

* $\frac{J(x) - J(x_j)}{x_i - x_j}$ Trick was correct independent of GIM, mass-independent forms in J cancel in the difference but this has nothing to do with GIM; indeed, $A(x_i, x_j)$ has a smooth ~~limit~~ limit as $x_j \rightarrow x_i$.

* GIM suppression arises as a consequence of $\sum \lambda_i \lambda_j A(x_i, x_j)$. However, a priori one cannot guess the kind of GIM (power, log) without looking at the details of the amplitude. Indeed, suppression is not quadratic in x_i as one could naively expect from the double sum, but linear due to the IR sensitivity of the diagrams. Writing $\lambda_u = -\lambda_c - \lambda_t$ makes it explicit.

So far we have made ~~an~~ what might look as an academic exercise: what does K - T mixing do with a matrix element among zero-momentum quarks with no strong interactions? ~~Really interesting!~~ For vanishing momentum ~~the~~ a local operator is generated by construction. But this is a reasonable approximation only if q^2 dependence is negligible. Let's check that.

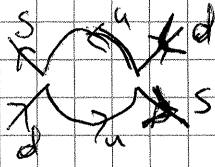
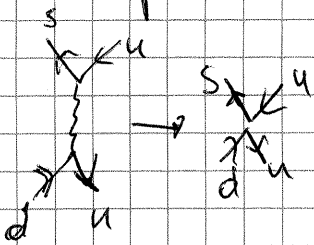
We have neglected external momenta in the evaluation of the diagrams. Is this justified?

- in diagrams containing the top quark, we are neglecting terms of $O\left(\frac{p^2}{m_t^2}, \frac{p^2}{M_W^2}\right) \Rightarrow$ OK

- in diagrams containing the charm quark, we are neglecting terms of $O\left(\frac{p^2}{m_c^2}\right) \sim O\left(\frac{M_W^2}{m_c^2}\right) \sim 15\% \Rightarrow$ relevant

- in diagrams containing the up quark, p^2 cannot be neglected - this is a ~~non~~ non-local contribution!

\Rightarrow ~~le~~ M_{12} gets large non-local contributions - need non-perturbative method to estimate them.



non-local contribution of two $\Delta S=1$ effective Hamiltonians

\Rightarrow $\ln M_{12}$ is however safe: since $\ln \lambda_t = -\ln \lambda_c$, we can write

$$\ln \lambda_t^2 = 2 \ln \lambda_t \operatorname{Re} \lambda_t$$

$$\ln \lambda_c^2 = -2 \ln \lambda_t \operatorname{Re} \lambda_t$$

$$\ln \lambda_t \lambda_c = \ln \lambda_t (\operatorname{Re} \lambda_t - \operatorname{Re} \lambda_t)$$

actually $\frac{\ln \lambda_t}{\lambda_t} = -\frac{\ln \lambda_c}{\lambda_c}$; overall $\arg \lambda_u$ irrelevant, so choose $\arg \lambda_u = 0$

$$\Rightarrow \frac{G_F^2 M_W^2}{2 \alpha^2} \ln \lambda_t (\operatorname{Re} \lambda_t (S_0(x_t) - S_0(x_t, x_c)) - \operatorname{Re} \lambda_c (S_0(x_c) - S_0(x_c, M_t)))$$

$$S_0(x_t) - S_0(x_t, x_c) = \bar{A}(x_c, M_t) + \bar{A}(x_u, x_u) - 2\bar{A}(x_t, x_u) - \bar{A}(x_t, x_c) - \bar{A}(x_t, M_t)$$

$$+ \bar{A}(x_c, x_u) + \bar{A}(x_t, M_t) = \bar{A}(x_t, M_t) - \bar{A}(x_c, M_t) + \bar{A}(x_t, x_c) + \bar{A}(x_c, x_u)$$

$$S_0(x_c) - S_0(x_t, x_c) = \bar{A}(x_c, x_c) + \bar{A}(x_u, M_t) - 2\bar{A}(x_c, M_t) - \bar{A}(x_t, M_t) - \bar{A}(x_t, x_c) + \bar{A}(x_c, x_c) - \bar{A}(x_t, x_u)$$

$$- \bar{A}(x_t, M_t) - \bar{A}(x_t, x_u) + \bar{A}(x_c, x_u) + \bar{A}(x_c, M_t) = \bar{A}(x_t, M_t) - \bar{A}(x_c, M_t) + \bar{A}(x_c, x_c) - \bar{A}(x_t, x_u)$$

quantive to $O\left(\frac{p^2}{m_c^2}\right)$

$$\text{Now, } S_0(x_E) - S_0(x_E, x_C) = \frac{M_U^2}{M_W^2} S_E(x_E, x_C)$$

$$S_0(x_C) - S_0(x_E, x_C) = \frac{M_U^2}{M_W^2} S_C(x_E, x_C)$$

So $\frac{p^2}{M_U^2}$ terms are relevant only in $S_0(x_C) - S_0(x_E, x_C)$.

These $\frac{p^2}{M_U^2}$ terms correspond to the matrix elements of $D=8$ operators.

To perform the matching, one expands the diagrams we computed at $\mathcal{O}\left(\frac{p^2}{M_U^2}\right)$. However, this is not enough since at $D=8$ there is one operator involving the commutator of two covariant derivatives,

$$g^2 S \cdot \gamma_L^\mu \tilde{G}_{\mu\nu} d \bar{\psi} \gamma_L^\nu d$$

which has vanishing matrix elements on 4-quark states, so this requires matching with a 4-quark + 1-gluon external state.

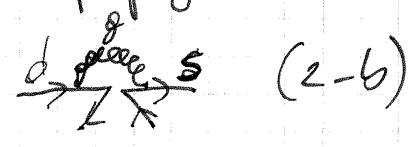
In this way one can estimate the ~~corrections~~ $\frac{M_U^2}{M_U^2}$ corrections to the $D=6$ contributions.

So ~~to~~ To summarize the expansion in local operators is safe up to few percent corrections in the charm contribution to $\text{Im } M_{12}$. On the other hand, $\text{Re } M_{12}$ is dominated by LD contributions.

Having established that the expansion in terms of local operators is meaningful and that we can stop at $D=6$, let us now discuss the effects of strong interactions.

Tale diagramma è $\propto \int \frac{d^4 p}{p^6}$ e dunque l'integrazione

nel loop che contiene il gluone è convergente. Tuttavia, cosa succede se proviamo a considerare il limite $M_W \rightarrow \infty$ e sostituiamo il propagatore del W con una interazione locale corrente-corrente?



Ora il diagramma presenta una divergenza logaritmica.

Il propagatore del W funge pertanto da "regolatore" del diagramma. Poiché per $M_W \rightarrow \infty$ compare una divergenza logaritmica, il risultato dovrà contenere un termine del tipo

$$\propto_S \ln \frac{M_W^2}{M_S^2}$$

che rappresenta una correzione grande, essendo per esempio

$$\ln \frac{M_W^2}{M_S^2} \approx 2 \ln 600 \approx 13.$$

Ci troviamo dunque di fronte alla presenza di grandi logaritmi dovuti alla diversità delle scale rilevanti per il processo: i momenti esterni $\sim M_X$ e la massa del W.

Occorre riassumere questi logaritmi per avere una teoria delle perturbazioni ~~usata~~.

Ciò può essere fatto facilmente usando le tecniche del gruppo di rinormalizzazione e l'Hamiltoniana efficace.

Infatti, il diagramma (2-a) nella teoria completa può essere visto come una regolarizzazione del diagramma (2-b) nella teoria efficace.

Ne segue che il coefficiente del $\log \frac{M_W}{\mu}$ è la dimensione anomala dell'operatore efficace $\bar{S} \gamma_\mu P_L d \bar{S} \gamma^\mu P_L d$. Questo può essere a mo

volta calcolata facilmente in regolarizzazione dimensionale, e la risommarione dei logaritmi avviene evolvendo il coefficiente di Wilson dalla scala $\mu_1 \sim M_W$ alla scala $\mu_2 \sim M_K$ con le equazioni del gruppo di rinormalizzazione. All'ordine leading,

$$C(\mu) = \left[\frac{\alpha_s(M_W)}{\alpha_s(\mu)} \right]^{f_0} C(M_W), \quad C(\mu) = U(\mu, \mu_W) C(M_W)$$

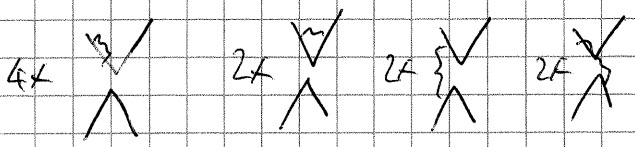
$$U(\mu, \mu_W) = e^{\int_{\mu_W}^{\mu} \frac{\beta(\mu)}{\mu} d\mu} \frac{\gamma_0(\mu)}{\mu^{\gamma_0}}$$

Dove γ_0 è la dimensione anomala dell'operatore.

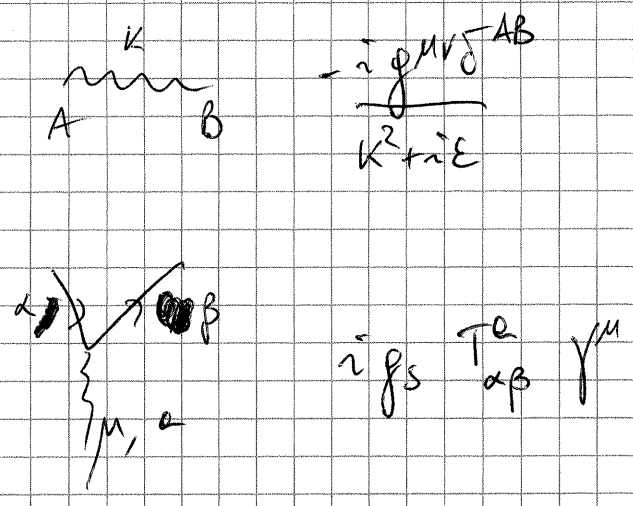
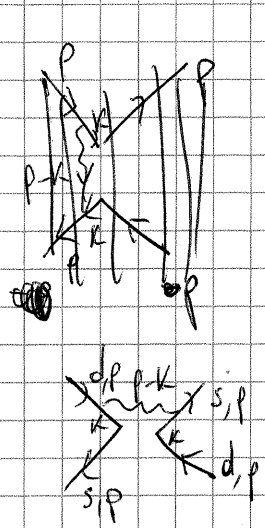
In concreto, occorre tenere conto del mescolamento fra operatori e la dimensione anomala diviene in questo caso una matrice. I dettagli della procedura fino all'ordine next-to-leading sono discussi in maniera pedagogica in ~~pro~~ A.J. Buras, Les Houches, Session LXVIII, 1997; ci limitiamo qui a notare che all'ordine leading la procedura di risommarione è indipendente dall'ampiezza nella teoria completa, e dunque può essere applicata indifferentemente, come vedremo, sia al Modello Standard che alle sue estensioni supersimmetriche, ed in generale ai contributi di tutte le particelle virtuali con masse $\sim M_W$.

Il coefficiente di Wilson $C(\mu)$ calcolato attraverso il matching e l'evoluzione è indipendente dagli stati esterni. Infatti, la dipendenza dagli stati esterni si cancella nel matching, dato che la teoria completa e quella efficace differiscono solo nell'ultravioletto.

Tutta la dipendenza dagli stati esterni è dunque contenuta negli elementi di matrice dell'Hamiltoniana efficace. Questi elementi di matrice contengono tutta la dinamica di bassa energia, e dunque sono calcolabili solo utilizzando metodi non-perturbativi come la QCD su reticolo o la QCD sum rules.



Ward identity $2V + W = 0$



$$\frac{-i g_{\mu\nu} \gamma^{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon}$$

$$i g_s T_a \gamma^\mu$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \bar{u}_s^\alpha (i g_s T_a \gamma^\mu) \frac{i}{k} \gamma^\rho \not{p}_L \not{v}_d^\beta \not{v}_s^\gamma \gamma^\rho \not{p}_L \frac{i}{k} (i g_s T_b \gamma^\nu) u_d^\delta \frac{-i \not{p} \not{p}}{(p-k)^2}$$

$$= i g_s^2 u_s^\alpha T_a \gamma^\mu \frac{k}{k^2} \gamma^\rho \not{p}_L \not{v}_d^\beta \not{v}_s^\gamma \gamma^\rho \frac{k}{k^2} \gamma^\nu T_b u_d^\delta \frac{1}{(p-k)^2} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} =$$

$$= -i g_s^2 u_s^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \not{p}_L \not{v}_d^\beta \not{v}_s^\gamma \gamma^\rho \gamma^\mu T_a \not{p}_L u_d^\delta I_{rs}$$

$$I_{rs} = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\nu k_\sigma}{(k^2)^2 (k-p)^2} =$$

$$= 2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\nu k_\sigma}{[(1-x)k^2 + (k-p)^2]^3} = 2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\nu k_\sigma}{[k^2 - 2p \cdot k x + p^2]^3}$$

$$= 2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{k_\nu (q+px)_\sigma (q+px)_\rho}{[q^2 + p^2 x(1-x)]^3} \xrightarrow{\text{div. part}} \quad k-p=x=q \quad q^2 = k^2 - 2p \cdot k x + p^2 x^2$$

$$2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q^\nu q^\sigma}{[q^2 + p^2 x(1-x)]^3} = 2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q^\nu q^\sigma}{[q^2 + p^2 x(1-x)]^3}$$

$$\int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{\ell^\mu \ell^\nu}{(\ell^2 - \Delta)^n} = \frac{(-1)^{n-1} i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{g^{\mu\nu}}{2} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2} - 1}$$

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q^\mu q^\nu}{[q^2 + p^2(n-x)]^2} = \frac{-i}{16\pi^2} \frac{g^{\mu\nu}}{2} \frac{\Gamma(2 - \frac{4-2\epsilon}{2})}{2} \frac{1}{(-p^2(n-x))^\epsilon} = \frac{-i}{16\pi^2} \frac{g^{\mu\nu}}{4} \frac{1}{\epsilon} + \dots$$

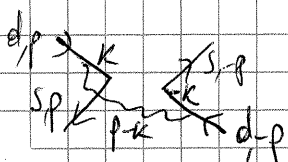
$$P(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + O(\epsilon)$$

$$-\frac{\alpha_s}{4\pi} \bar{u}_s^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \not{p}_L \not{v}_d^\beta \bar{v}_s^\delta \not{p}_R \not{p}_\nu \not{p}_\mu u_d^\delta T_{\alpha\beta}^a T_{\gamma\delta}^a \frac{1}{\epsilon} =$$

$$= -\frac{\alpha_s}{4\pi} 4 \bar{u}_s^\alpha \gamma_\mu \not{p}_L u_d^\delta \bar{v}_s^\delta \gamma_\mu \not{p}_L v_d^\beta T_{\alpha\beta}^a T_{\gamma\delta}^a \frac{1}{\epsilon} = -\frac{\alpha_s}{4\pi} 4 \left(\frac{1}{2} \bar{u}_s^\alpha \gamma_\mu \not{p}_L u_d^\delta \bar{v}_s^\delta \gamma_\mu \not{p}_L v_d^\beta \right)$$

$$\left(T_{\alpha\beta}^a T_{\gamma\delta}^a = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} - \frac{1}{2N} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} \right) \quad \left| \quad -\frac{1}{2N} \bar{u}_s^\alpha \gamma_\mu \not{p}_L u_d^\delta \bar{v}_s^\delta \gamma_\mu \not{p}_L v_d^\beta \right) =$$

$$= -\frac{\alpha_s}{4\pi} \left(\cancel{2} \bar{u}_s^\alpha \gamma_\mu \not{p}_L u_d^\delta \bar{v}_s^\delta \gamma_\mu \not{p}_L v_d^\beta - \frac{2}{N} \bar{u}_s^\alpha \gamma_\mu \not{p}_L u_d^\delta \bar{v}_s^\delta \gamma_\mu \not{p}_L v_d^\beta \right)$$



$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \bar{u}_s^\alpha \not{p}_L \not{k} \not{p}_R \frac{i}{k} i \not{p}_S T_{\alpha\beta}^a \gamma^\mu \not{v}_d^\beta \bar{v}_s^\delta \not{p}_R \not{k} i \not{p}_S T_{\gamma\delta}^a \not{p}_L u_d^\delta \frac{-i \not{p}_\mu \not{p}_\nu \delta^{\mu\nu}}{(p-k)^2} =$$

$$= i \not{p}_S^2 \bar{u}_s^\alpha \not{p}_L \not{p}_R \gamma^\mu \not{p}_L \not{v}_d^\beta \bar{v}_s^\delta \not{p}_R \not{p}_L u_d^\delta T_{\alpha\beta}^a T_{\gamma\delta}^a I_{15} =$$

$$= \frac{\alpha_s}{4\pi} \bar{u}_s^\alpha \not{p}_L \not{p}_R \gamma^\mu \not{p}_L \not{v}_d^\beta \bar{v}_s^\delta \not{p}_R \not{p}_L u_d^\delta T_{\alpha\beta}^a T_{\gamma\delta}^a \frac{1}{\epsilon}$$

Flavoring we get $-\frac{1}{2} \bar{u}_s^\alpha \not{p}_L \not{p}_R \gamma^\mu \not{p}_L \not{v}_d^\beta \bar{v}_s^\delta \not{p}_R \not{p}_L u_d^\delta$

$$\not{p}_L \not{p}_R \not{p}_L \not{p}_R = -2 \not{p}_L \not{p}_R$$

$$\not{p}_L \not{p}_R \not{p}_L \not{p}_R = 16 \not{p}_L$$

$$= 16 \bar{u}_s^\alpha \gamma_\mu \not{p}_L u_d^\delta \bar{v}_s^\delta \gamma_\mu \not{p}_L v_d^\beta$$

$$-4 + 16 = 12$$

$$\frac{\alpha_s}{4\pi} 3 \left(\cancel{2} \bar{u}_s \gamma^\mu P_L u_d \bar{v}_s \gamma^\mu P_L v_d - \cancel{2} \bar{u}_s \gamma^\mu P_L u_d \bar{v}_s \gamma^\mu P_L v_d \right) \frac{1}{\epsilon} (*)$$

$$\gamma = \frac{\alpha_s}{4\pi} \gamma^{(0)} + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 \gamma^{(1)}$$

$$\gamma^{(0)} = 6 \frac{N-1}{N} \quad (\text{same as } Q_+ \text{ - Manohar's exercise})$$

Indeed $Q^{(0)} = Z Q$ ~~so that~~ so that $C = Z C^{(0)}$

$$\text{and } \frac{dC(\mu)}{d\ln\mu} = \gamma(g) C(\mu)$$

$$\text{with } \gamma = \frac{1}{Z} \frac{dZ}{d\ln\mu}$$

In MS

$$Z = 1 + \frac{1}{\epsilon} Z_1(g) + \frac{1}{\epsilon^2} Z_2(g) + \dots$$

$$\text{and } \gamma(g) = -Z g^2 \frac{\partial Z_1}{\partial g^2}$$

$$\text{Now } Z = 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{1}{\epsilon} (-3) \left(1 - \frac{1}{N}\right)$$

$$\text{So that } \gamma^{(0)} = 6 \left(1 - \frac{1}{N}\right)$$

(*) The Tree level matrix element of the operator $\bar{u}_s \gamma^\mu P_L u_d \bar{v}_s \gamma^\mu P_L v_d$ is $-2 (\bar{u}_s \gamma^\mu P_L u_d \bar{v}_s \gamma^\mu P_L v_d - \bar{u}_s \gamma^\mu P_L u_d \bar{v}_s \gamma^\mu P_L v_d)$.

Adding the piced diagrams we obtain

$$\frac{\alpha_s}{4\pi} 3 (2) \left(1 - \frac{1}{N}\right) (\bar{u}_s \gamma^\mu P_L u_d \bar{v}_s \gamma^\mu P_L v_d - \bar{u}_s \gamma^\mu P_L u_d \bar{v}_s \gamma^\mu P_L v_d)$$

$$\text{so that } Z = 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} (-3) \left(1 - \frac{1}{N}\right)$$

To have a more ~~precise~~ precise estimate of ~~the~~ μ μ_2 , one can go to higher orders in strong interactions. Going to NLO allows to strongly reduce the ~~scale~~ residual scale dependence of the result and to meaningfully match the perturbative calculation to the matrix element. ~~At~~ At NLO one removes terms of order $\alpha^{M+1} (\log \frac{\mu}{\mu_L})^N$. This is achieved computing the anomalous dimension at two loops, the matching ~~and~~ and the matrix element at one loop, i.e. all $O(\alpha_s)$ terms. Now, while the log term does not depend on the regularization and renormalization scheme, the $O(\alpha_s)$ terms do depend on the scheme, and for consistency it is mandatory to use the same renormalization scheme throughout the calculation. One gets

$$C(\mu) = \left(1 + \frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi} J\right) \left[\frac{\alpha_s(\mu_0)}{\alpha_s(\mu)}\right]^{\frac{\gamma_0}{2\beta_0}} \left(1 - \frac{\alpha_s(\mu_0)}{4\pi} J\right) C(\mu_0)$$

Now $C(\mu)$ and $\langle O(\mu) \rangle$ defined on the ~~same~~ renormalization scheme, and the scheme dependence cancels in the product at the desired order.

Now, as you have seen in Neubert's lectures, in perturbative calculations the most convenient scheme is $\overline{\text{MS}}$ coupled to dimensional regularization. However, to compute $\langle K | O(\mu) | K \rangle$ we need a nonperturbative method, so that the $\overline{\text{MS}}$ scheme becomes inconvenient. In lattice QCD, one wants to perform nonperturbative renormalization in order to fully exploit the accuracy of the nonperturbative calculation. Then it is most useful to go to the so-called regularization independent (RI) schemes. These are defined by imposing that the matrix element of the renormalized operator on a given external state is equal, for

example, to the tree-level matrix element, the advantage is that this renormalization condition can be applied both in the perturbative calculation and on the lattice. The disadvantage is that then the renormalized operators depend on the choice of external states and on the gauge. In practice, one uses \overline{MS} to compute the matrix elements in the nonperturbative regime, then runs them to a scale high enough as to change scheme perturbatively ~~and then~~ to \overline{MS} .

(2-12)

Purtroppo, ad oggi gli elementi di matrice rilevanti nello studio dei decadimenti di FCNC sono noti con una precisione che va dal 15% nel migliore dei casi a fattori 5 e più nel peggiore dei casi. Nel seguito, ci limiteremo ad utilizzare, dove necessario, i valori "medi", senza discutere i dettagli di come questi valori siano ottenuti con metodi non perturbativi.

Dal punto di vista della fenomenologia, e' comodo, addeve non necessario, esprimere gli elementi di matrice in termini dell'approssimazione di inserzione del vuoto.

Ad esempio, consideriamo l'elemento di matrice

$$\langle K^0 | \bar{d} \gamma^\mu P_L s \bar{d} \gamma_\mu P_L s | K^0 \rangle$$

ed inseriamo il vuoto in tutti i modi possibili tra le due correnti:

$$2 \langle K^0 | \bar{d} \gamma^\mu P_L s | 0 \rangle \langle 0 | \bar{d} \gamma_\mu P_L s | K^0 \rangle + 2 \langle K^0 | \bar{d} \gamma^\mu P_L s | 0 \rangle \langle 0 | \bar{d} \gamma_\mu P_L s | K^0 \rangle$$

dove il secondo termine corrisponde ~~ad~~ alle contrazioni di Wick "incrociate" ed e' ottenuto dal primo con un Fierz di Dirac.

Possiamo calcolare immediatamente il primo termine, dato che

$$\langle 0 | \bar{d} \gamma^\mu P_L s | K^0 \rangle = -i p_K^\mu \frac{F_K}{\sqrt{2} M_K}$$

Otteniamo

$$2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{F_K^2 M_K^2}{2 M_K}$$

D'altro canto, possiamo effettuare un Fierz di colore sul secondo termine:

$$\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} = 2 T_{\alpha\delta}^a T_{\gamma\beta}^a + \frac{1}{3} \delta_{\alpha\delta} \delta_{\gamma\beta}$$

ottenendo

$$\langle K^0 | \bar{d}^\alpha \gamma^\mu P_L s^\beta | 0 \rangle \langle 0 | \bar{d}^\beta \gamma_\mu P_L s^\alpha | \bar{K}^0 \rangle = \frac{1}{3} \langle K^0 | \bar{d}^\alpha \gamma^\mu P_L s^\alpha | 0 \rangle$$

$$\langle 0 | \bar{d}^\beta \gamma_\mu P_L s^\beta | \bar{K}^0 \rangle + 2 \langle K^0 | \bar{d}^\alpha T_{\alpha\beta}^a \gamma^\mu P_L s^\beta | 0 \rangle \langle 0 | \bar{d}^\beta T_{\beta\alpha}^a \gamma^\mu P_L s^\alpha | \bar{K}^0 \rangle.$$

Il secondo Termine si annulla perché non rispettato di colore e dunque in definitiva otteniamo

$$2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{F_K^2 M_K^2}{2 M_K} = \frac{2}{3} \frac{F_K^2 M_K^2}{2 M_K}.$$

In generale scriveremo allora

$$\langle K^0 | \bar{d} \gamma^\mu P_L s \bar{d} \gamma_\mu P_L s | \bar{K}^0 \rangle = \frac{1}{3} F_K^2 M_K B_K,$$

dove $B_K = \frac{\langle \text{FIM} \rangle}{\langle \text{VIA} \rangle}$ parametrizza il vero elemento di matrice

in termini di quello nell'approssimazione di inserzione del vuoto. ~~•~~

Concludiamo questa parte discutendo brevemente alcuni aspetti dell'Hamiltoniana efficace $\Delta F=1$, che utilizzeremo nel seguito.

Mentre nel caso $\Delta F=2$, come abbiamo visto, vi è un unico operatore, e le correzioni di QCD danno solo un fattore moltiplicativo, $H_{\text{eff}}^{\Delta F=1}$ ha una struttura molto più complicata. Infatti, possiamo distinguere diversi tipi di contributi, che danno origine a diverse classi di operatori, i quali poi si mischiano sotto rinormalizzazione. È conveniente organizzare la discussione ordinando gli operatori in dimensione crescente.

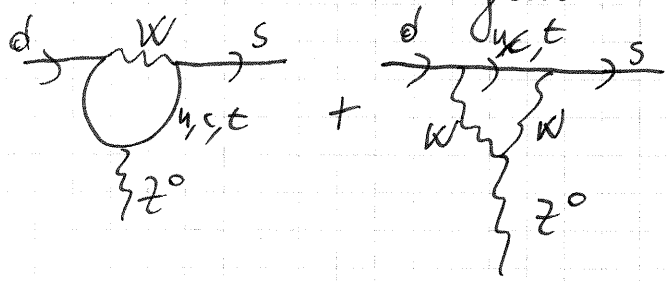
Iniziamo dunque dal vertice efficace $\bar{3}dZ$, prototipo dei vertici efficaci $\Delta F=1$ dello Z .

Questo vertice

$$\bar{3} \gamma^\mu P_L d Z_\mu$$

ha dimensione 4 e dunque ingenuamente si potrebbe ritenere che non vi sia alcuna espressione in potenze di M_W nel coefficiente di Wilson. Tuttavia, come abbiamo visto in precedenza, vertici FCNC possono essere generati solo per quark massivi e non degeneri, e dunque vi dovrà essere una dipendenza da M_q nel coefficiente. Inoltre, questo vertice non è gauge invariante: dunque per essere generato radiativamente deve "sentire" la rottura di $SU(2) \times U(1)$ ed il coefficiente deve quindi essere proporzionale ad M_q .

Dal calcolo dei diagrammi "a pinguino"



si ottiene infatti

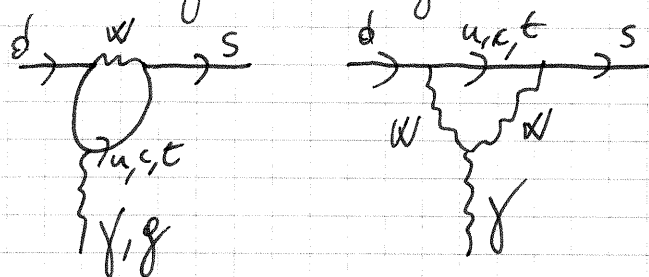
$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{M_Z^2}{M_W^2} \frac{e}{\pi^2} \frac{\cos \theta_W}{\sin \theta_W} \sum_i C_0(x_i) \lambda_i = \bar{3} \gamma^\mu P_L d$$

con $C_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} x$.

Dunque il vertice efficace, pur essendo di dim. 4, si annulla come $\frac{M_q^2}{M_W^2}$ per $M_W \rightarrow \infty$.

Consideriamo ora operatori di dimensione 5.

Dai diagrammi seguenti:



si ottengono due operatori di dim. 5:

$$Q_Y = \frac{e}{16\pi^2} \bar{d} \sigma^{\mu\nu} (1 + \gamma_5) s F_{\mu\nu}$$

$$Q_g = \frac{g}{16\pi^2} \bar{d} \sigma^{\mu\nu} T^a (1 + \gamma_5) s G_{\mu\nu}^a$$

Ora, questi operatori presentano un cambio di chiralità $\bar{d}_L \sigma^{\mu\nu} s_R$: nel Modello Standard questo può avvenire solo con un'inserzione di massa m_s . Perciò nel Modello Standard abbiamo in effetti un operatore di dim. 6

$$Q_Y = \frac{e}{16\pi^2} m_s \bar{d} \sigma^{\mu\nu} (1 + \gamma_5) s F_{\mu\nu}$$

e analogamente per Q_g . Come vedremo nel seguito, questa proporzionalità ad m_s può venir meno in alcune estensioni del modello standard. La presenza di m_s fa sì che l'ampiezza di Transizione sia finita anche prima di applicare GIM; in questo caso abbiamo dunque nuovamente un GIM duro:

$$H_{\text{eff}}^{\text{soft}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} C_Y Q_Y, \quad \text{con } C_Y \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \lambda.$$

Tuttavia, le correzioni di QCD inducono delle divergenze logaritmiche e all'ordine α_s abbiamo un "GIM soft":

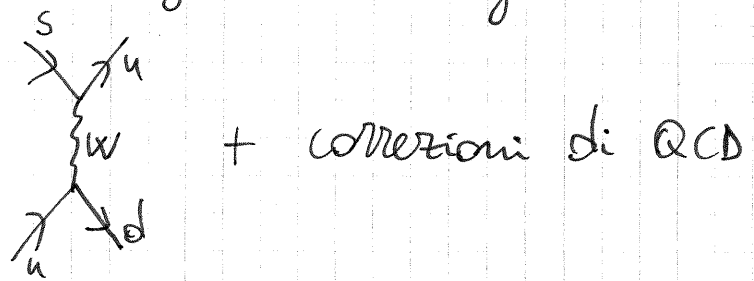
$$G_F \frac{M_g^2}{M_W^2} \rightarrow G_F \alpha_s \ln \frac{M_g^2}{M_W^2}$$

E' evidente allora che in questo caso le correzioni di QCD sono di grande importanza.

Infine, consideriamo gli operatori di dimensione 6 che si dividono in 3 classi:

1) Operatori corrente-corrente:

Si ottengono dai diagrammi tree-level



Abbiamo $H_{c-c}^{\Delta F=1} = \frac{4G_F K}{\sqrt{2}} Q_i$, con

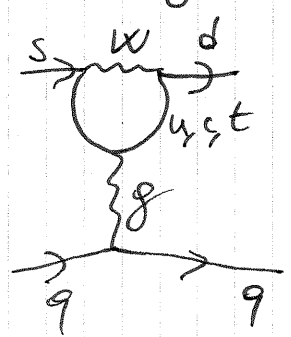
$$Q_1 = \bar{u} \gamma^\mu P_L s \bar{d} \gamma_\mu P_L u$$

$$Q_2 = \bar{u} \gamma^\mu P_L u \bar{d} \gamma_\mu P_L s$$

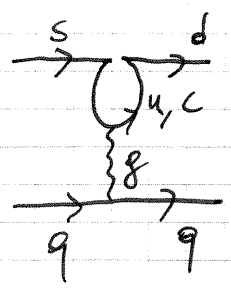
e $C_1 \sim 1$, $C_2 \sim \frac{1}{N} \sim \frac{1}{3}$, $K_u = V_{ud}^* V_{us} \sim \sin \theta_c \cos \theta_c$

2) Operatori pinguino:

Si ottengono dai diagrammi a pinguino



e dalle contrazioni a pinguino degli operatori corrente-corrente:



Numericamente, questo contributo dovuto all'evoluzione è dominante.

Abbiamo allora

$$H_{peng}^{\Delta F=1} = \frac{4G_F K_t C_i}{\sqrt{2}} Q_i$$

con

$$Q_3 = \bar{s} \gamma^\mu P_L d \sum_q \bar{q} \gamma_\mu P_L q$$

$$Q_4 = \bar{s} \gamma^\mu P_L \sum_q q \bar{q} \gamma_\mu P_L d$$

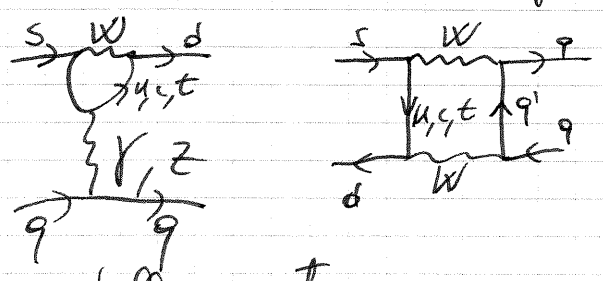
$$Q_5 = \bar{s} \gamma^\mu P_L d \sum_q \bar{q} \gamma_\mu P_R q$$

$$Q_6 = \sum_q -2 \bar{s} P_R q \bar{q} P_L d$$

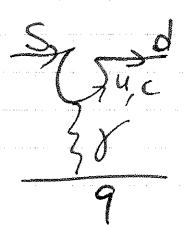
e $C_i \sim 10^{-2} - 10^{-1}$, $K_t = V_{td}^* V_{ts}$

3) Operatori elettropinguino:

Si ottengono dai diagrammi a pinguino e box:



e dalle contrazioni a pinguino degli operatori corrente-corrente:



In questo caso sono importanti i contributi della z .

(2-18)

Abbiamo

$$H_{EW}^{\Delta F=1} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} K_L C_i Q_i,$$

con

$$Q_7 = \bar{s} \gamma^\mu P_L d \sum_q e_q \bar{q} \gamma^\mu P_R q$$

$$Q_8 = \sum_q e_q \bar{s} P_R q \bar{q} P_L d$$

$$Q_9 = \bar{s} \gamma^\mu P_L d \sum_q e_q \bar{q} \gamma_\mu P_L q$$

$$Q_{10} = \bar{s} \gamma^\mu P_L \sum_q e_q \bar{q} \gamma_\mu P_L d$$

dove e_q è la carica del quark q e $C_i \sim \alpha_c$.

Concludiamo questa parte con una piccola osservazione. Apparentemente potrebbe risultare sorprendente che i diagrammi a pinguino producano operatori locali a quattro fermioni.

La ragione è la seguente. L'invarianza di gauge forza i vertici efficaci di dim. 6 $\bar{s} d \gamma$ e $\bar{s} d \gamma$ ad avere la forma

$$\bar{s} (q^2 \gamma^\mu - q^\mu \gamma) P_L d \quad \text{dove } q \text{ è il momento di } \gamma \text{ e } \bar{s}.$$

Contrattiamo ora questo vertice efficace col propagatore ad es. del fotone ed una corrente di quark:

$$\begin{array}{c} \bar{s} \rightarrow d \\ \gamma \\ q \rightarrow q \end{array}$$

$$\bar{s} q^2 \gamma^\mu P_L d \left(\frac{-i}{q^2} \right) \bar{q} \gamma^\mu q - \bar{s} \not{q} P_L d \left(\frac{-i}{q^2} \right) \bar{q} \not{q} q.$$

(2-19)

Il secondo termine si annulla per la conservazione della corrente,
e nel primo termine il q^2 numeratore cancella il polo del
propagatore dando gli operatori locali "a pinguino".

Questa è una rappresentazione diagrammatica della eq. del moto.
Infatti: il vertice efficace $\int d^4y$ può essere scritto come

$$\int d^4y P_L d D^\nu F_{\mu\nu}$$

e per le eq. del moto $D^\nu F_{\mu\nu} = \sum_q \gamma_\mu q_\nu e_q$.