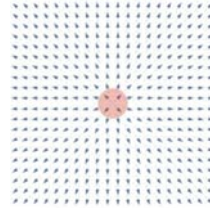
Énergie libre associée à un vortex

$$\Delta F = E - TS \sim (J - kT) \ln R$$

$T < T_c \rightarrow \Delta F > 0$  Vortex liés

$T > T_c \rightarrow \Delta F < 0$  Prolifération de vortex libres

$$T_c \sim J$$



Nouveau type de transition de phase, induite par des défauts topologiques

## La transition de Kosterlitz-Thouless

Observations expérimentales

<sup>4</sup>He suprafluide

Films supraconducteurs

Systèmes magnétiques 2D

Atomes froids pas de condensation de Bose à 2D

observation de la transition de Kosterlitz-Thouless (J. Dalibard, ENS)

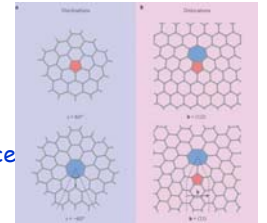
La transition solide-liquide à 2 dimensions

$T > T_{c1}$  Apparition de dislocations

$\rightarrow$  brisure de l'ordre translationnel à longue distance

$T > T_{c2}$  Apparition de disinclinaisons

$\rightarrow$  brisure de l'ordre orientationnel à longue distance



Kosterlitz, Nelson, Halperin

## L'effet Hall quantique

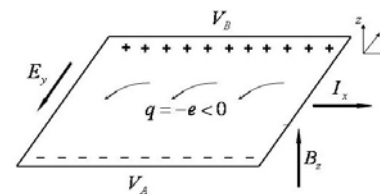
"TKNN"

(1982)

Thouless, Kohmoto, Nightingale, den Nijs

L'effet Hall quantique : première réalisation d'un « isolant topologique »

## L'effet Hall (1879)



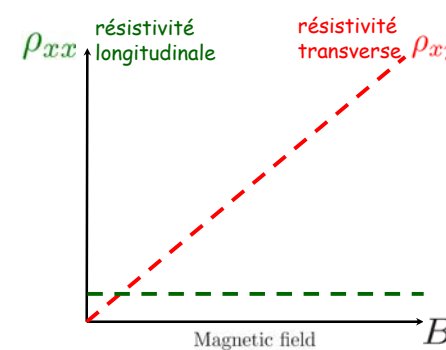
$$e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})_y = 0$$

$$j_x = n_{el} e v_x = n_{el} e \frac{E_y}{B}$$

résistivité longitudinale  $\rho_{xx}$       résistivité transverse  $\rho_{xy} = \frac{1}{\sigma_{xy}}$

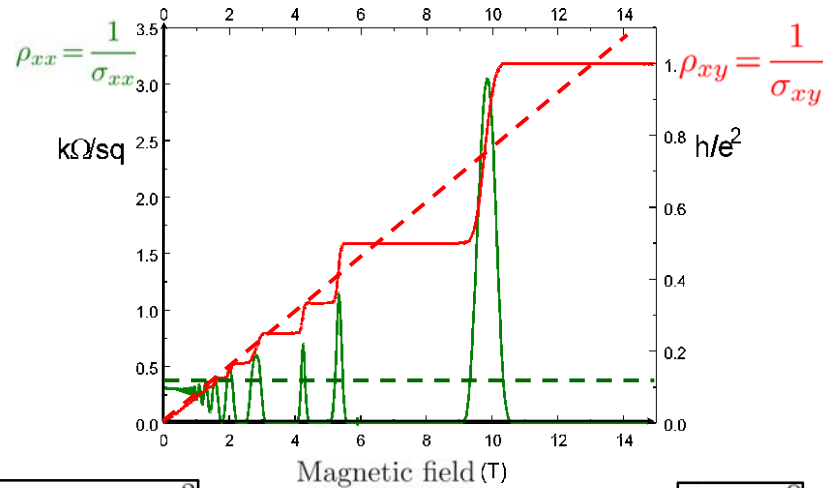
$$\sigma_{xy} = \frac{j_x}{E_y} = \frac{n_{el} e}{B}$$

Conductivité transverse ou de Hall



# L'effet Hall quantique (1980)

K. von Klitzing



$$\sigma_{xy} = n_H \frac{e^2}{h} \quad n_H \in \mathbb{N}$$

$$\rho_{xx} = 0$$

# L'effet Hall quantique

New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance


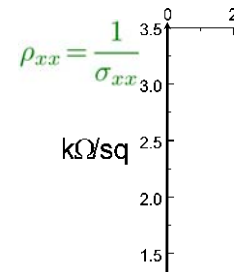
K. v. Klitzing  
 Physikalisches Institut der Universität Würzburg, D-8700 Würzburg, Federal Republic of Germany, and  
 Hochfeld-Magnetlabor des Max-Planck-Instituts für Festkörperforschung, F-38042 Grenoble, France

and  
 G. Dorda  
 Forschungslaboratorien der Siemens AG, D-8000 München, Federal Republic of Germany

and  
 M. Pepper  
 Cavendish Laboratory, Cambridge CB3 0HE, United Kingdom

(Received 30 May 1980)

1985

$$\alpha = \frac{\mu_0 c}{2} \frac{e^2}{h}$$

$$R_K = \frac{h}{e^2} = 25812.807557(18) \Omega$$

$$\sigma_{xy} = n_H \frac{e^2}{h} \quad n_H \in \mathbb{N}$$

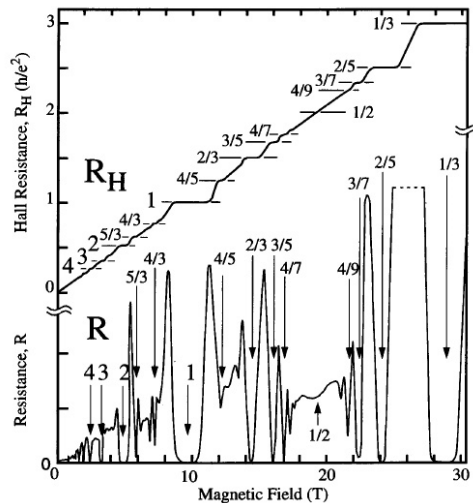
$$\rho_{xx} = 0$$

# L'effet Hall quantique fractionnaire (1983)

Stormer, Tsui, Laughlin



1998



$$R_H = \frac{q}{p} \frac{h}{e^2}$$

$$e^* = \frac{p}{q} e$$

## Métrie

Interactions électroniques

Isolants topologiques

Effet Hall Quantique

Désordre et localisation

États de bords et physique 1D

Information quantique

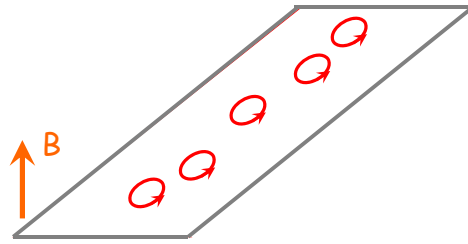
Équation de Dirac et graphène

Géométrie non-commutative

Théorie des champs, cordes

Gravitation...

## Sous fort champ magnétique, trajectoires fermées quantifiées



$$\omega_c = \frac{eB}{m}$$

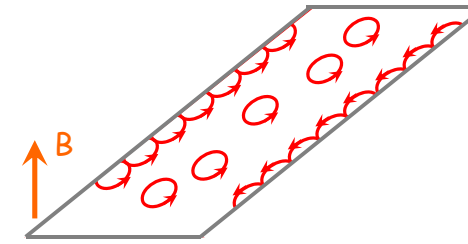
pulsation cyclotron

$$\epsilon_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_c$$

Niveaux de Landau

Deux ingrédients importants, les bords et le désordre

## Les bords et le désordre

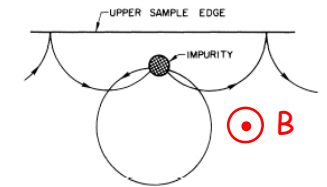


« skipping orbits »

Les trajectoires en volume sont piégées par le désordre

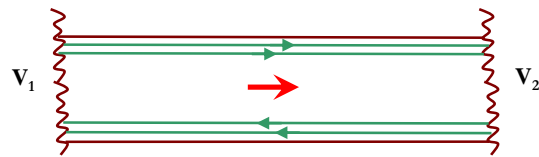
Les trajectoires de bord, chirales, sont insensibles au désordre

Isolant en volume  
Conducteur « chiral » parfait sur les bords



M. Büttiker

États de volume piégés par le désordre  
En surface, pas de rétrodiffusion → robustesse des plateaux de Hall



$n_H$  canaux de conduction parfaite, localisés sur les bords

$$R_L = 0$$

$$I = n_H \frac{e^2}{h} \Delta V$$

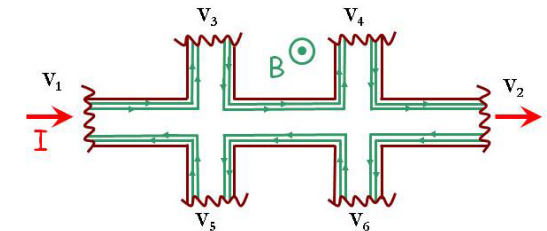
quantum de conductance  
R. Landauer (1957)



$$\sigma_{xy} = n_H \frac{e^2}{h}$$

## L'effet Hall quantique

$$\sigma_{xy} = n_H \frac{e^2}{h}$$



L'entier est le nombre de canaux de bords

C'est aussi une propriété topologique en volume (nombre de Chern)

D. Thouless



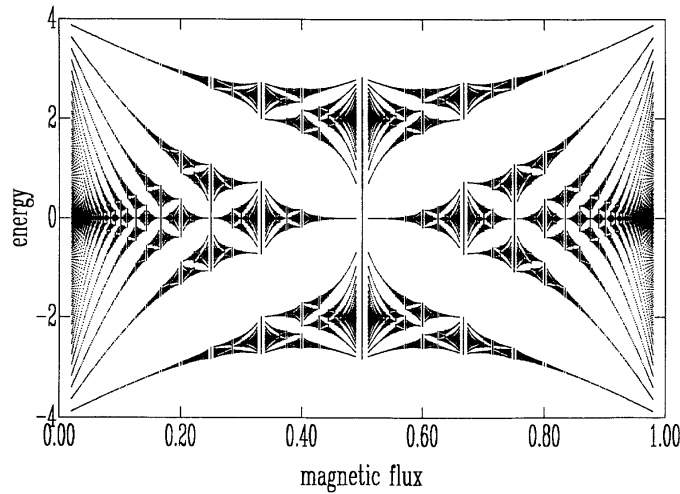
2016

"TKNN"

bulk-edge correspondence

Premier exemple d'«isolant topologique»

## Électrons dans un cristal



## Un peu de théorie des bandes

Électrons libres

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \longrightarrow \psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Particules dans un potentiel périodique (a)

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\vec{r}) \longrightarrow \psi_n(\vec{r}) = u_{n\vec{k}}(\vec{r}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

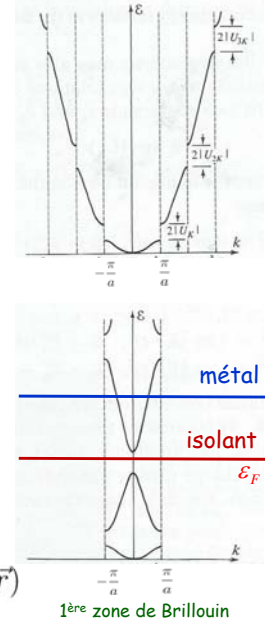
Fonction de Bloch

$$u_{n\vec{k}}(\vec{r} + \vec{a}) = u_{n\vec{k}}(\vec{r}) \quad \vec{k} \in 1^{\text{ère}} \text{ ZB } [\pm\pi/a]$$

Isolant ou métal selon la position du niveau de Fermi

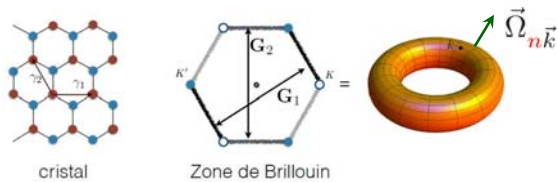
Q : tout est dans le spectre ?    R : NON

Des propriétés intéressantes sont codées dans  $u_{n\vec{k}}(\vec{r})$



## Un peu de théorie des bandes

Des propriétés intéressantes sont codées dans  $u_{n\vec{k}}(\vec{r})$



Géométrie

$u_{n\vec{k}}(\vec{r})$  définie sur un tore

$$\vec{A}_{n\vec{k}} = i \langle u_{n\vec{k}} | \vec{\nabla} | u_{n\vec{k}} \rangle \quad \text{connection de Berry}$$

$$\vec{\Omega}_{n\vec{k}} = \vec{\nabla} \times \vec{A}_{n\vec{k}} \quad \text{courbure de Berry}$$

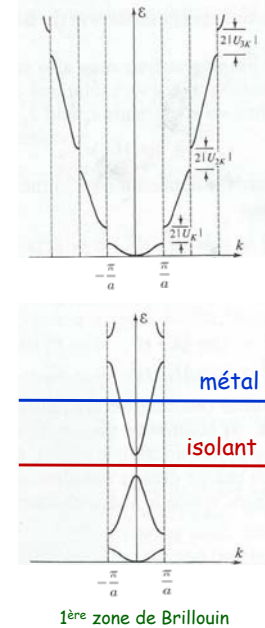
$$\sigma_H = \frac{e^2}{h} \sum_n \int_{BZ} \frac{d^2k}{2\pi} \Omega_{n\vec{k}} \quad \text{est un entier (nb de Chern)}$$

Topologie

## Équations du mouvement semiclassiques

$$\hbar \dot{\vec{k}} = -e(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B})$$

$$\dot{\vec{r}} = \frac{1}{\hbar} \vec{\nabla}_{\vec{k}} \epsilon$$



## Équations du mouvement semiclassiques

$$\hbar \dot{\vec{k}}_n = -e(\vec{E} + \dot{\vec{r}}_n \times \vec{B})$$

$$\dot{\vec{r}}_n = \frac{1}{\hbar} \vec{\nabla}_{\vec{k}} \epsilon_n + \frac{e}{\hbar} \vec{E} \times \vec{\Omega}_{n\vec{k}}$$

Courant dans un gap

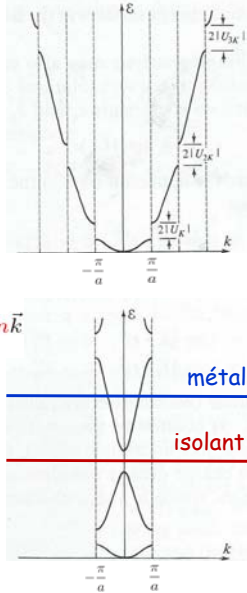
$$\vec{j} = -e \sum_n \int_{BZ} \frac{d^2 \vec{k}}{(2\pi)^2} \vec{v}_{n\vec{k}} = -\frac{e}{\hbar} \vec{E} \times \sum_n \int_{BZ} \frac{d^2 \vec{k}}{2\pi} \vec{\Omega}_{n\vec{k}}$$

$$\sigma_H = \frac{e^2}{h} \sum_n \int_{BZ} \frac{d^2 k}{2\pi} \Omega_{n\vec{k}}$$

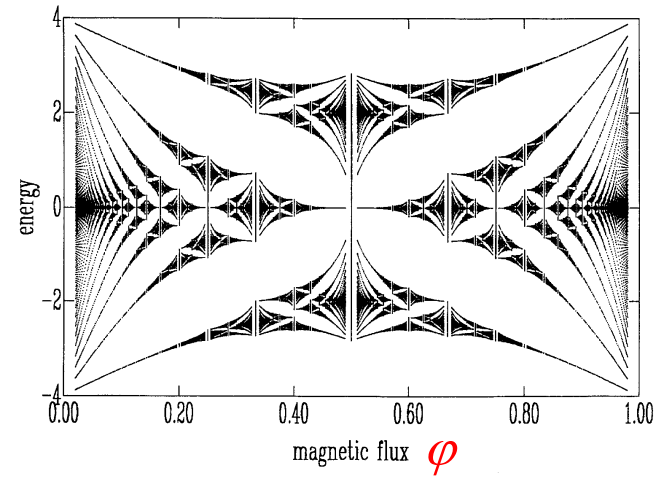
nombre de Chern

Nature topologique de l'effet Hall quantique

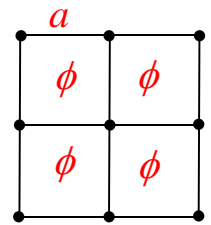
"TKNN"



## Le papillon de Hofstadter

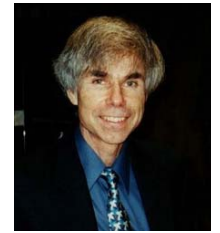


Energy levels and wave functions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields, Douglas Hofstadter, Phys. Rev. B 14 (1976) 2239



$$\varphi = \frac{\phi}{\phi_0} \quad \phi_0 = \frac{h}{e}$$

$$\phi = Ba^2$$

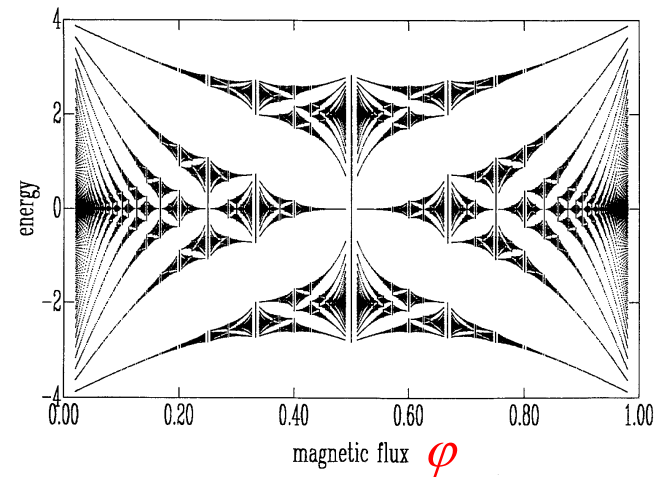


## La loi de Hofstadter...

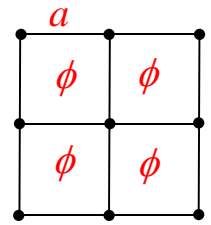
« Il faut toujours plus de temps que prévu, même en tenant compte de la Loi de Hofstadter. »



## Le papillon de Hofstadter

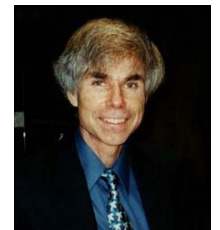


Energy levels and wave functions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields, Douglas Hofstadter, Phys. Rev. B 14 (1976) 2239



$$\varphi = \frac{\phi}{\phi_0} \quad \phi_0 = \frac{h}{e}$$

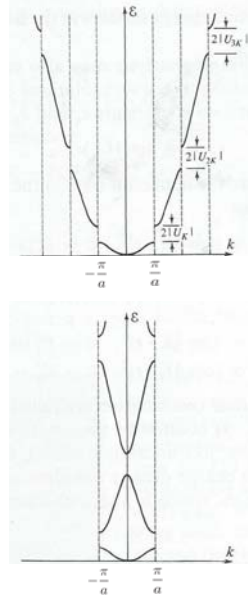
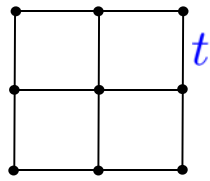
$$\phi = Ba^2$$





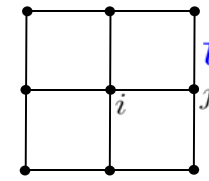
## Les modèles sur réseau

### Couplage entre états atomiques localisés

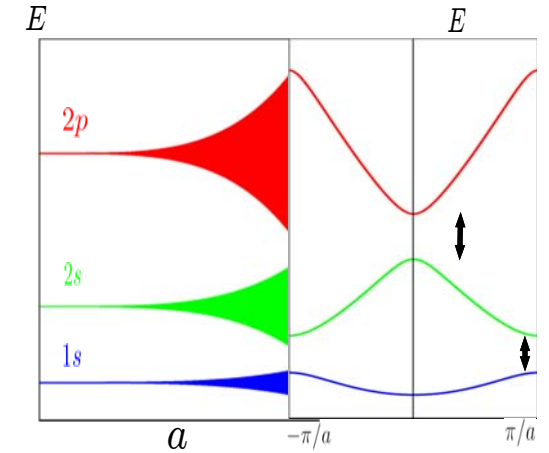


## Les modèles sur réseau

### Couplage entre états atomiques localisés

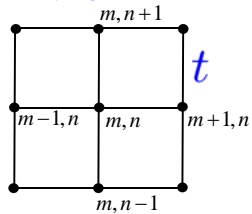


$$\hat{H}|i\rangle = -t \sum_{\langle j,i \rangle} |j\rangle$$

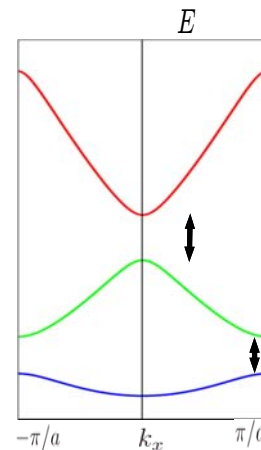
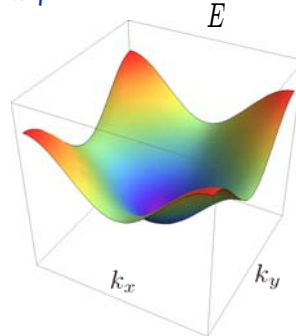


## Les modèles sur réseau

### Couplage entre états atomiques localisés



$$\hat{H}|i\rangle = -t \sum_{\langle j,i \rangle} |j\rangle$$



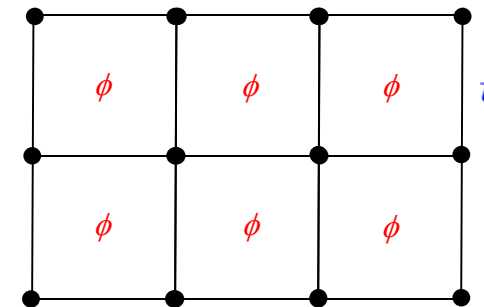
$$H|m,n\rangle = -t|m,n+1\rangle - t|m,n-1\rangle - t|m+1,n\rangle - t|m-1,n\rangle$$

$$\langle m,n|\vec{k}\rangle = e^{i(k_x m + k_y n)}$$

$$\epsilon_{\vec{k}} = -2t(\cos k_x a + \cos k_y a)$$

## Les modèles sur réseau : avec un champ magnétique

$$\phi = Ba^2$$



$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} + e\vec{A}$$

$$t \rightarrow t e^{i\varphi_{ij}}$$

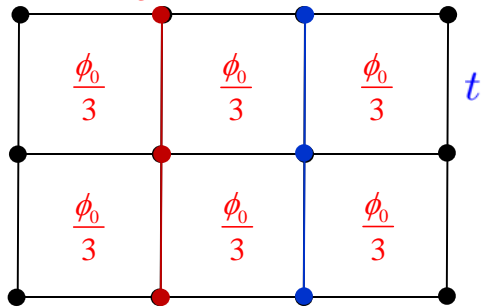
$$\varphi_{ij} = \frac{e}{\hbar} \int_i^j \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

$$\sum_{\mathcal{O}} \varphi_{ij} = 2\pi \frac{\phi}{\phi_0}$$

$$\hat{H}|i\rangle = -t \sum_{\langle j,i \rangle} e^{i\varphi_{ij}} |j\rangle$$

## Les modèles sur réseau : avec un champ magnétique

Exemple :  $\phi = \frac{\phi_0}{3}$



$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} + e\vec{A}$$

$$t \rightarrow t e^{i\varphi_{ij}}$$

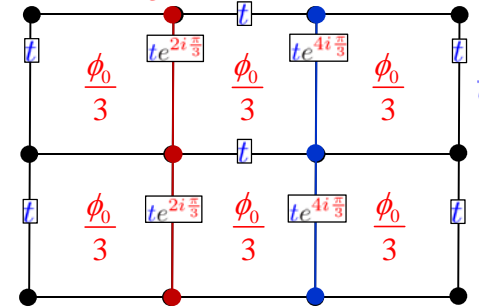
$$\varphi_{ij} = \frac{e}{h} \int_i^j \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

$$\sum_{\square} \varphi_{ij} = 2\pi \frac{\phi}{\phi_0}$$

$$\hat{H}|i\rangle = -t \sum_{\langle j,i \rangle} e^{i\varphi_{ij}} |j\rangle$$

## Les modèles sur réseau : avec un champ magnétique

Exemple :  $\phi = \frac{\phi_0}{3}$



$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} + e\vec{A}$$

$$t \rightarrow t e^{i\varphi_{ij}}$$

$$\varphi_{ij} = \frac{e}{h} \int_i^j \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

$$\sum_{\square} \varphi_{ij} = 2\pi \frac{\phi}{\phi_0}$$

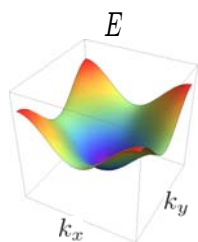
Périodicité triplée  $\rightarrow$  3 bandes

$\varphi = \frac{p}{q}$  Périodicité selon  $x$  :  $q a$  q bandes

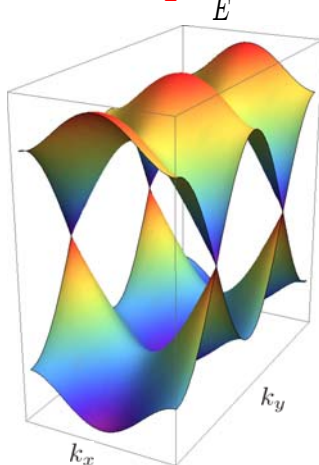
q sous-bandes  $E(k_x, k_y)$

## Les modèles sur réseau : avec un champ magnétique

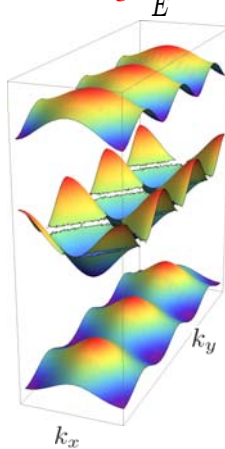
$\phi = 0$



$\phi = \frac{\phi_0}{2}$



$\phi = \frac{\phi_0}{3}$

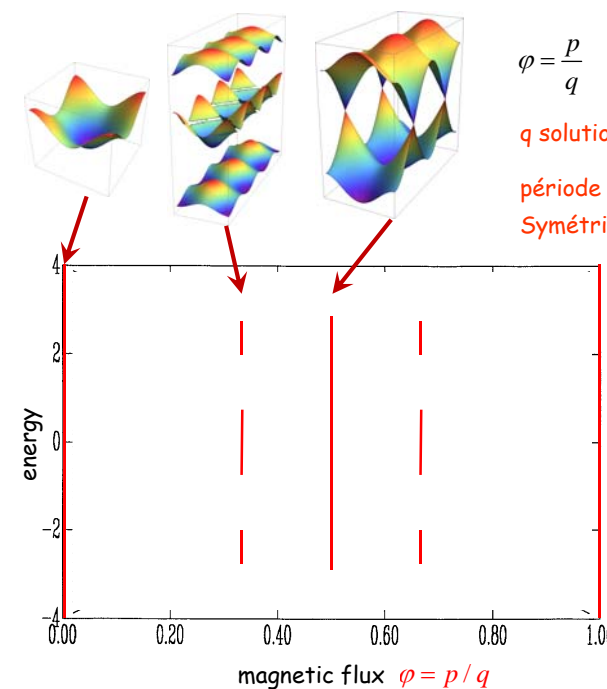


$\varphi = \frac{p}{q}$

$q$  solutions  $E(k_x, k_y)$  q sous-bandes

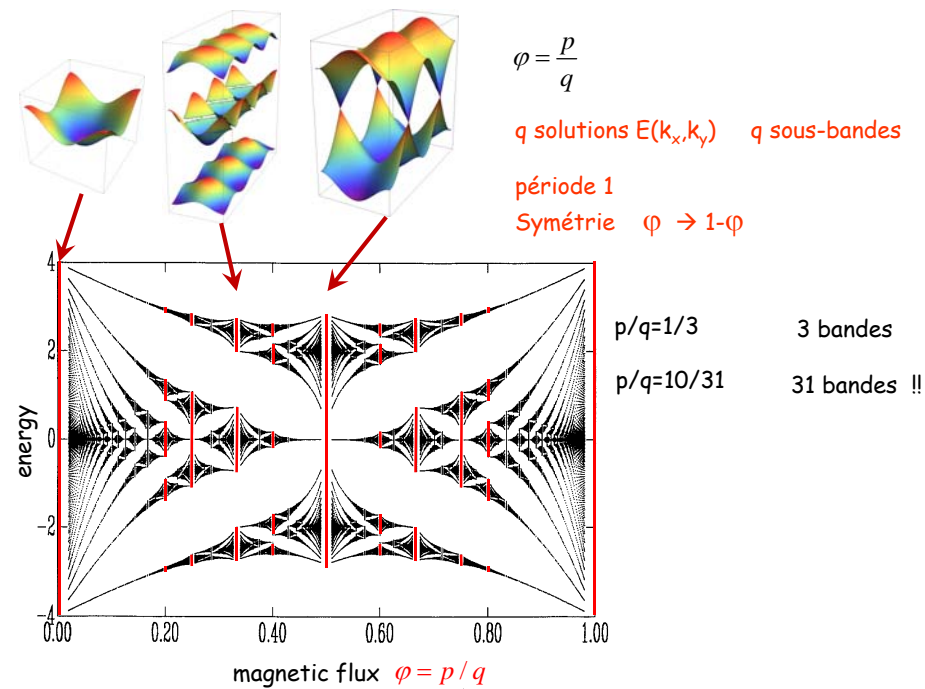
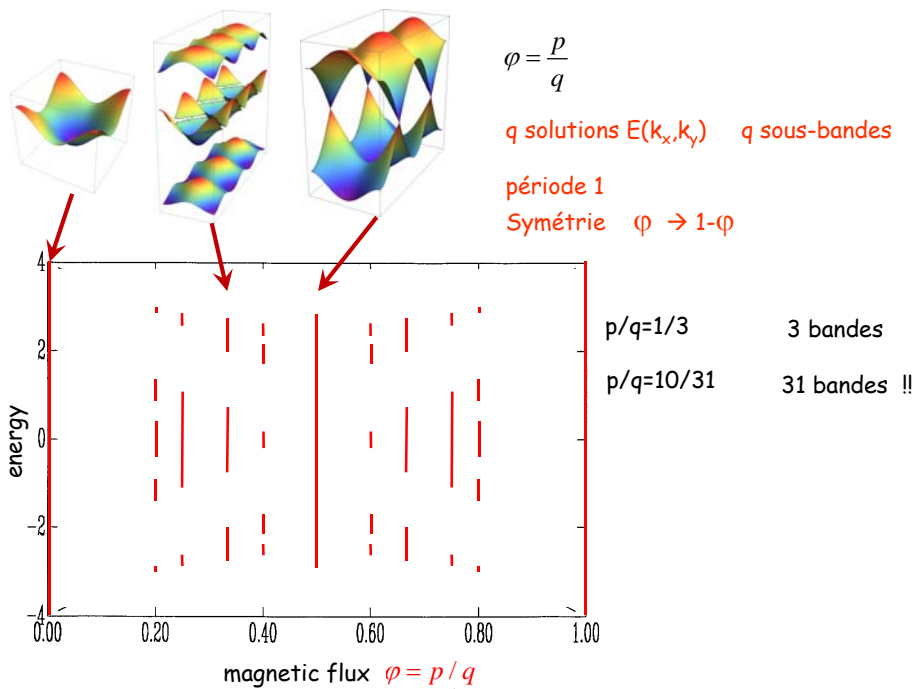
période 1

Symétrie  $\varphi \rightarrow 1-\varphi$

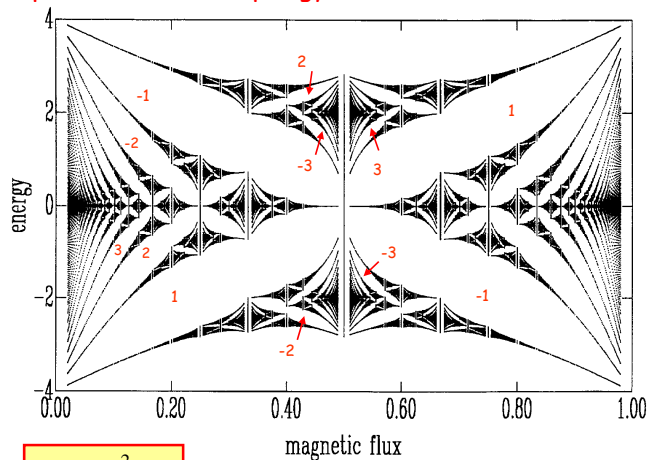


$p/q=1/3$  3 bandes

$p/q=10/31$  31 bandes !!



### Gap structure and topology



$$\sigma_H = \frac{e^2}{h} n_H$$

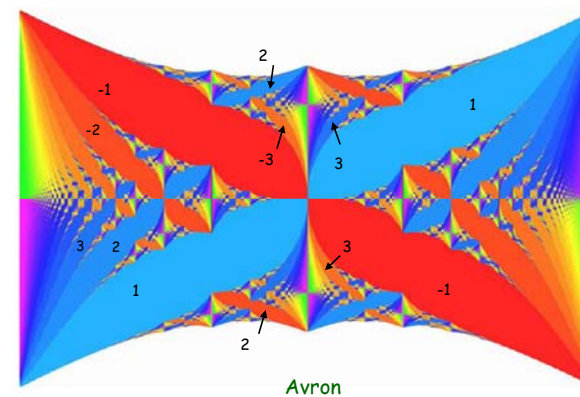
$$n_H = \sum_i^{filled} C_i$$

$n_H$  est un nombre topologique

$C_i$  nombre de Chern, caractérise chaque bande

Wannier, TKNN, Avron  
Simon, Bellissard

### Gap structure and topology



$$\sigma_H = \frac{e^2}{h} n_H$$

$$n_H = \sum_i^{filled} C_i$$

$n_H$  est un nombre topologique

$C_i$  nombre de Chern, caractérise chaque bande

Wannier, TKNN, Avron  
Simon, Bellissard

## En résumé, dans le régime d'effet Hall quantique:

Isolant en volume à cause du désordre  
Conducteur « chiral » parfait sur les bords

C'est un isolant non trivial :  
Il est isolant en volume, mais conducteur parfait sur les bords  
(protégé topologiquement)

Correspondance « bulk-edge »

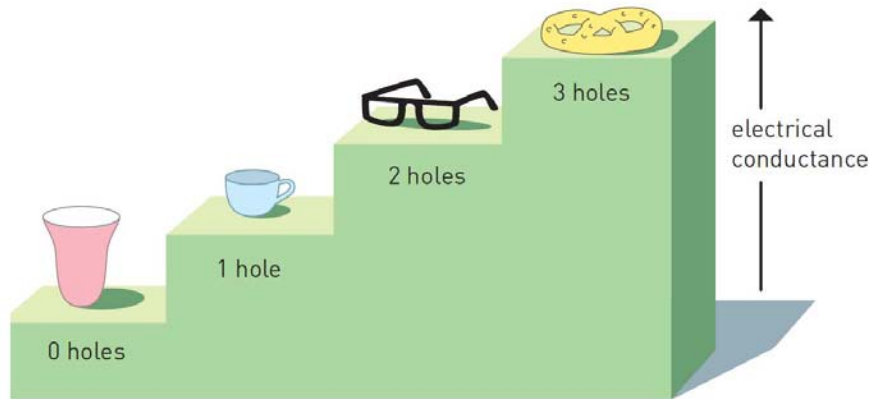
C'est le premier exemple d'isolant topologique

Isolants topologiques 2007 .....

Isolants en volume,  
états conducteurs en surface topologiquement protégés

Pour l'EHQ, cet état nécessite la brisure de l'invariance par renversement du temps induite par le champ magnétique

Même physique en l'absence de champ magnétique ?



<http://www.nobelprize.org/>

## Du graphène aux isolants topologiques

Concevoir un système physique qui présente les mêmes caractéristiques que l'effet Hall quantique,

isolant en volume, conducteur parfait en surface,

en l'absence de champ magnétique, sans briser l'invariance par renversement du temps.

## Du graphène aux isolants topologiques

Modèle de Haldane (1988), variante du graphène

Effet Hall quantique sans champ magnétique

D. Haldane



VOLUME 61, NUMBER 18

PHYSICAL REVIEW LETTERS

31 OCTOBER 1988

Model for a Quantum Hall Effect without Landau Levels:  
Condensed-Matter Realization of the "Parity Anomaly"

F. D. M. Haldane

Department of Physics, University of California, San Diego, La Jolla, California 92093  
(Received 16 September 1987)



2016

## Le graphène

$$H_{\vec{k}} = - \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & f(\vec{k}) \\ f^*(\vec{k}) & 0 \end{pmatrix}$$

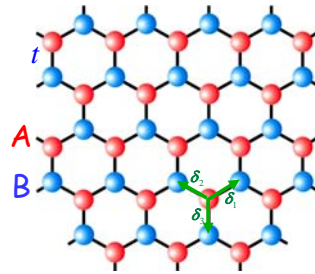
Fonction d'onde à 2 composantes

$$|\psi_{\vec{k}}\rangle = |u_{\vec{k}}\rangle e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

$$H_{\vec{k}} |u_{\vec{k}}\rangle = \varepsilon_{\vec{k}} |u_{\vec{k}}\rangle$$

$$|u_{\vec{k}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm e^{i\phi(\vec{k})} \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{k}) = t (e^{i\vec{k}\cdot\vec{\delta}_1} + e^{i\vec{k}\cdot\vec{\delta}_2} + e^{i\vec{k}\cdot\vec{\delta}_3})$$



## Le graphène

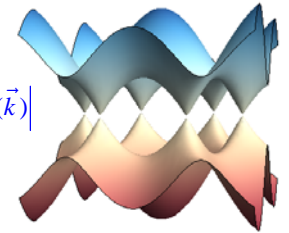
$$H_{\vec{k}} = - \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & f(\vec{k}) \\ f^*(\vec{k}) & 0 \end{pmatrix}$$

Fonction d'onde à 2 composantes

$$|u_{\vec{k}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm e^{i\phi(\vec{k})} \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{k}) = t (e^{i\vec{k}\cdot\vec{\delta}_1} + e^{i\vec{k}\cdot\vec{\delta}_2} + e^{i\vec{k}\cdot\vec{\delta}_3})$$

$$\varepsilon(\vec{k}) = \pm |f(\vec{k})|$$



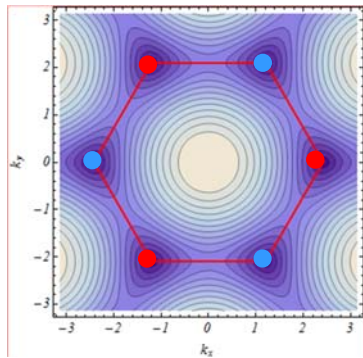
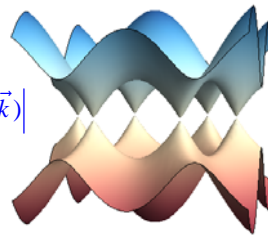
## Le graphène

$$H_{\vec{k}} = - \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & f(\vec{k}) \\ f^*(\vec{k}) & 0 \end{pmatrix}$$

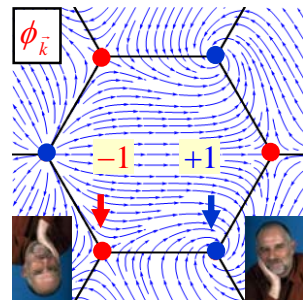
Fonction d'onde à 2 composantes

$$|u_{\vec{k}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm e^{i\phi(\vec{k})} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon(\vec{k}) = \pm |f(\vec{k})|$$



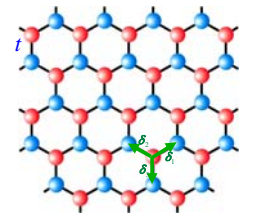
$$\phi(\vec{k}) = \arg[f(\vec{k})]$$



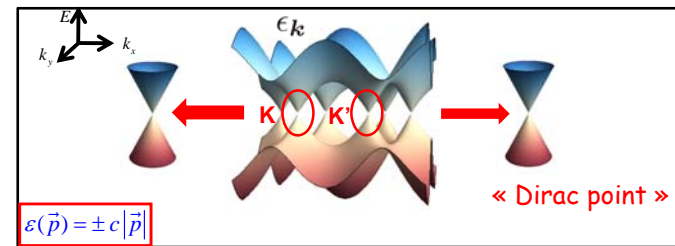
phase de Berry

## Le graphène

$$\hat{H}|i\rangle = -t \sum_{\langle j,i \rangle} |j\rangle \quad H_{\vec{k}} = - \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & f(\vec{k}) \\ f^*(\vec{k}) & 0 \end{pmatrix}$$



A = B



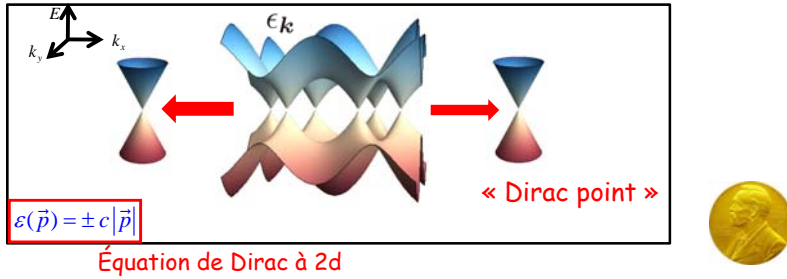
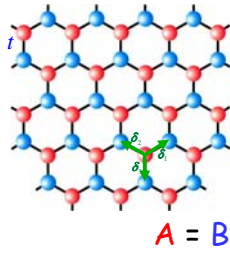
Équation de Dirac à 2d



$$\mathcal{H} = c \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \pm p_x - ip_y \\ \pm p_x + ip_y & 0 \end{pmatrix}$$

## Le graphène

$$\hat{H}|i\rangle = -t \sum_{\langle j,i \rangle} |j\rangle \quad H_{\vec{k}} = - \begin{pmatrix} A & B_{\vec{k}} \\ 0 & f(\vec{k}) \\ f^*(\vec{k}) & 0 \end{pmatrix}$$



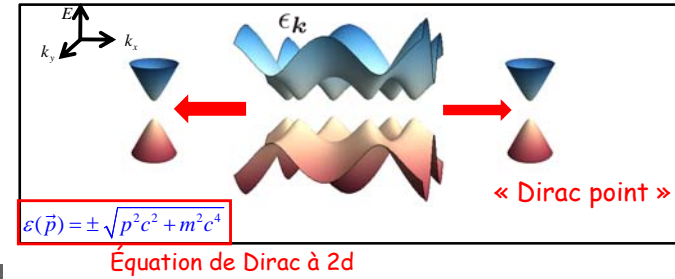
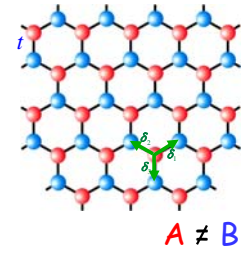
Relativistic quantum physics in a benchtop experiment (A. Geim)

QED in a pencil trace... (K. Novoselov)



## Le graphène gappé, nitrure de bore (BN)

$$\hat{H}|i\rangle = -t \sum_{\langle j,i \rangle} |j\rangle \quad H_{\vec{k}} = - \begin{pmatrix} A & B_{\vec{k}} \\ \Delta & f(\vec{k}) \\ f^*(\vec{k}) & -\Delta \end{pmatrix}$$

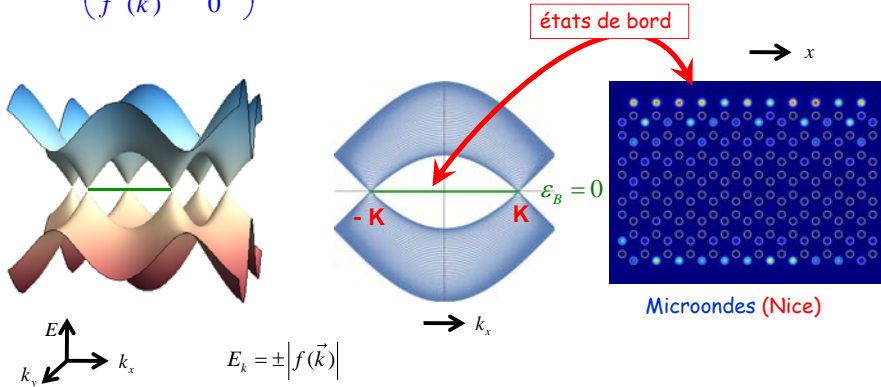
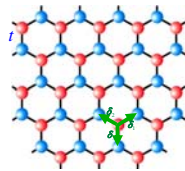


$$\mathcal{H} = c \begin{pmatrix} A & B \\ \pm p_x - i p_y & -mc \\ \pm p_x + i p_y & -mc \end{pmatrix}$$

Graphène (fermions de Dirac sans masse) :

les deux atomes sont identiques, c'est un semi-métal

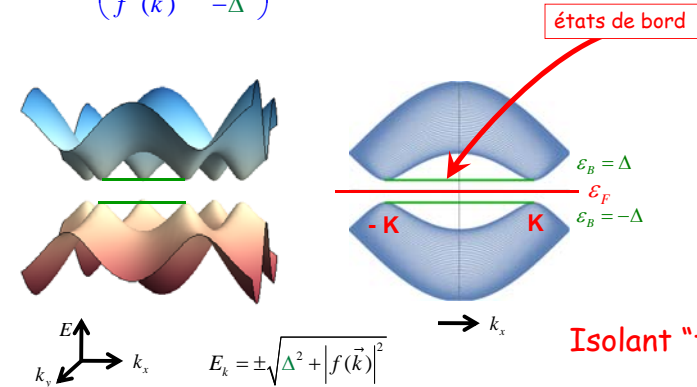
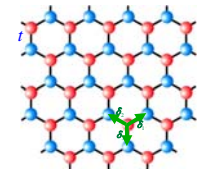
$$H_{\vec{k}} = - \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & f(\vec{k}) \\ f^*(\vec{k}) & 0 \end{pmatrix}$$



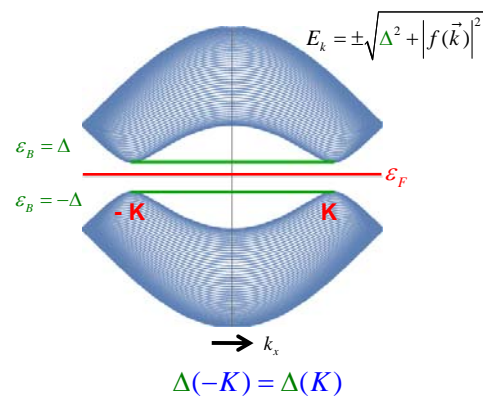
Nitrure de Bore (fermions de Dirac massifs) :

les deux atomes sont différents, c'est un isolant

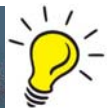
$$H_{\vec{k}} = - \begin{pmatrix} A & B \\ \Delta & f(\vec{k}) \\ f^*(\vec{k}) & -\Delta \end{pmatrix}$$



$$H_{\vec{k}} = - \begin{pmatrix} A & B \\ \Delta & f(\vec{k}) \\ f^*(\vec{k}) & -\Delta \end{pmatrix}$$

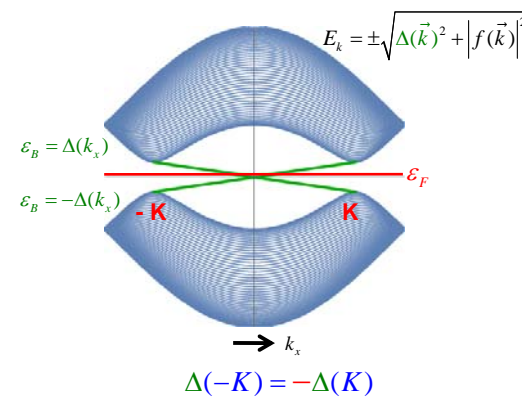


Isolant "trivial"



Haldane : changer le signe du gap entre K et -K

$$H_{\vec{k}} = - \begin{pmatrix} A & B \\ \Delta(\vec{k}) & f(\vec{k}) \\ f^*(\vec{k}) & -\Delta(\vec{k}) \end{pmatrix}$$

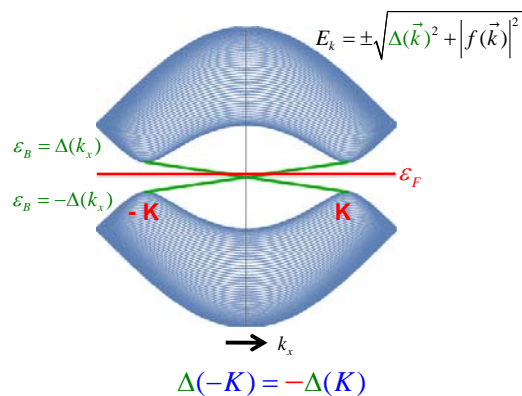


Isolant "topologique"

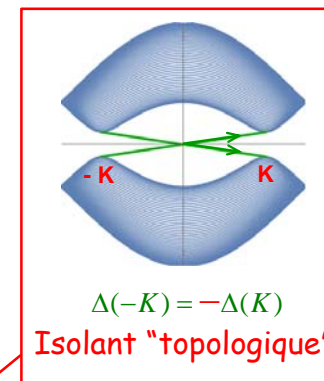
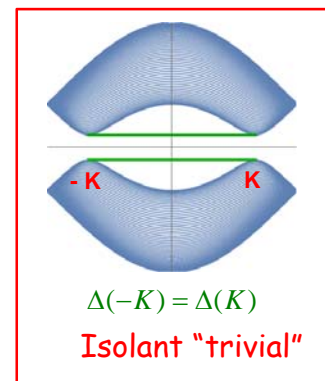


Haldane : changer le signe du gap entre K et -K

$$H_{\vec{k}} = - \begin{pmatrix} A & B \\ \Delta(\vec{k}) & f(\vec{k}) \\ f^*(\vec{k}) & -\Delta(\vec{k}) \end{pmatrix}$$

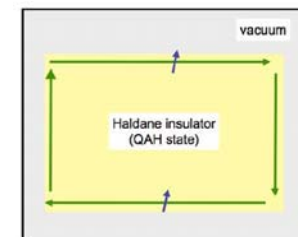


Le spectre en volume est inchangé mais il y a deux états de bord dispersifs, topologiquement protégés.

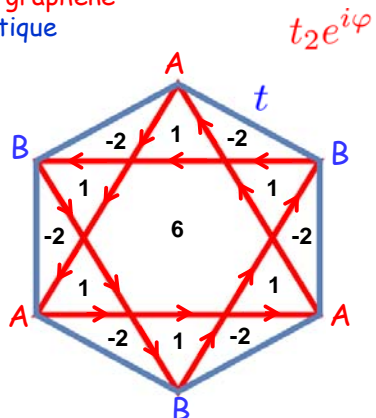
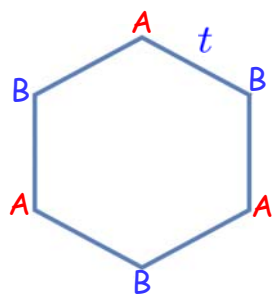


$\exists$  un état de bord chiral protégé topologiquement

$$\sigma_H = \frac{e^2}{h}$$



Modèle de Haldane (1988), variante du graphène  
Effet Hall quantique sans champ magnétique



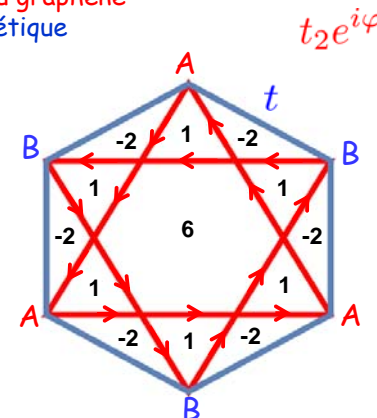
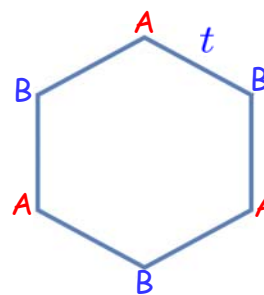
$$H_{\vec{k}} = - \begin{pmatrix} A & B \\ \Delta & f(\vec{k}) \\ f^*(\vec{k}) & -\Delta \end{pmatrix}$$

$$H_{\vec{k}} = - \begin{pmatrix} A & B \\ \Delta(\vec{k}) & f(\vec{k}) \\ f^*(\vec{k}) & -\Delta(\vec{k}) \end{pmatrix}$$

Le gap change de signe entre les points K et K'

$$\Delta(\vec{k}) = \Delta - 2t_2 a(\vec{k}) \sin \varphi$$

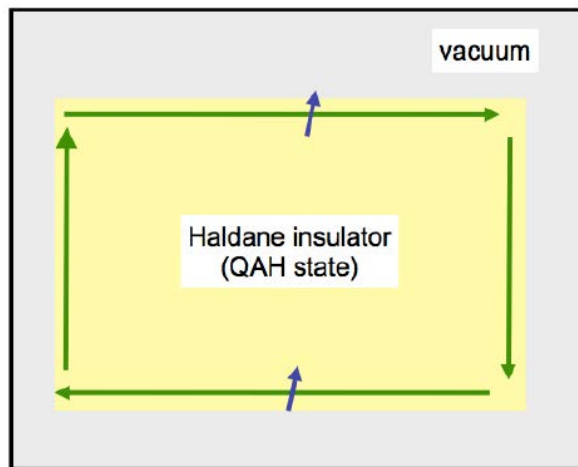
Modèle de Haldane (1988), variante du graphène  
Effet Hall quantique sans champ magnétique



$$H_{\vec{k}} = - \begin{pmatrix} A & B \\ \Delta & f(\vec{k}) \\ f^*(\vec{k}) & -\Delta \end{pmatrix}$$

Pas de champ magnétique, mais brisure d'invariance par renversement du temps

→ Effet Hall quantifié



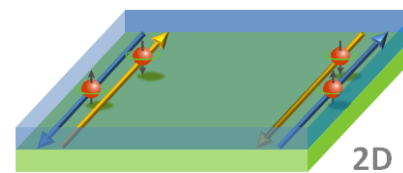
∃ un état de bord chiral protégé topologiquement sans champ magnétique,

Mais on a brisé l'invariance par renversement du temps

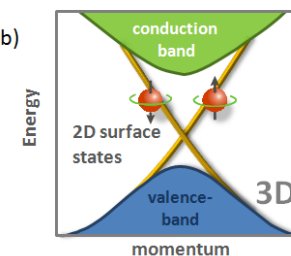
## Les isolants topologiques

(2005)

a)



b)



C. Kane and E.J. Mele, Quantum spin Hall effect in graphene (PRL 2005)

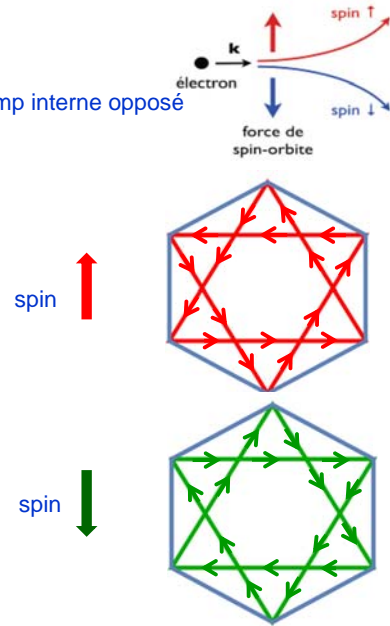
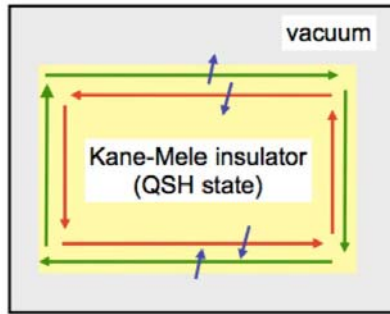


C. Kane and E.J. Mele, Quantum spin Hall effect in graphene (PRL 2005)

Nouvel ingrédient : le couplage spin-orbite

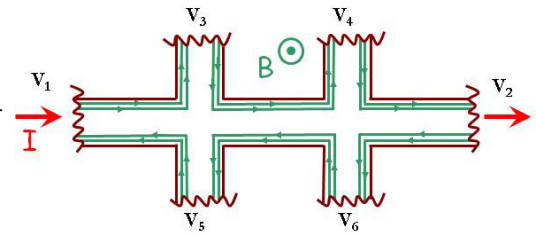
Les électrons de spin opposé « voient » un champ interne opposé

→ Deux copies du modèle de Haldane  
Le couplage spin-orbite ne brise pas l'invariance par renversement du temps



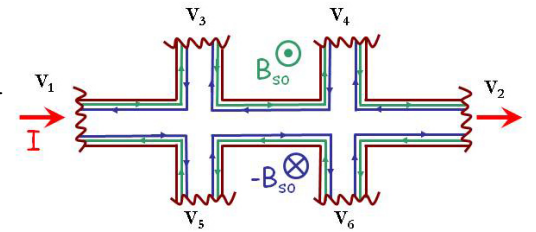
Effet Hall quantique

Les états de spin + ou - se déplacent dans la même direction



Effet Hall quantique de spin

Les états de spin + ou - se déplacent dans des directions opposées

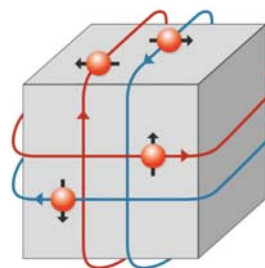
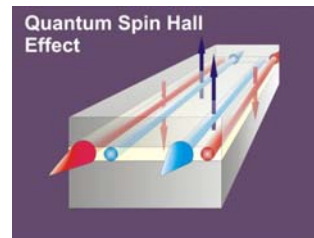
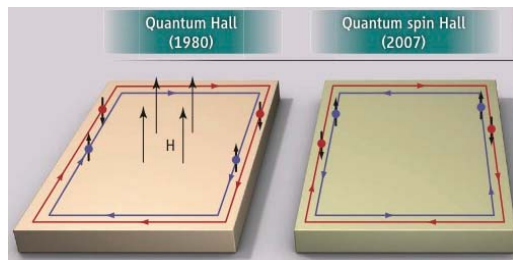


Science, 766, 318 (2007)

L'effet Hall quantique de spin 2006 - 2007

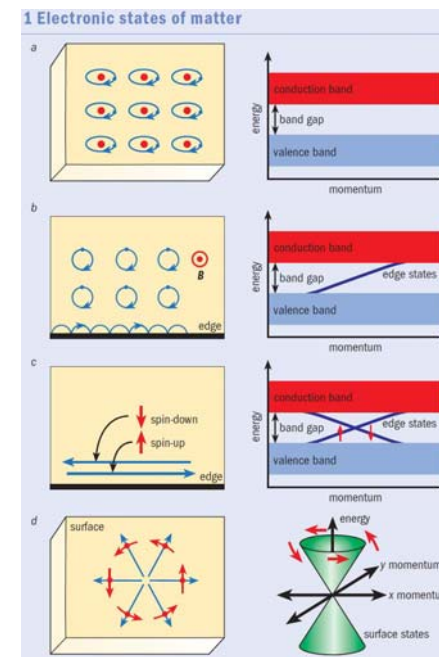
Pas de champ magnétique, mais couplage spin-orbite

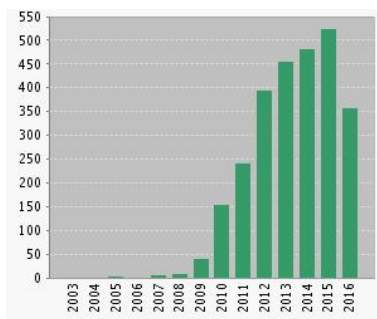
Les états de spin + ou - se déplacent dans des directions opposées



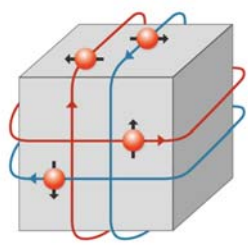
Isolants topologiques 3D 2007 .....

Isolants en volume, états conducteurs en surface topologiquement protégés





« Topological insulator »



LAURENS MOLENKAMP

