

1. Struttura di Flavour del Modello Standard e matrice CKM

Punto di partenza per il nostro studio è la lagrangiana che descrive le interazioni elettrodeboli dei fermioni:

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{g_2}{\sqrt{2}} (W_\mu^+ J_{ch}^\mu + W_\mu^- J_{ch}^{\mu\dagger}) - g_1 \cos \theta_w A_\mu J_{em}^\mu - \frac{g_2}{2 \cos \theta_w} Z_\mu J_{neutral}^\mu$$

dove le correnti sono date da

$$J_{em}^\mu = -\bar{e}'_{Li} \gamma^\mu e'_{Li} - \bar{e}'_{Ri} \gamma^\mu e'_{Ri} + \frac{2}{3} \bar{u}'_{Li} \gamma^\mu u'_{Li} + \frac{2}{3} \bar{u}'_{Ri} \gamma^\mu u'_{Ri} + \\ -\frac{1}{3} \bar{d}'_{Li} \gamma^\mu d'_{Li} - \frac{1}{3} \bar{d}'_{Ri} \gamma^\mu d'_{Ri}$$

$$J_{ch}^\mu = \bar{\nu}'_{Li} \gamma^\mu e'_{Li} + \bar{u}'_{Li} \gamma^\mu d'_{Li}$$

$$J_{neutral}^\mu = g_L^{(\nu)} \bar{\nu}'_{Li} \gamma^\mu \nu'_{Li} + g_L^{(e)} \bar{e}'_{Li} \gamma^\mu e'_{Li} + g_R^{(e)} \bar{e}'_{Ri} \gamma^\mu e'_{Ri} + g_L^{(u)} \bar{u}'_{Li} \gamma^\mu u'_{Li} + \\ g_R^{(u)} \bar{u}'_{Ri} \gamma^\mu u'_{Ri} + g_L^{(d)} \bar{d}'_{Li} \gamma^\mu d'_{Li} + g_R^{(d)} \bar{d}'_{Ri} \gamma^\mu d'_{Ri}$$

dove $\Psi_{LR} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mp \gamma_5 \end{pmatrix} \Psi$,

$$\frac{g^{(f)}}{2} = T_3 - Q \sin^2 \theta_w$$

$$g_L^{(\nu)} = 1$$

$$g_L^{(e)} = -1 + 2 \sin^2 \theta_w$$

$$g_R^{(e)} = 2 \sin^2 \theta_w$$

$$g_L^{(u)} = 1 - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_w$$

$$g_R^{(u)} = -\frac{4}{3} \sin^2 \theta_w$$

$$g_L^{(d)} = -1 + \frac{2}{3} \sin^2 \theta_w$$

$$g_R^{(d)} = \frac{2}{3} \sin^2 \theta_w$$

e si ha

$$e = g_1 \cos \theta_w = g_2 \sin \theta_w.$$

I campi primari indicano gli autostati delle interazioni deboli.

Consideriamo ora gli accoppiamenti di Yukawa:

$$-d_Y = Y_u^{ij} \bar{Q}'_{Li} \tilde{H}^\bullet u'_{Rj} + Y_d^{ij} \bar{Q}'_{Li} H d'_{Rj} + Y_e^{ij} \bar{L}'_{Li} H e'_{Rj} + h.c.$$

dove $Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$, $L_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$ e $\tilde{H}^\bullet = i\sigma_2 H^*$.

Sostituendo $\langle H \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, otteniamo

$$(M'_F)_{ij} = \frac{v}{\sqrt{2}} Y_F^{ij}$$

Per passare alla base degli autostati di massa, dobbiamo

diagonalizzare le matrici M' . Consideriamo allora

$M' M'^{\dagger}$: questa è una matrice hermitiana che può essere

diagonalizzata con una matrice unitaria:

$$U_L^{\dagger} M' M'^{\dagger} U_L = M^2 = \text{diag}(M_1^2, M_2^2, M_3^2)$$

Analogamente,

$$U_R^{\dagger} M' M'^{\dagger} U_R = M^2 = \text{diag}(M_1^2, M_2^2, M_3^2).$$

Abbiamo allora

$$U_L^{\dagger} M' U_R = M = \text{diag}(M_1, M_2, M_3).$$

possiamo dunque scrivere

$$-L_M = \bar{u}'_{Li} M'_{ij} u'_{Rj} + \bar{d}'_{Li} M'_{ij} d'_{Rj} + \bar{e}'_{Li} M'_{ij} e'_{Rj} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \bar{u}_L' U_L^u U_L^{u\dagger} M_u' U_R^u U_R^{u\dagger} u_R' + \bar{d}_L' U_L^d U_L^{d\dagger} M_d' U_R^d U_R^{d\dagger} d_R' + \bar{e}_L' U_L^e U_L^{e\dagger} M_e' U_R^e U_R^{e\dagger} e_R' \\
 &= \bar{u}_L M_u^{ij} u_{Rj} + \bar{d}_L M_d^{ij} d_{Rj} + \bar{e}_L M_e^{ij} e_{Rj}
 \end{aligned}$$

con $M_u^{ij} = \text{diag}(m_u, m_c, m_t)$, $M_d^{ij} = \text{diag}(m_d, m_s, m_b)$,
 $M_e^{ij} = \text{diag}(m_e, m_\mu, m_\tau)$

e $u_{R,L} = U_{R,L}^u u_{R,L}'$, $d_{R,L} = U_{R,L}^d d_{R,L}'$, $e_{R,L} = U_{R,L}^e e_{R,L}'$.

Risprimiamo ora le interazioni con i bosoni di gauge elettrodeboli in termini degli autostati di massa:

$$\begin{aligned}
 J_{em}^\mu &= -\bar{e}_L U_L^{e\dagger} \gamma^\mu U_L^e e_L - \bar{e}_R U_R^{e\dagger} \gamma^\mu U_R^e e_R + \frac{2}{3} \bar{u}_L U_L^{u\dagger} \gamma^\mu U_L^u u_L + \\
 &+ \frac{2}{3} \bar{u}_R U_R^{u\dagger} \gamma^\mu U_R^u u_R - \frac{1}{3} \bar{d}_L U_L^{d\dagger} \gamma^\mu U_L^d d_L - \frac{1}{3} \bar{d}_R U_R^{d\dagger} \gamma^\mu U_R^d d_R = \\
 &= -\bar{e}_L \gamma^\mu e_L - \bar{e}_R \gamma^\mu e_R + \frac{2}{3} \bar{u}_L \gamma^\mu u_L + \frac{2}{3} \bar{u}_R \gamma^\mu u_R - \frac{1}{3} \bar{d}_L \gamma^\mu d_L - \frac{1}{3} \bar{d}_R \gamma^\mu d_R;
 \end{aligned}$$

analogamente,

$$\begin{aligned}
 J_{neutral}^\mu &= g_L^{(u)} \bar{u}_L \gamma^\mu u_L + g_L^{(e)} \bar{e}_L \gamma^\mu e_L + g_R^{(e)} \bar{e}_R \gamma^\mu e_R + g_L^{(u)} \bar{u}_L \gamma^\mu u_L + \\
 &+ g_R^{(u)} \bar{u}_R \gamma^\mu u_R + g_L^{(d)} \bar{d}_L \gamma^\mu d_L + g_R^{(d)} \bar{d}_R \gamma^\mu d_R
 \end{aligned}$$

Viceversa, per le correnti cariche abbiamo

$$J_{ch}^\mu = \bar{u}_L U_L^{u\dagger} \gamma^\mu U_L^u e_L + \bar{u}_L U_L^{u\dagger} \gamma^\mu U_L^d d_L \equiv \bar{u}_L V_{em}^{\mu NS} e_L + \bar{u}_L V_{em} \gamma^\mu d_L$$

dove ho considerato il caso più generale di neutrini massivi.

Si ha $V^{MNS} = U_L^{u\dagger} U_L^e$ e $V_{CKM} = U_L^{u\dagger} U_L^d$ Matrici unitarie.

Per i neutrini è conveniente usare la base

$$\tilde{\nu}_L = V^{MNS\dagger} \nu_L,$$

in modo tale che

$$J_{ch}^M = \tilde{\nu}_L^\dagger \gamma^M e_L + \bar{u}_L V_{CKM} \gamma^M d_L.$$

Per neutrini degeneri, si ha $\tilde{M} = M V^{MNS} \mathbb{1} V^{MNS\dagger} = M \mathbb{1}$.

Altrimenti, si hanno oscillazioni di neutrini.

Concentriamoci ora nel settore dei quark. *

Torniamo un momento agli accoppiamenti di Yukawa:

$$-L_Y^q = Y_u^{ij} \bar{Q}_{L_i} \tilde{H} u_{R_j} + Y_d^{ij} \bar{Q}_{L_i} H d_{R_j} + h.c.$$

Ora, sotto CP, $Y_u^{ij} \bar{Q}_{L_i} \tilde{H} u_{R_j} \rightarrow \bar{u}_{R_j} \tilde{H}^\dagger Q_{L_i} Y_u^{ij}$

Perch' L_Y^q e' invariante sotto CP $\Leftrightarrow Y_{u,d}^{ij}$ sono REALI.

D'altro canto, quante sono le fasi indipendenti in $Y_{u,d}$?

$Y_{u,d}$ 3x3 complessa \Rightarrow 9 parametri reali e 9 fasi.

Dunque L_Y^q contiene 18 parametri reali e 18 fasi.

Tuttavia, per $Y_{u,d} = 0$, il Modello Standard ha una simmetria

$$U(3)_{Q_L} \otimes U(3)_{u_R} \otimes U(3)_{d_R}.$$

Dunque, posso effettuare una trasformazione di $U(3)^3$, che ha $3 \times 3 = 9$ angoli e $6 \times 3 = 18$ fasi. Poiche' pero' anche per $Y_{u,d} \neq 0$

rimane una simmetria $U(1)_B$, corrispondente alla ¹⁻⁵₍₂₆₎ conservazione del numero barionico, con la trasformazione di $U(3)^3$ possono riassorbire solo 17 fasi.

Concludo perciò che negli accoppiamenti di Yukawa vi sono $18-9=9$ parametri reali e 1 fase (che viola CP).

Nella base degli autostati di massa, ciò corrisponde alle 6 masse dei quark, e ai 3 angoli + 1 fase presenti nella matrice V_{CKM} .

Per il motivo esposto in precedenza, 5 delle 6 fasi della matrice unitaria V_{CKM} possono essere eliminate. Rimane però arbitraria la posizione della fase nella matrice. Ad esempio, nella parametrizzazione di Wolfenstein di V_{CKM} , si ha

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + O(\lambda^4).$$

Tuttavia, la fisica deve essere indipendente dalla parametrizzazione, ed è possibile definire una quantità invariante che "misura" la violazione di CP nel modello Standard:

$$J_{CP} = \text{Im} [V_{ij} V_{kl} V_{il}^* V_{kj}^*].$$

J_{CP} è legato all'area del Triangolo unitario definito ad esempio dalla relazione di unitarietà

$$V_{ud} V_{ub}^* + V_{cd} V_{cb}^* + V_{td} V_{tb}^* = 0$$

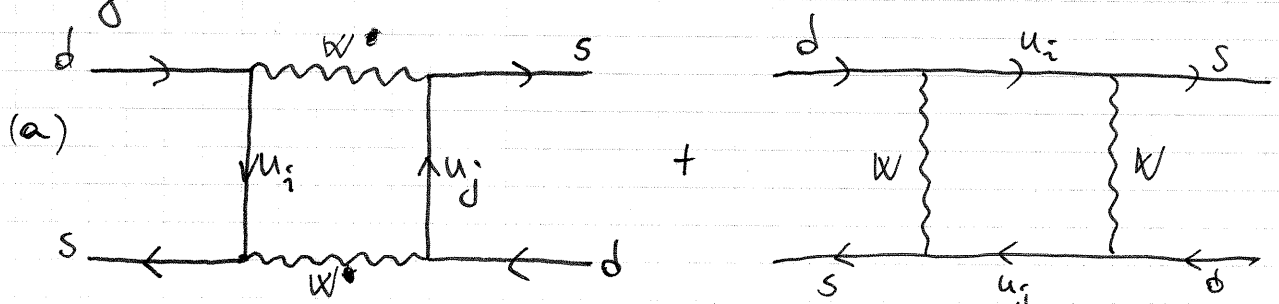
2. Correnti Neutre con Cambiamento di Sapore nel Modello Standard - Generalità ed Hamiltoniane Efficaci.

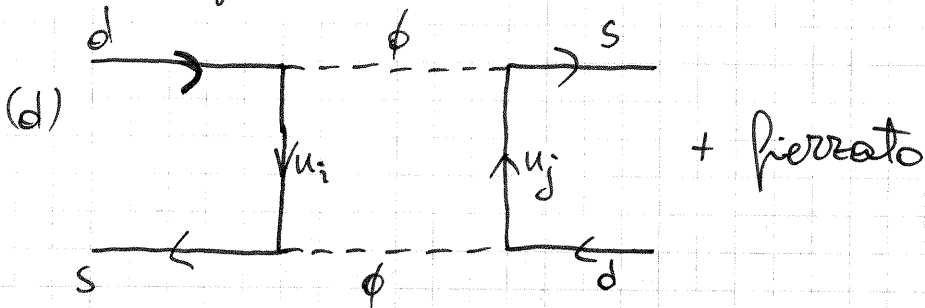
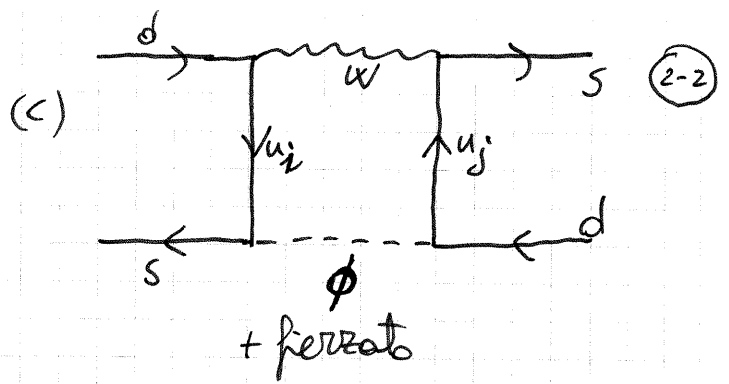
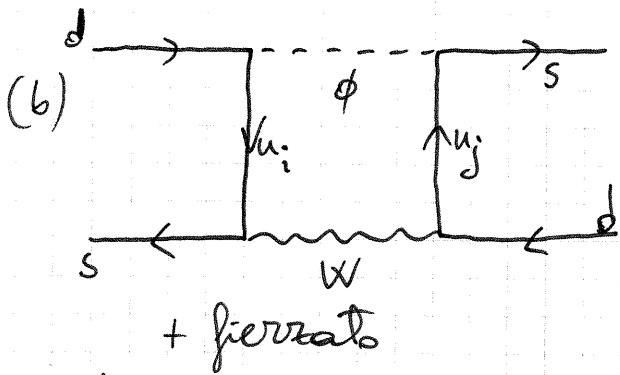
Come abbiamo visto in precedenza, nel Modello Standard al tree level non vi sono accoppiamenti di corrente neutra con cambiamento di sapore. Viceversa, la matrice CKM presente nei vertici di corrente carica induce una violazione del sapore. E' dunque chiaro che al secondo ordine nelle interazioni deboli potremo ottenere delle transizioni di corrente neutra con cambiamento di sapore componendo due vertici di corrente carica.

Vogliamo ora discutere due caratteristiche di questi processi che sono di fondamentale importanza fenomenologica: la soppressione dovuta all'unitarietà della matrice CKM (meccanismo GIM), e la possibilità di calcolare queste transizioni utilizzando degli operatori locali di dimensione ≥ 4 , dovuta al fatto che i bosoni W sono molto più pesanti delle tipiche scale adroniche (M_π, M_K, M_D, M_B).

Come primo esempio, consideriamo l'ampiezza di transizione $\Delta S=2$ $\bar{s}d \rightarrow \bar{d}s$. Non essendovi un accoppiamento tree-level $\bar{s}d$, dovremo considerare diagrammi di loop.

Nella gauge di 't-Hooft-Feynman, abbiamo i seguenti diagrammi:

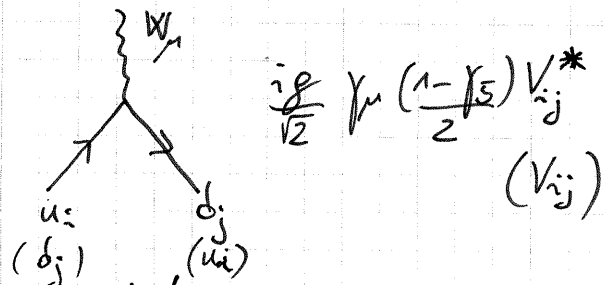




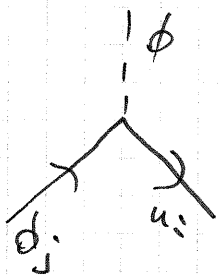
le regole di Feynman sono:

$W \rightsquigarrow \frac{-i g^{\mu\nu}}{k^2 - M_W^2 + i\epsilon}$

$\phi \text{ --- } \frac{i}{k^2 - M_\phi^2 + i\epsilon}$



$\frac{i g}{\sqrt{2}} \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) V_{ij}^*$
(V_{ij})



$V_{ij} \left(\frac{-i g}{\sqrt{2} M_W} \right) \left[M_{d_j} P_R - M_{u_i} P_L \right]$
 $V_{ij}^* \left(\frac{-i g}{\sqrt{2} M_W} \right) \left[M_{d_j} \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) - M_{u_i} \left(\frac{1+\gamma_5}{2} \right) \right]$

Cominciamo dal diagramma (a). Abbiamo

$$\int \bar{u}_s \left(\frac{i g}{\sqrt{2}} \right) \gamma^\mu P_L V_{js}^* \frac{i}{p - M_{W_j}} \left(\frac{i g}{\sqrt{2}} \right) \gamma^\nu P_L V_{jd} u_d \bar{u}_s \gamma^\nu P_L \frac{i}{p - M_{u_i}} \left(\frac{i g}{\sqrt{2}} \right) V_{is} \left(\frac{i g}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\gamma^\mu P_L V_{id} u_d \left(\frac{-i}{p^2 - M_W^2} \right)^2 \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$$

Trascurando i momenti esterni.

Razionalizzando i propagatori si vede che i proiettori ucidono i contributi delle masse dei quark a numeratore. L'integrale è dunque

$$I_{\alpha\beta}^{ij} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p_\alpha p_\beta}{(p^2 - M_W^2)^2 (p^2 - m_{u_i}^2) (p^2 - m_{u_j}^2)}$$

Ora, $\frac{1}{p^2 - m_{u_i}^2} - \frac{1}{p^2 - m_{u_j}^2} = \frac{m_{u_i}^2 - m_{u_j}^2}{(p^2 - m_{u_i}^2)(p^2 - m_{u_j}^2)}$ per cui

$$I_{\alpha\beta}^{ij} = \frac{1}{m_{u_i}^2 - m_{u_j}^2} (I_{\alpha\beta}^i - I_{\alpha\beta}^j)$$

con $I_{\alpha\beta}^i = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p_\alpha p_\beta}{(p^2 - M_W^2)^2 (p^2 - m_{u_i}^2)} = \frac{g_{\alpha\beta}}{4} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^2}{(p^2 - M_W^2)^2 (p^2 - m_{u_i}^2)} =$ add and subtract $m_{u_i}^2$

$$= \frac{g_{\alpha\beta}}{4} m_{u_i}^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - M_W^2)^2 (p^2 - m_{u_i}^2)} + \text{indip. da } m_{u_i}^2$$

Ora, $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - M_W^2)^2 (p^2 - m_{u_i}^2)} = 2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{x}{[(p^2 - M_W^2)x + (p^2 - m_{u_i}^2)(1-x)]^3} =$

(essendo $\frac{1}{a^u b} = u \int_0^1 dx \frac{x^{u-1}}{[(1-x)b + xa]^{u+1}}$)

$$= 2 \int_0^1 x dx \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - M_W^2 x - m_{u_i}^2 (1-x))^3} = 2i \frac{2\pi^2}{16\pi^4} \int_0^1 x dx \int \frac{p^3 dp}{(p^2 - M_W^2 x - m_{u_i}^2 (1-x))^3} =$$

$$= \frac{-i}{4\pi^2} \int_0^1 x dx \frac{1}{2} \int \frac{p^3 dp^2}{(p^2 + C)^3} \quad C = M_W^2 x + m_{u_i}^2 (1-x)$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{p^3 dp^2}{(p^2 + C)^3} = -\frac{1}{4} \frac{p^2}{(p^2 + C)^2} \Big|_0^\infty + \frac{1}{4} \int \frac{dp^2}{(p^2 + C)^2} = \frac{1}{4} \int \frac{dy}{(y+C)^2} = -\frac{1}{4} \frac{1}{y+C} \Big|_0^\infty = +\frac{1}{4C}$$

$$\Rightarrow \frac{-i}{16\pi^2} \int_0^1 \frac{x dx}{M_W^2 x + m_{u_i}^2 (1-x)} = -\frac{i}{16\pi^2 M_W^2} \int_0^1 \frac{x dx}{x + x_i (1-x)} = -\frac{i}{16\pi^2 M_W^2} \int_0^1 \frac{x dx}{(1-x_i)x + x_i}$$

Ora, $\int_0^1 \frac{x dx}{(1-x_i)x + x_i} =$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{1-x_i} \left[\frac{(1-x_i)x + k_i - x_i}{(1-x_i)x + k_i} \right] = -\frac{x_i}{1-x_i} \int_0^1 \frac{dx}{(1-x_i)x + k_i} + \frac{1}{1-x_i} = \quad (2-4)$$

$$= \frac{1}{1-x_i} - \frac{x_i}{1-x_i} \frac{1}{1-x_i} \log((1-x_i)x + k_i) \Big|_0^1 = \frac{1}{1-x_i} + \frac{k_i \log x_i}{(1-x_i)^2}$$

Dunque, a meno di termini indipendenti da $m_{u_i}^2$, si ha

$$I_{\alpha\beta}^i = \frac{g_{\alpha\beta}}{4} \frac{m_{u_i}^2}{M_W^2} \left(\frac{-i}{16\pi^2} \right) \left(\frac{1}{1-x_i} + \frac{k_i \log x_i}{(1-x_i)^2} \right) = -\frac{g_{\alpha\beta}}{4} \frac{i}{16\pi^2}$$

$$\cdot \left(\frac{x_i}{1-x_i} + \frac{k_i^2 \log x_i}{(1-x_i)^2} \right) = -\frac{g_{\alpha\beta}}{4} \frac{i}{16\pi^2} J(x_i)$$

$$\text{con } J(x_i) = \frac{x_i}{1-x_i} + \frac{k_i^2 \log x_i}{(1-x_i)^2} \quad \text{e} \quad k_i = \frac{m_{u_i}^2}{M_W^2}$$

Otteniamo allora

$$I_{\alpha\beta}^{ij} = -\frac{g_{\alpha\beta}}{4M_W^2} \frac{i}{16\pi^2} A(x_i, x_j)$$

$$\text{con } A(x_i, x_j) = \frac{J(x_i) - J(x_j)}{x_i - x_j}$$

Guardiamo ora la struttura di Dirac:

$$\bar{u}_s \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu P_L v_\delta \bar{v}_s \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\mu P_L u_d \quad *$$

Proviamo a semplificarla usando l'identità:

$$\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu = g^{\mu\alpha} \gamma^\nu + g^{\nu\alpha} \gamma^\mu - g^{\mu\nu} \gamma^\alpha - i \epsilon^{\mu\alpha\nu\beta} \gamma_5 \gamma_\beta$$

ottenendo

$$\bar{u}_s \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu P_L v_\delta \bar{v}_s (g^{\mu\alpha} \gamma^\nu + g^{\nu\alpha} \gamma^\mu - g^{\mu\nu} \gamma^\alpha + i \epsilon^{\mu\alpha\nu\beta} \gamma_5 \gamma_\beta) P_L u_d =$$

$$= 4 \bar{u}_s \gamma_\nu P_L v_\delta \bar{v}_s \gamma^\nu P_L u_d + 4 \bar{u}_s \gamma_\mu P_L v_\delta \bar{v}_s \gamma^\mu P_L u_d + 2 \bar{u}_s \gamma_\alpha P_L v_\delta \bar{v}_s \gamma^\alpha P_L u_d +$$

$$+ i \bar{u}_s \epsilon^{\mu\kappa\nu\beta} \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu P_L v_d \bar{v}_s \gamma_5 \gamma_\beta P_L u_d$$

usando che $\epsilon_{\mu\alpha\nu\gamma} \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu = -i \epsilon_{\mu\alpha\nu\gamma} \epsilon^{\mu\kappa\nu\beta} \gamma_5 \gamma_\beta = +6i \delta_\gamma^\beta \gamma_5 \gamma_\beta = 6i \gamma_5 \gamma_\beta$

otteniamo

$$10 \bar{u}_s \gamma_\mu P_L v_d \bar{v}_s \gamma^\mu P_L u_d - 6 \bar{u}_s \gamma_\mu \gamma_5 P_L v_d \bar{v}_s \gamma^\mu \gamma_5 P_L u_d$$

Ora, $\gamma_5 P_L = \gamma_5 \frac{1-\gamma_5}{2} = \frac{\gamma_5 - 1}{2} = -P_L$ per definizione di proiettore left-handed, e dunque abbiamo infine

$$4 \bar{u}_s \gamma_\mu P_L v_d \bar{v}_s \gamma^\mu P_L u_d.$$

L'ampiezza di transizione generata da questo diagramma è dunque

$$i T^{(a)}(\bar{s}d \rightarrow \bar{d}s) = - \frac{i}{16\pi^2} 4 \frac{g^4}{16M_W^2} \sum_{i,j=u,c,t} V_{is}^* V_{id} V_{js}^* V_{jd} A(x_i, x_j) \bar{u}_s \gamma_\mu P_L v_d \bar{v}_s \gamma^\mu P_L u_d$$

$$= - i \frac{G_F^2 M_W^2}{2\pi^2} \bar{u}_s \gamma_\mu P_L v_d \bar{v}_s \gamma^\mu P_L u_d \sum_{i,j} V_{is}^* V_{id} V_{js}^* V_{jd} A(x_i, x_j) =$$

$$= - i \frac{G_F^2 M_W^2}{2\pi^2} \bar{u}_s \gamma_\mu P_L v_d \bar{v}_s \gamma^\mu P_L u_d \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j A(x_i, x_j)$$

dove $\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2}$ è la costante di Fermi e $\lambda_i \equiv V_{is}^* V_{id}$.

Il secondo diagramma in fig. (a) è identico al primo (scambiando gli spinori di quark d con una trasformazione di Fourier):

$$i T^{(a')}(\bar{s}d \rightarrow \bar{d}s) = + i \frac{G_F^2 M_W^2}{2\pi^2} \bar{u}_s \gamma_\mu P_L u_d \bar{v}_s \gamma^\mu P_L v_d \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j A(x_i, x_j)$$

Ora notiamo che queste ampiezze di transizione possono essere espresse come elementi di matrice di una hamiltoniana efficace.

(Nota: $[\gamma^\mu P_L]_{\alpha\beta} [\gamma_\mu P_L]_{\gamma\delta} = -[\gamma^\mu P_L]_{\alpha\delta} [\gamma_\mu P_L]_{\gamma\beta}$)

Consideriamo infatti il seguente vertice efficace:

$$H_{\text{eff}}^{\Delta S=2} = C \bar{s} \gamma^\mu P_L d \bar{s} \gamma_\mu P_L d$$

costituito da un coefficiente (detto coefficiente di Wilson) numerico per un operatore locale di dimensione 6. E' dunque chiaro che C dovrà avere dimensioni M^{-2} .

Qual è l'ampiezza di Transizione indotta da H_{eff} ?

$$\begin{aligned} i T^H(\bar{s}d \rightarrow \bar{d}s) &= -i \langle \bar{d}s | \bar{s} \gamma^\mu P_L d \bar{s} \gamma_\mu P_L d | \bar{s}d \rangle = \\ &= -i C \left[\bar{u}_s \gamma^\mu P_L v_d \bar{v}_s \gamma_\mu P_L u_d + \bar{u}_s \gamma^\mu P_L u_d (-1) \bar{v}_s \gamma_\mu P_L v_d \right] = \\ &= -2i C \left[\bar{u}_s \gamma^\mu P_L v_d \bar{v}_s \gamma_\mu P_L u_d - \bar{u}_s \gamma^\mu P_L u_d \bar{v}_s \gamma_\mu P_L v_d \right] \end{aligned}$$

Confrontandola con $i T^{(a+a')}(\bar{s}d \rightarrow \bar{d}s)$, otteniamo che

$$C = \frac{G_F^2 M_W^2}{4\pi^2} \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j A(x_i, x_j).$$

Analogamente si ottiene

$$C^{(b)} = -\frac{G_F^2 M_W^2}{4\pi^2} \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j A'(x_i, x_j) x_i x_j = C^{(c)}$$

$$e C^{(d)} = \frac{1}{4} \frac{G_F^2 M_W^2}{4\pi^2} \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j x_i x_j A(x_i, x_j)$$

$$\text{con } A'(x_i, x_j) = \frac{J'(x_i) - J'(x_j)}{x_i - x_j} \quad e \quad J'(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{x \ln x}{(1-x)^2}.$$

Sommando sui 4 contributi si ha infine

$$C = \frac{G_F^2 M_W^2}{4\pi^2} \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \bar{A}(x_i, x_j)$$

$$\text{con } \bar{A}(x_i, x_j) = A(x_i, x_j) - x_i x_j A'(x_i, x_j) + \frac{1}{4} x_i x_j A(x_i, x_j).$$

Per semplificare C, osserviamo che l'unitarietà della matrice CKM implica che

$$\lambda_u + \lambda_c + \lambda_t = V_{us}^* V_{ud} + V_{cs}^* V_{cd} + V_{ts}^* V_{td} = 0$$

Possiamo quindi sostituire $\lambda_u = -\lambda_c - \lambda_t$, ottenendo

$$\sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \bar{A}(x_i, x_j) = (\lambda_c + \lambda_t)^2 \bar{A}(x_u, x_u) + 2 \lambda_c \lambda_t \bar{A}(x_c, x_t) + \lambda_c^2 \bar{A}(x_c, x_c) + \lambda_t^2 \bar{A}(x_t, x_t) - 2 \lambda_t (\lambda_c + \lambda_t) \bar{A}(x_u, x_t) - 2 \lambda_c (\lambda_c + \lambda_t) \bar{A}(x_c, x_u) =$$

$$= \lambda_t^2 S_0(x_t) + \lambda_c^2 S_0(x_c) + 2 \lambda_c \lambda_t S_0(x_c, x_t)$$

dove

$$S_0(x_t) = \bar{A}(x_t, x_t) + \bar{A}(x_u, x_u) - 2 \bar{A}(x_u, x_t)$$

$$S_0(x_c) = \bar{A}(x_c, x_c) + \bar{A}(x_u, x_u) - 2 \bar{A}(x_u, x_c)$$

$$S_0(x_c, x_t) = \bar{A}(x_c, x_t) + \bar{A}(x_u, x_u) - \bar{A}(x_c, x_u) - \bar{A}(x_t, x_u)$$

Si ha dunque

$$H_{eff}^{OS=2} = \frac{G_F^2 M_W^2}{4\pi^2} \left[\lambda_t^2 S_0(x_t) + \lambda_c^2 S_0(x_c) + 2 \lambda_c \lambda_t S_0(x_c, x_t) \right] \bar{s}_\mu^i p_\nu^i d^j \bar{s}_\mu^j p_\nu^j d^i$$

Notiamo che in S_0 compaiono sempre differenze di \bar{A} con diversi argomenti. Se espandiamo \bar{A} in serie di potenze nelle masse dei quarks, il termine di ordine zero si cancella in S_0 .

Perciò, per quark massless non si generano vertici di corrente neutra con cambiamento di sapore, e questi vertici sono dunque soppressi da uno meccanismo di cancellazione (meccanismo GM).

Infatti si ha $S_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

Perché ad esempio $\kappa_c \sim \frac{(1.3)^2}{80^2} \sim \frac{1}{36}$, si vede che, trascurando l'effetto della Terra famiglia, l'accoppiamento efficace è proporzionale a

$$\frac{G_F^2 M_W^2}{4\pi^2} \sin^2 \theta_c \kappa_c \cos^2 \theta_c = \frac{G_F^2 M_c^2}{4\pi^2} \sin^2 \theta_c \cos^2 \theta_c,$$

In altre parole, il meccanismo GIM converte l'accoppiamento efficace $\frac{G_F^2 M_W^2}{4\pi^2} \rightarrow \frac{G_F^2 M_c^2}{4\pi^2}$.

Dunque, se in assenza di GIM l'accoppiamento efficace si sarebbe annullato come M_W^{-2} per $M_W \rightarrow \infty$, grazie a GIM la soppressione è $\sim M_W^{-4}$.

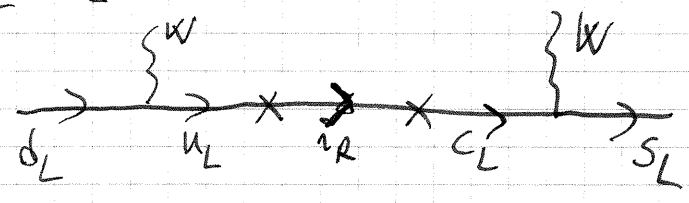
(Sempre grazie a GIM, effetti proporzionali ai momenti esterni entrano all'ordine M_W^{-6} .)

Si noti anche che non vi è decoupling dei fermioni nel Modello Standard: infatti non solo S_0 non si annulla per $\kappa \rightarrow \infty$, ma anzi cresce linearmente in κ ; ciò spiega la grande rilevanza del top anche nei processi di bassa energia. Il non-decoupling può essere compreso immediatamente ricordando che l'accoppiamento a ϕ^\pm è proporzionale alle masse dei fermioni.

Una comprensione intuitiva del meccanismo GIM si può avere utilizzando il metodo dell'inserzione di massa, che è di grande utilità anche nello studio delle estensioni del Modello Standard.

Questo consiste nel considerare le masse dei fermioni come perturbazioni nella teoria a massa nulla. In questo formalismo, la violazione all'ordine zero nelle masse, S_0 si annullerà per l'unitarietà di V : $2_d + 2_c + 2_e = 0$. D'altronde, una singola inserzione di massa non dà contributo nel limite a massa nulla:

del flavour viene generata direttamente dagli elementi fuori diagonale delle matrici di massa dei quarks. Avremo allora bisogno di due inserzioni di massa per generare una transizione $d_L \rightarrow s_L$:



e dunque sarà $\propto M_{u_i}^u M_{i_c}^{u+}$.

D'altro canto, abbiamo visto che le matrici di massa dei quarks vengono diagonalizzate da

$$U^+ M M^+ V = \text{diag}(m^2)$$

$$\Rightarrow (M M^+)_{uc} = (U^+ \text{diag}(m^2) V^+)_{uc} = \sum_i V_{id} V_{is}^* m_i^2 \quad *$$

Abbiamo dunque ottenuto immediatamente la dipendenza quadratica dalle masse dei quark.]

Riassumendo, abbiamo visto come l'ampiezza di transizione $5d \rightarrow d s$ di corrente neutra con cambiamento di sapore (FCNC) venga generata ad un loop nel modello standard, come il meccanismo GIM renda questa ampiezza proporzionale a $G_F^2 M_u^2$ e come questa possa essere interpretata come elemento di matrice di una Hamiltoniana Efficace locale. $D=8$

Vediamo ora brevemente quali sono gli effetti nella discussione precedente dell'inclusione delle correzioni di QCD.

Consideriamo ad esempio il seguente diagramma:

