1. Struttura di Flavour del Modello Standard e matrice CKM

Punto di partenza per il nostro studio è la lagrangiana che descrive le interazioni elettrodeboli dei fermioni:

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{g_2}{\sqrt{2}}\left(W_\mu^+ J_{ch}^\mu + W_\mu^- J_{ch}^{\mu +}\right) - g_1 \cos\theta_W A_\mu J_{em}^\mu - \frac{g_2}{2\cos\theta_W} Z^\mu J_\mu^{neutral}$$

dove le correnti sono date da

$$J_{em}^\mu = -\bar{e}'_{L_i}\gamma^\mu e'_{L_i} - \bar{e}'_{R_i}\gamma^\mu e'_{R_i} + \frac{2}{3}\bar{u}'_{L_i}\gamma^\mu u'_{L_i} + \frac{2}{3}\bar{u}'_{R_i}\gamma^\mu u'_{R_i} +$$
$$-\frac{1}{3}\bar{d}'_{L_i}\gamma^\mu d'_{L_i} - \frac{1}{3}\bar{d}'_{R_i}\gamma^\mu d'_{R_i}$$

$$J_{ch}^\mu = \bar{\nu}'_{L_i}\gamma^\mu e'_{L_i} + \bar{u}'_{L_i}\gamma^\mu d'_{L_i}$$

$$J^\mu_{neutral} = g_L^{(\nu)}\bar{\nu}'_{L_i}\gamma_\mu \nu'_{L_i} + g_L^{(e)}\bar{e}'_{L_i}\gamma_\mu e'_{L_i} + g_R^{(e)}\bar{e}'_{R_i}\gamma_\mu e'_{R_i} + g_L^{(u)}\bar{u}'_{L_i}\gamma_\mu u'_{L_i} +$$
$$g_R^{(u)}\bar{u}'_{R_i}\gamma_\mu u'_{R_i} + g_L^{(d)}\bar{d}'_{L_i}\gamma_\mu d'_{L_i} + g^{d}_{(R)}\bar{d}'_{R_i}\gamma^\mu d'_{R_i}$$

dove $\psi_{L/R} = \left(\frac{1\mp\gamma_5}{2}\right)\psi$, $\qquad \frac{g^{(f)}}{2} = T_3 - Q\sin^2\theta_W$

$g_L^{(\nu)} = 1$

$g_L^{(e)} = -1 + 2\sin^2\theta_W \qquad g_R^{(e)} = 2\sin^2\theta_W$

$g_L^{(u)} = 1 - \frac{4}{3}\sin^2\theta_W \qquad g_R^{(u)} = -\frac{4}{3}\sin^2\theta_W$

$g_L^{(d)} = -1 + \frac{2}{3}\sin^2\theta_W \qquad g_R^{(d)} = \frac{2}{3}\sin^2\theta_W$

e si ha $\quad e = g_1\cos\theta_W = g_2\sin\theta_W$.

I campi primati indicano gli autostati delle interazioni deboli.

Consideriamo ora gli accoppiamenti di Yukawa:

$$-\mathcal{L}_Y = Y_u^{ij}\, \bar{Q}'_{L_i}\, \tilde{H}\, u'_{R_j} + Y_d^{ij}\, \bar{Q}'_{L_i}\, H\, d'_{R_j} + Y_e^{ij}\, \bar{L}'_{L_i}\, H\, e'_{R_j} + h.c.$$

dove $Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$, $L_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$ e $\tilde{H} = i\sigma_2 H^*$.

Sostituendo $\langle H \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, otteniamo

$$(m'_F)_{ij} = \frac{v}{\sqrt{2}} Y_F^{ij}$$

Per passare alla base degli autostati di massa, dobbiamo diagonalizzare le matrici m'. Consideriamo allora $m' m'^\dagger$: questa è una matrice hermitiana che può essere diagonalizzata con una matrice unitaria:

$$U_L^\dagger m' m'^\dagger U_L = m^2 = \mathrm{diag}(m_1^2, m_2^2, m_3^2)$$

Analogamente,

$$U_R^\dagger m'^\dagger m' U_R = m^2 = \mathrm{diag}(m_1^2, m_2^2, m_3^2).$$

Abbiamo allora

$$U_L^\dagger m' U_R = m = \mathrm{diag}(m_1, m_2, m_3).$$

Possiamo dunque scrivere

$$-\mathcal{L}_M = \bar{u}'_{L_i}\, m'^u_{ij}\, u'_{R_j} + \bar{d}'_{L_i}\, m'^d_{ij}\, d'_{R_j} + \bar{e}'_{L_i}\, m'^e_{ij}\, e'_{R_j} =$$

$$= \bar{u}_L' U_L^u U_L^{u\dagger} m_u' U_R^u U_R^{u\dagger} u_R' + \bar{d}_L' U_L^d U_L^{d\dagger} m_d' U_R^d U_R^{d\dagger} d_R' + \bar{e}_L' U_L^e U_L^{e\dagger} m_e' U_R^e U_R^{e\dagger} e_R'$$

$$= \bar{u}_{L_i} m_u^{ij} u_{R_j} + \bar{d}_{L_i} m_d^{ij} d_{R_j} + \bar{e}_{L_i} m_e^{ij} e_{R_j}$$

con $m_u^{ij} = \mathrm{diag}(m_u, m_c, m_t)$, $m_d^{ij} = \mathrm{diag}(m_d, m_s, m_b)$,

$m_e^{ij} = \mathrm{diag}(m_e, m_\mu, m_\tau)$

e $u_{R,L} = U_{R,L}^{u\dagger} u'_{R,L}$, $d_{R,L} = U_{R,L}^{d\dagger} d'_{R,L}$, $e_{R,L} = U_{R,L}^{e\dagger} e'_{R,L}$.

Riesprimiamo ora le interazioni con i bosoni di gauge elettrodeboli in termini degli autostati di massa:

$$J^\mu_{em} = -\bar{e}_L U_L^{e\dagger} \gamma^\mu U_L^e e_L - \bar{e}_R U_R^{e\dagger} \gamma^\mu U_R^e e_R + \frac{2}{3} \bar{u}_L U_L^{u\dagger} \gamma^\mu U_L^u u_L +$$
$$+ \frac{2}{3} \bar{u}_R U_R^{u\dagger} \gamma^\mu U_R^u u_R - \frac{1}{3} \bar{d}_L U_L^{d\dagger} \gamma^\mu U_L^d d_L - \frac{1}{3} \bar{d}_R U_R^{d\dagger} \gamma^\mu U_R^d d_R =$$
$$= -\bar{e}_L \gamma^\mu e_L - \bar{e}_R \gamma^\mu e_R + \frac{2}{3} \bar{u}_L \gamma^\mu u_L + \frac{2}{3} \bar{u}_R \gamma^\mu u_R - \frac{1}{3} \bar{d}_L \gamma^\mu d_L - \frac{1}{3} \bar{d}_R \gamma^\mu d_R ;$$

analogamente,

$$J^\mu_{neutral} = g_L^{(\nu)} \bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L + g_L^{(e)} \bar{e}_L \gamma^\mu e_L + g_R^{(e)} \bar{e}_R \gamma^\mu e_R + g_L^{(u)} \bar{u}_L \gamma^\mu u_L +$$
$$+ g_R^{(u)} \bar{u}_R \gamma^\mu u_R + g_L^{(d)} \bar{d}_L \gamma^\mu d_L + g_R^{(d)} \bar{d}_R \gamma^\mu d_R$$

Viceversa, per le correnti cariche abbiamo

$$J^\mu_{ch} = \bar{\nu}_{L_i} U_L^{\nu\dagger} \gamma^\mu U_L^e e_L + \bar{u}_L U_L^{u\dagger} \gamma^\mu U_L^d d_L \equiv \bar{\nu}_L V^{MNS} \gamma_\mu e_L + \bar{u}_L V_{CKM} \gamma_\mu d_L$$

dove ho considerato il caso più generale di neutrini massivi.

Si ha $V^{MNS} = U_L^{\nu\dagger} U_L^e$ e $V_{CKM} = U_L^{u\dagger} U_L^d$ matrici unitarie.

Per i neutrini è conveniente usare la base

$$\tilde{\nu}_L = V^{MNS\dagger} \nu_L ,$$

in modo tale che

$$J^\mu_{ch} = \bar{\tilde{\nu}}_L \gamma^\mu e_L + \bar{u}_L V_{CKM} \gamma^\mu d_L .$$

Per neutrini degeneri, si ha $\tilde{m} = m V^{MNS} \mathbb{1} V^{MNS\dagger} = m \mathbb{1}$.

Altrimenti, si hanno oscillazioni di neutrini.

Concentriamoci ora sul settore dei quark. *

Torniamo un momento agli accoppiamenti di Yukawa:

$$-\mathcal{L}_Y^q = Y_u^{ij} \bar{Q}'_{L_i} \tilde{H} u'_{R_j} + Y_d^{ij} \bar{Q}'_{L_i} H d_{R_j} + h.c.$$

Ora, sotto CP, $Y_u^{ij} \bar{Q}'_{L_i} \tilde{H} u'_{R_j} \to \bar{u}'_{R_j} \tilde{H}^{\dagger} Q'_{L_i} Y_u^{ij}$

Perciò $\mathcal{L}_Y^q$ è invariante sotto CP $\iff$ $Y_{u,d}^{ij}$ sono REALI.

D'altro canto, quante sono le fasi indipendenti in $Y_{u,d}$?

$Y_{u,d}$ 3×3 complesse $\Rightarrow$ 9 parametri reali e 9 fasi.

Dunque $\mathcal{L}_Y^q$ contiene 18 parametri reali e 18 fasi.

Tuttavia, per $Y_{u,d} = 0$, il Modello Standard ha una simmetria

$$U(3)_{Q_L} \otimes U(3)_{u_R} \otimes U(3)_{d_R} .$$

Dunque, posso effettuare una trasformazione di $U(3)^3$, che ha $3\times3 = 9$ angoli e $6\times3 = 18$ fasi. Poiché però anche per $Y_{u,d} \neq 0$

rimane una simmetria $U(1)_B$, corrispondente alla conservazione del numero barionico, con la trasformazione di $U(3)^3$ posso riassorbire solo 17 fasi.

Concludo perciò che negli accoppiamenti di Yukawa vi sono $18-9=9$ parametri reali e 1 fase (che viola CP).

Nella base degli autostati di massa, ciò corrisponde alle 6 masse dei quark, e ai 3 angoli + 1 fase presenti nella matrice V_{CKM}.

Per il motivo esposto in precedenza, 5 delle 6 fasi della matrice unitaria V_{CKM} possono essere eliminate. Rimane però arbitraria la posizione della fase nella matrice. Ad esempio, nella parametrizzazione di Wolfenstein di V_{CKM}, si ha

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} 1-\frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1-\frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1-\rho-i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + O(\lambda^4).$$

Tuttavia, la fisica deve essere indipendente dalla parametrizzazione, ed è possibile definire una quantità invariante che "misura" la violazione di CP nel modello Standard:

$$J_{CP} \propto \operatorname{Im}[V_{ij} V_{kl} V_{il}^* V_{kj}^*]$$

J_{CP} è legato all'area del triangolo unitario definito ad esempio dalla relazione di unitarietà

$$V_{ud} V_{ub}^* + V_{cd} V_{cb}^* + V_{td} V_{tb}^* = 0$$